

参考答案

复习讲义部分

【阶段一】

第一章 集合、常用逻辑用语、不等式

第1课时 集合

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点1 (1)互异性 (2)属于 $\in$ (3)列举法 描述法

(4) $\mathbf{N}$ $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ $\mathbf{Z}$ $\mathbf{Q}$ $\mathbf{R}$

知识点2 (1)元素 $\subseteq \supseteq$ (2)存在 真子集 (3) $B \subseteq A$

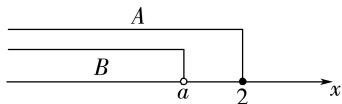
(4)非空

知识点3 $\{x|x \in A, \text{且 } x \in B\}$

链教材·夯基固本

1. D

2. 解: 因为集合 B 的元素都是集合 A 的元素, 所以可用数轴表示它们的关系, 如图所示.



从而可知 $a \leq 2$.

3. 解: $A \cap B = \{-1, 0, 1\} \cap \{0, 1, 2, 3\} = \{0, 1\}$;

$A \cup B = \{-1, 0, 1\} \cup \{0, 1, 2, 3\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

4. 7 [对于集合 $A = \{x|x = 2^n, n \in \mathbf{Z}\}$, 当 $n=0$ 时, $x=1$; 当 $n=1$ 时, $x=2$; 当 $n=2$ 时, $x=4$, 且 $B = \{1, 2, 3, 4\}$, 所以 $A \cap B = \{1, 2, 4\}$, 即 $A \cap B$ 中有 3 个元素, 则其真子集的个数为 $2^3 - 1 = 7$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例1 ACD [对于 A , 集合 $A = \{a-2, a^2+4a, 12\}$, 且 $-3 \in A$,

①当 $a-2=-3$ 时, $a=-1$, 所以 $a^2+4a=1-4=-3$, 此时集合 $A = \{-3, -3, 12\}$, 不满足集合中元素的互异性, 故不符合题意, 舍去;

②当 $a^2+4a=-3$ 时, $a=-1$ 或 -3 ,

若 $a=-1$, 则 $a-2=-3$, 此时集合 $A = \{-3, -3, 12\}$, 不满足集合中元素的互异性, 故不符合题意, 舍去,

若 $a=-3$, 则 $a-2=-5$, 此时集合 $A = \{-5, -3, 12\}$, 符合题意, 综上所述, $a=-3$, 故 A 正确.

对于 B , 因为 $A = \{0, 1, 2\}$, $a \in A$, $b \in A$,

所以 $ab=0$ 或 $ab=1$ 或 $ab=2$ 或 $ab=4$,

故 $B = \{ab|a \in A, b \in A\} = \{0, 1, 2, 4\}$,

即集合 B 中有 4 个元素, 故 B 错误.

对于 C , 因为 $A = \{x|x^2 \leq 4\} = \{x|-2 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x|x \in \mathbf{N}^*, \text{且 } x-1 \in A\}$, 所以 $B = \{1, 2, 3\}$, 故 C 正确.

对于 D , 当 $x=5$ 时, $y=1, 2, 3, 4$,

当 $x=4$ 时, $y=1, 2, 3$,

当 $x=3$ 时, $y=1, 2$,

当 $x=2$ 时, $y=1$,

综上知, B 中的元素个数为 10, 故 D 正确. 故选 ACD.]

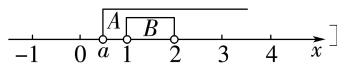
考点二

典例2 (1)B (2)B [(1)集合 $A = \{x|x = 3k-1, k \in \mathbf{Z}\}$,

$B = \{x|x = 6k-1, k \in \mathbf{Z}\} = \{x|x = 3 \times 2k-1, k \in \mathbf{Z}\}$,

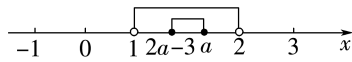
则集合 B 是集合 A 的子集, 即 $B \subseteq A$. 故选 B.

(2)因为 $A = \{x|x > a\}$, $B = \{x|1 < x < 2\}$, 且 $B \subseteq A$, 用数轴表示其关系如图, 所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$. 故选 B.



母题探究

1. $(3, +\infty)$ [因为 $A = \{x|2a-3 \leq x \leq a\}$, $B = \{x|1 < x < 2\}$, 且 $A \subseteq B$, 用数轴表示其关系如图.



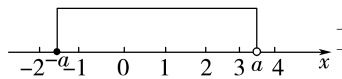
①当 $A = \emptyset$ 时, $2a-3 > a$, 则 $a > 3$, 满足题意;

②当 $A \neq \emptyset$ 时, $\begin{cases} 2a-3 \leq a, \\ 2a-3 > 1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a \leq 3, \\ a > 2, \end{cases}$ 所以 a 不存在.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $(3, +\infty)$.]

2. $(3, +\infty)$ [因为 $B \subseteq A$, 用数轴表示其关系如图. 所以

$\begin{cases} -a \leq -1, \\ a > 3, \end{cases}$ 即 $a > 3$. 所以实数 a 的取值范围为 $(3, +\infty)$.



考点三

典例3 (1)A (2)C [(1)由 $\sqrt{x} = x$, 得 $x = x^2$, 即 $x(x-1) = 0$, 解得 $x=1$ 或 $x=0$, 所以 $B = \{0, 1\}$, 所以 $A \cap B = \{0, 1\}$. 故选 A.

(2) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, 故 $\complement_U A = \{2, 4, 6, 7, 8\}$, 故 $\complement_U A$ 中有 5 个元素. 故选 C.]

考题探究

解: 根据题意可知, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 所以 $\complement_U A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $\complement_U B = \{1, 2, 7, 8\}$.

多维变迁

1. B [$M \cup N = \{x|x > -1\} = (-1, +\infty)$.

故选 B.]

2. C [因为 $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, 所以 $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$,

所以阴影部分表示的集合为 $\complement_{A \cup B} (A \cap B) = \{1, 2, 5\}$.

故选 C.]

3. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ [由题意得, $A = \{x|x^2 \leq 4\} = \{x|-2 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x|a-1 \leq x \leq a+1\}$, 因为 $A \cap B = \emptyset$, 所以 $a+1 < -2$ 或 $a-1 > 2$, 得 $a < -3$ 或 $a > 3$, 则实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.]

微点突破1

典例4 AC [根据题意知 $a > 0$, $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{\sqrt{a}} = 1$, $\therefore a = 4$ 或 $a = 1$. 故选 AC.]

随堂·对点检测

- C** [因为集合 $A=\{-1,0,1\}$, $B=\{0,1,4\}$, 所以 $A \cap B = \{0,1\}$. 故选 C.]
- D** [$\complement_U A = \{-2,2\}$, $(\complement_U A) \cup B = \{-2,0,1,2\}$. 故选 D.]
- C** [因为 $A = \{x | 2x-1 > m\}$, $2 \in A$, 所以 $2 \times 2 - 1 > m$, 解得 $m < 3$. 故选 C.]
- B** [依题意, 有 $a-2=0$ 或 $2a-2=0$. 当 $a-2=0$ 时, 解得 $a=2$, 此时 $A=\{0,-2\}$, $B=\{1,0,2\}$, 不满足 $A \subseteq B$; 当 $2a-2=0$ 时, 解得 $a=1$, 此时 $A=\{0,-1\}$, $B=\{-1,0,1\}$, 满足 $A \subseteq B$. 所以 $a=1$, 故选 B.]
- $\left\{x \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq 1\right\}$ [由 $A = \left\{x \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq 3\right\}$, $B = \{x | x > 1\}$, $A - B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \notin B\}$, 则 $A - B = \left\{x \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq 1\right\}$.]

第2课时 常用逻辑用语

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点1 充分 必要 充分不必要 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$ $p \Leftrightarrow q$
既不充分也不必要

知识点2 (1) $\exists x \in M, \neg p(x)$ 存在 $\forall x \in M, \neg p(x)$
全称 (2) 不是 不都是 小于或等于 大于或等于 至多有 $n-1$ 个 至少有两个 存在一个 x 不成立

链教材·夯基固本

- 解:** (1) 因为命题“若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = A$ ”为真命题, 并且“若 $A \cap B = A$, 则 $A \subseteq B$ ”也为真命题, 所以 p 是 q 的充要条件.
(2) 因为“ $a=b$ ” $\Rightarrow$ “ $|a|=|b|$ ”, 但是“ $|a|=|b|$ ”不能推出“ $a=b$ ”, 例如, “ $|1|=|-1|$ ”, 而“ $1 \neq -1$ ”, 所以 p 是 q 的充分不必要条件.
(3) 因为“四边形的对角线相等”不能推出“四边形是平行四边形”, 并且“四边形是平行四边形”也不能推出“四边形的对角线相等”, 所以 p 既不是 q 的充分条件, 也不是 q 的必要条件.
- 任意一个偶数都不是素数
- $[1, +\infty)$ [$\because x^2 \geq 1$, 即 $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$, 且原命题是真命题, $\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.]
- B** [若 $x \in A$, 但 x 不一定同时属于集合 B , 即由“ $x \in A$ ”推不出“ $x \in A \cap B$ ”, 所以“ $x \in A$ ”不是“ $x \in A \cap B$ ”的充分条件; 如果 $x \in A \cap B$, 那么 x 既在集合 A 中又在集合 B 中, 所以一定有 $x \in A$, 即由“ $x \in A \cap B$ ”可以推出“ $x \in A$ ”, 所以“ $x \in A$ ”是“ $x \in A \cap B$ ”的必要不充分条件. 故选 B.]

考点深研·题型突破

考点一

- 典例1** (1)**C** (2)**BC** [(1) 若 $\ln a > \ln b$, $y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $a > b > 0$, 则 $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 即充分性成立;
若 $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 可得 $a > b > 0$,
 $\therefore \ln a > \ln b$, 即必要性成立.
故“ $\ln a > \ln b$ ”是“ $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”的充要条件. 故选 C.
(2) 对于 A, 当 $a=2$ 时, $x^2+2x+5=0$, 此时 $\Delta=2^2-4 \times 1 \times 5=-16 < 0$,

方程没有实数根, 故 A 错误;

对于 B, 方程无实数根的充要条件是 $\Delta=a^2-4 \times 1 \times (a+3) < 0$, 即 $-2 < a < 6$,

因为 $\{a | -2 < a < 4\} \subsetneq \{a | -2 < a < 6\}$, 故 B 正确;

对于 C, 方程有两个不相等的负根的充要条件

$$\begin{cases} \Delta=a^2-4 \times 1 \times (a+3) > 0, \\ x_1+x_2=-a < 0, \\ x_1 \cdot x_2=a+3 > 0, \end{cases}$$

解得 $a > 6$, 故 C 正确;

对于 D, 方程有一个正根和一个负根的充要条件是

$$\begin{cases} \Delta=a^2-4 \times 1 \times (a+3) > 0, \\ x_1 \cdot x_2=a+3 < 0, \end{cases} \text{ 解得 } a < -3, \text{ 故 D 错误.}$$

故选 BC.]

考点二

典例2 **解:** $p: -2 \leq x \leq 10, q: 1-m \leq x \leq 1+m (m > 0)$.

因为 p 是 q 的必要不充分条件,

所以 q 是 p 的充分不必要条件,

即 $\{x | 1-m \leq x \leq 1+m\} \subsetneq \{x | -2 \leq x \leq 10\}$,

$$\text{故有 } \begin{cases} 1-m \geq -2, \\ 1+m < 10, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 1-m > -2, \\ 1+m \leq 10, \end{cases}$$

解得 $m \leq 3$.

又 $m > 0$, 所以实数 m 的取值范围为 $\{m | 0 < m \leq 3\}$.

母题探究

1. 解: $p: -2 \leq x \leq 10, q: 1-m \leq x \leq 1+m (m > 0)$.

因为 p 是 q 的充分不必要条件,

所以 $\{x | -2 \leq x \leq 10\} \subsetneq \{x | 1-m \leq x \leq 1+m\}$.

$$\text{所以 } \begin{cases} 1-m \leq -2, \\ 1+m > 10, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 1-m < -2, \\ 1+m \geq 10, \end{cases}$$

解得 $m \geq 9$,

即实数 m 的取值范围是 $\{m | m \geq 9\}$.

2. 解: 因为 $p: -2 \leq x \leq 10, q: 1-m \leq x \leq 1+m (m > 0)$,

$$\text{若 } p \text{ 是 } q \text{ 的充要条件, 则 } \begin{cases} -2=1-m, \\ 10=1+m, \end{cases} \text{ 无解,}$$

故不存在实数 m , 使得 p 是 q 的充要条件.

考点三

典例3 **D** [因为 p 为假命题, 所以命题 $\neg p: \forall x \in [0, 3],$

$x^2-2x-a \leq 0$ 为真命题,

即 $x^2-2x-a \leq 0$ 在 $x \in [0, 3]$ 上恒成立,

即 $a \geq x^2-2x$ 在 $x \in [0, 3]$ 上恒成立,

记 $f(x)=x^2-2x, x \in [0, 3]$,

则 $a \geq f(x)_{\max}$,

因为 $f(x)=x^2-2x$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 在 $[1, 3]$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\max}=f(3)=3$,

所以 $a \geq 3$, 所以实数 a 可取的最小值是 3.

故选 D.]

多维变迁

1. D [因为原命题为存在量词命题,

故否定是 $\forall x \in \complement_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}, x^2-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

故选 D.]

2. B [对于命题 p 而言, 取 $x=-1$, 则有 $|x+1|=0 < 1$, 故 p 是假命题, $\neg p$ 是真命题; 对于命题 q 而言, 取 $x=1$, 则有 $x^3=1^3=1=x$, 故 q 是真命题, $\neg q$ 是假命题.

综上, $\neg p$ 和 q 都是真命题.

故选 B.]

随堂·对点检测

1. A [由“三角形是等边三角形”可得到“该三角形一定是等腰三角形”,但反之不成立.故选 A.]

2. B [由 $(a+b) \cdot (a-b)=0$, 得 $a^2-b^2=0$, 即 $|a|^2-|b|^2=0$, 所以 $|a|=|b|$, 当 $a=(1,1), b=(-1,1)$ 时, $|a|=|b|$, 但 $a \neq b$ 且 $a \neq -b$, 故充分性不成立; 当 $a=-b$ 或 $a=b$ 时, $(a+b) \cdot (a-b)=0$, 故必要性成立. 所以 “ $(a+b) \cdot (a-b)=0$ ” 是 “ $a=-b$ 或 $a=b$ ” 的必要不充分条件.]

3. AD [对于 A, 命题 p 的否定是 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2+2x+2 \geq 0$, 故 A 正确.

对于 B, $|x| > |y|$ 不能推出 $x > y$, 例如 $|-2| > |1|$, 但 $-2 < 1$; $x > y$ 也不能推出 $|x| > |y|$, 例如 $2 > -3$, 而 $|2| < |-3|$; 所以 “ $|x| > |y|$ ” 是 “ $x > y$ ” 的既不充分也不必要条件, 故 B 错误.

对于 C, 当 $x=0$ 时, $x^2=0$, 故 C 错误;

对于 D, 关于 x 的方程 $x^2-2x+m=0$ 有一正一负根 $\Leftrightarrow \begin{cases} 4-4m > 0, \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$,

所以 “ $m < 0$ ” 是 “关于 x 的方程 $x^2-2x+m=0$ 有一正一负根” 的充要条件, 故 D 正确.

故选 AD.]

4. $[-2, +\infty)$ [因为 $\exists x \in (0, +\infty), x^2+ax+1 < 0$ 为假命题,

故 $\forall x \in (0, +\infty), x^2+ax+1 \geq 0$ 是真命题,

即 $a \geq -x - \frac{1}{x}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立,

根据基本不等式可得 $y = x + \frac{1}{x} \geq 2$, 当且仅当 $x = \frac{1}{x}$, 即 $x=1$ 时等号成立,

所以 $-x - \frac{1}{x} \leq -2$, 故 $a \geq -2$.]

第3课时 等式性质与不等式性质

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 2 $b < a \quad a > c \quad a+c > b+c \quad ac > bc \quad ac < bc$
 $a+c > b+d \quad ac > bd$

链教材·夯基固本

1. $M > N$ [$M-N = x^2+y^2+1-2x-2y+2 = (x-1)^2 + (y-1)^2+1 > 0$. 故 $M > N$.]

2. B [对于 A, 若 $a > b > 0$, 则当 $c=0$ 时, 显然 $ac^2 > bc^2$ 不成立, 故 A 错误;

对于 B, 若 $a > b > 0$, 则 $a^2 > b^2$ 成立, 故 B 正确;

对于 C, 若 $a < b < 0$, 则 $a^2 > b^2$, 故 C 错误;

对于 D, 若 $a < b < 0$, 则 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0$,

所以 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 故 D 错误. 故选 B.]

3. $(-5, -1)$ [由 $b \in (2, 3)$ 得 $-6 < -2b < -4$, 又 $1 < a < 3$, 故 $-5 < a-2b < -1$.]

4. D [这一事实用不等式可表示为 $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$.

下面证明不等式成立:

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a}{b} - \frac{a+m}{b+m} &= \frac{a(b+m) - b(a+m)}{b(b+m)} \\ &= \frac{m(a-b)}{b(b+m)}, \end{aligned}$$

又 $\because b > a > 0, m > 0$,

$\therefore b(b+m) > 0, m(a-b) < 0$,

即 $\frac{m(a-b)}{b(b+m)} < 0$,

$\therefore \frac{a}{b} - \frac{a+m}{b+m} < 0$, 即 $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$.

故选 D.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 ABD [对于 A, $\because x^2-2x+3 = (x-1)^2+2 \geq 2 > 0$,

$\therefore x^2-2x > -3$, 故 A 正确.

对于 B, 法一(作商法): $\because a = \frac{\ln 3}{3} > 0, b = \frac{\ln 2}{2} > 0, \therefore \frac{a}{b} =$

$$\frac{\ln 3}{3} \times \frac{2}{\ln 2} = \frac{2 \ln 3}{3 \ln 2} = \frac{\ln 9}{\ln 8} = \log_8 9 > 1, \therefore a > b.$$

法二(作差法): $a-b = \frac{\ln 3}{3} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{6}(2 \ln 3 - 3 \ln 2)$

$$= \frac{1}{6}(\ln 9 - \ln 8) > 0, \text{ 即 } a > b. \text{ 故 B 正确.}$$

对于 C, $\because a^2+b^2-2a+2b+2 = (a-1)^2 + (b+1)^2 \geq 0$,

$\therefore a^2+b^2 \geq 2(a-b-1)$, 故 C 错误.

对于 D, $\frac{a+2\,025}{b+2\,025} - \frac{a}{b} = \frac{2\,025(b-a)}{b(b+2\,025)}$,

$\because b > a > 0, \therefore \frac{2\,025(b-a)}{b(b+2\,025)} > 0, \therefore \frac{a}{b} < \frac{a+2\,025}{b+2\,025}$, 故 D 正确.]

考点二

典例 2 (1) D (2) AC [(1) 对于 A, $\because a > b > 0, \therefore \frac{1}{a} <$

$\frac{1}{b}, \therefore -\frac{1}{a} > -\frac{1}{b}, \therefore a - \frac{1}{a} > b - \frac{1}{b}$, 故 A 正确;

对于 B, 若 $b < a < 0$, 则 $-b > -a > 0$,

$\therefore \frac{1}{-b} < \frac{1}{-a}$, 则 $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$, 故 B 正确;

对于 C, $\because a > b, c > d$,

$\therefore$ 由不等式的可加性可得 $a+c > b+d$, 即 $a-d > b-c$, 故 C 正确;

对于 D, 令 $a=-1, b=-2, c=2, d=1$, 满足 $a > b, c > d > 0$,

但 $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$, 故 D 错误.

故选 D.

(2) A 中, 因为 $a < 0 < b$, 且 $a+b > 0$, 两边同时除以 b ,

所以 $\frac{a}{b} + 1 > 0$, 即 $\frac{a}{b} > -1$, 所以 A 正确;

B 中, 由题意可得 $ab < 0, a+b > 0$ 两边同时除以 ab ,

则 $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} < 0$, 所以 B 不正确;

C 中, 由题意可得 $|b| > |a|$, 所以 $b^2 > a^2$, 所以 C 正确;

D 中, 取 $a=-2 < 0 < b=3, a+b=1 > 0$, 则 $a - \frac{1}{a} = -\frac{3}{2} <$

$b - \frac{1}{b} = \frac{8}{3}$, 故 D 错误. 故选 AC.]

考点三

典例 3 ABC [因为 $-3 < a+2b < 2, -1 < 2a-b < 4$,

所以 $-2 < 4a-2b < 8$,

所以 $-5 < 5a < 10$, 即 $-1 < a < 2$, A 正确;

由 $-3 < a+2b < 2$, 可得 $-4 < -2a-4b < 6$,

梳必备·破题有方

知识点1 (2) $a=b$ (3) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

知识点2 (1) $2\sqrt{P}$ (2) $\frac{1}{4}S^2$

链教材·夯基固本

1. C [∵ $0 < a < b$, ∴ $2b > a+b$, ∴ $b > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

∵ $b > a > 0$, ∴ $ab > a^2$, ∴ $\sqrt{ab} > a$.

故 $b > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > a$, 故选 C.]

2. 9 [由 $ab = a+b+3 \geq 2\sqrt{ab}+3$, 得 $ab-2\sqrt{ab}-3 \geq 0$, 解得 $\sqrt{ab} \geq 3$ ($\sqrt{ab} \leq -1$ 舍去), 即 $ab \geq 9$, 当且仅当 $a=b=3$ 时取等号.]

3. 6 [因为 $x > -2$, 所以 $x+2 > 0$.

由基本不等式, 得

$$x + \frac{16}{x+2} = (x+2) + \frac{16}{x+2} - 2$$

$$\geq 2\sqrt{(x+2) \cdot \frac{16}{x+2}} - 2 = 6,$$

当且仅当 $x+2 = \frac{16}{x+2}$, 即 $x=2$ 时, 等号成立.

因此, y 的最小值为 6.]

4. AD [对于 A, C, 因为 $a > 0, b > 0$, 所以 $a+b=4 \geq 2\sqrt{ab}$, 即 $\sqrt{ab} \leq 2$, 当且仅当 $a=b=2$ 时等号成立, 故 $0 < ab \leq 4$, 则 $\frac{1}{ab} \geq \frac{1}{4}$, 故 A 正确, C 错误; 对于 B, 代入 $a=b=2$, $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} < 2$, 故 B 错误; 对于 D, $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = 8$, 当且仅当 $a=b=2$ 时等号成立, 故 D 正确.]

考点深研·题型突破

考点一

典例1 ABC [对于 A, 当 $x > 0$ 时, $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$

(当且仅当 $x=2$ 时取等号), 当 $x < 0$ 时, $x + \frac{4}{x} =$

$- \left[(-x) + \frac{4}{-x} \right] \leq -2\sqrt{(-x) \cdot \frac{4}{-x}} = -4$ (当且仅当 $x=-2$ 时取等号), 故 A 错误;

对于 B, $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 恒成立, 而 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 成立的条件为 $a > 0, b > 0$, 故 B 错误;

对于 C, $y = \sqrt{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \geq 2$, 等号成立的条件是

$\sqrt{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$, 即 $x^2+2=1$, 显然不能取到, 故 C

错误;

对于 D, 存在 $a=-1$, 使得 $a + \frac{1}{a} < 2$ 成立, 故 D 正确.]

考点二

考向1 典例2 D [由题意可得, $|a| > 0$,

则 $3|a| + \frac{7}{|a|} \geq 2\sqrt{3|a| \times \frac{7}{|a|}} = 2\sqrt{21}$,

又 $-1 < 2a-b < 4$, 则 $-5 < -5b < 10$, 即 $-2 < b < 1$, B 正确;

$a+b = \frac{3}{5}(a+2b) + \frac{1}{5}(2a-b) \in (-2, 2)$, C 正确;

$a-b = -\frac{1}{5}(a+2b) + \frac{3}{5}(2a-b) \in (-1, 3)$, D 错误.

故选 ABC.]

母题探究

1. $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ [因为 $4 < b < 9$, 所以 $\frac{1}{9} < \frac{1}{b} < \frac{1}{4}$, 又 $3 < a < 8$, 所以 $\frac{1}{9} \times 3 < \frac{a}{b} < \frac{1}{4} \times 8$, 即 $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 2$.]

2. $(-5, 6)$ [设 $3a+2b = x(a+2b) + y(2a-b)$, 即 $3a+2b = (x+2y)a + (2x-y)b$,

$$\text{所以 } \begin{cases} x+2y=3, \\ 2x-y=2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=\frac{7}{5}, \\ y=\frac{4}{5}, \end{cases}$$

于是 $3a+2b = \frac{7}{5}(a+2b) + \frac{4}{5}(2a-b)$,

又因为 $-\frac{21}{5} < \frac{7}{5}(a+2b) < \frac{14}{5}$, $-\frac{4}{5} < \frac{4}{5}(2a-b) < \frac{16}{5}$,

所以 $-5 < \frac{7}{5}(a+2b) + \frac{4}{5}(2a-b) < 6$,

即 $-5 < 3a+2b < 6$.]

随堂·对点检测

1. B [由 $a-b=2+\sqrt{3}-\sqrt{7}$, 且 $(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}>7$, 故 $a>b$. $a-c=2+\sqrt{2}-\sqrt{6}$, 且 $(2+\sqrt{2})^2=6+4\sqrt{2}>6$, 故 $a>c$. $b-c=(\sqrt{7}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}+\sqrt{3})$, 且 $(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2=9+2\sqrt{18}>9+2\sqrt{14}=(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2$, 故 $c>b$. 所以 $a>c>b$.]

2. D [因为实数 $a < b$,

若 $m > 0$, 如 $a = -2, b = -1, m = 2$, 得 $\frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$,

∴ $m > 0$ 不是 $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$ 的充分条件;

若 $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$, 如 $a = 0, b = 1, m = -2$ 符合此不等式, 但是 $m < 0$,

∴ $m > 0$ 不是 $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$ 的必要条件,

∴ $m > 0$ 是 $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$ 的既不充分也不必要条件.

故选 D.]

3. ACD [选项 A, 由 $a > b$ 可得 $a-b > 0$, 由 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 可得 $\frac{a-b}{ab} < 0$, 故 $ab < 0$, A 正确;

选项 B, 当 $a = 0, b = -1$ 时, 满足 $a > b$, 且 $a \neq -b$, 但 $\frac{b}{a-b} = -1, \frac{a}{a+b} = 0$, 不等式 $\frac{b}{a-b} > \frac{a}{a+b}$ 不成立, B 错误;

选项 C, 因为 $a < b < 0$, 所以 $-a > -b > 0$, 故 $-a-b > 2\sqrt{ab} > \sqrt{ab}$, C 正确;

选项 D, 由 $a < b < 0$, 可得 $b-a > 0$, 且 $b-1 < 0$, 故 $\frac{a}{b} -$

$\frac{a-1}{b-1} = \frac{b-a}{b(b-1)} > 0$, 即 $\frac{a}{b} > \frac{a-1}{b-1}$, D 正确. 故选 ACD.]

4. (2, 5) [因为 $2 < a < 3$, 所以 $4 < 2a < 6$, 又 $-2 < b < -1$, 所以 $2 < 2a+b < 5$.]

当且仅当 $3|a| = \frac{7}{|a|}$, 即 $|a| = \sqrt{\frac{7}{3}}$ 时取等号.

故选 D.]

考向 2 典例 3 A [由 $x > -3$,

$$\text{则 } \frac{1}{x+3} + x = \frac{1}{x+3} + (x+3) - 3$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{1}{x+3} \cdot (x+3)} - 3 = -1,$$

当且仅当 $\frac{1}{x+3} = x+3$, 即 $x = -2$ 时取等号.

故选 A.]

母题探究

解: 由 $x < -3$, 知 $\frac{1}{x+3} < 0$, $-\frac{1}{x+3} > 0$,

$$\text{则 } -\frac{1}{x+3} + [-(x+3)] \geq 2\sqrt{\frac{1}{x+3} \cdot (x+3)} = 2,$$

所以 $\frac{1}{x+3} + (x+3) \leq -2$, 当且仅当 $\frac{1}{x+3} = x+3$,

即 $x = -4$ 时取等号.

$$\text{故 } \frac{1}{x+3} + x = \frac{1}{x+3} + (x+3) - 3 \leq -2 - 3 = -5,$$

所以 $\frac{1}{x+3} + x$ 的最大值为 -5 .

考向 3 典例 4 C [$8a + b = (8a + b)\left(\frac{8}{b} + \frac{4}{a}\right) = \frac{64a}{b} +$

$$\frac{4b}{a} + 40 \geq 2\sqrt{\frac{64a}{b} \cdot \frac{4b}{a}} + 40 = 72,$$

当且仅当 $\frac{64a}{b} = \frac{4b}{a}$, 即 $a = 6, b = 24$ 时取等号.

故选 C.]

考向 4 典例 5 (1) B [因为 $x > 0, y > 0$, 且 $xy + 2x + y = 2$,

所以 $y = \frac{2-2x}{x+1}$, 其中 $0 < x < 1$,

$$\text{则 } 2x + y = 2x + \frac{2-2x}{x+1} = 2(x+1) + \frac{-2(x+1)+4}{x+1} - 2$$

$$= 2(x+1) + \frac{4}{x+1} - 4 \geq 4\sqrt{2} - 4,$$

当且仅当 $2(x+1) = \frac{4}{x+1}$, 即 $x = \sqrt{2} - 1$ 时取等号,

所以 $2x + y$ 的最小值为 $4\sqrt{2} - 4$.

故选 B.]

(2) 解: 设 $x - 1 = t (t > 0)$, $\therefore x = t + 1$.

$$\therefore y = \frac{(t+1)^2 + 2(t+1)}{t} = \frac{t^2 + 4t + 3}{t} = t + \frac{3}{t} + 4$$

$$\geq 2\sqrt{t \cdot \frac{3}{t}} + 4 = 2\sqrt{3} + 4.$$

当且仅当 $t = \frac{3}{t}$, 即 $t = \sqrt{3}, x = \sqrt{3} + 1$ 时, y 取得最小值 $2\sqrt{3} + 4$.

微点突破 2

典例 6 ACD [对于 A, 由基本不等式可得 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$,

当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时等号成立, A 正确; 对于 B, 由

$$\frac{2}{\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{2a+b}} \leq \frac{(a+2b) + (2a+b)}{2} = \frac{3(a+b)}{2} = \frac{3}{2}, \text{ 得}$$

$$\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{2a+b} \geq \frac{4}{3}, \text{ 当且仅当 } a+2b=2a+b, \text{ 即 } a=b=\frac{1}{2}$$

时等号成立, B 错误; 对于 C, 由 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$, 得

$a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立, C 正确; 对于

D, 由 $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\frac{a+b}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, 得 $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2}$, 当且仅当

$a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立, D 正确. 故选 ACD.]

随堂·对点检测

1. B [因为正实数 a, b 满足 $ab = 100$,

$$\text{则 } \frac{1}{a} + \frac{4}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{4}{b}} = \frac{4}{\sqrt{ab}} = \frac{2}{5}, \text{ 当且仅当 } \frac{1}{a} = \frac{4}{b}, \text{ 即}$$

$a = 5, b = 20$ 时, 等号成立.

故选 B.]

2. C [因为 $x > 0$,

$$\text{所以 } \frac{4}{1+x} + x = \frac{4}{1+x} + x + 1 - 1 \geq 2\sqrt{\frac{4(x+1)}{1+x}} - 1 = 3,$$

当且仅当 $x+1 = \frac{4}{x+1}$, 即 $x = 1$ 时等号成立,

故 $\frac{4}{1+x} + x$ 的最小值是 3. 故选 C.]

3. B [① $\because a, b$ 为正实数, $\therefore \frac{b}{a}, \frac{a}{b}$ 为正实数, 符合基本不等式

的条件, 故①的推导正确.

② $\because a \in \mathbf{R}, a \neq 0$, 不符合基本不等式的条件,

$\therefore \frac{4}{a} + a \geq 2\sqrt{\frac{4}{a} \cdot a} = 4$ 是错误的.

③ 由 $xy < 0$, 得 $\frac{x}{y}, \frac{y}{x}$ 均为负数, 但在推导过程中将 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

整体提出负号后, $\left(-\frac{x}{y}\right), \left(-\frac{y}{x}\right)$ 均变为正数, 符合基本不等式的条件, 故③正确.]

4. B [因为实数 x, y 满足 $3xy + y^2 = 1, y > 0$,

$$\text{所以 } x = \frac{1-y^2}{3y},$$

$$\text{则 } 2x + y = \frac{2-2y^2}{3y} + y = \frac{2}{3y} + \frac{y}{3} \geq 2\sqrt{\frac{2}{3y} \cdot \frac{y}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

当且仅当 $\frac{2}{3y} = \frac{y}{3}$, 即 $y = \sqrt{2}$ 时, 等号成立,

所以 $2x + y$ 的最小值是 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.]

*** 第 5 课时 基本不等式的综合应用(进阶课)**

类型一

典例 1 C [因为 $x > 0, y > 0$, 且 $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$, 所以 $x + 2 +$

$$y = (x + 2 + y) \cdot \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y}\right) \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \left(2 + \frac{y}{x+2} +$$

$$\frac{x+2}{y}\right) \geq \frac{3}{2} \left(2 + 2\sqrt{\frac{y}{x+2} \cdot \frac{x+2}{y}}\right) = 6,$$

当且仅当 $x+2 = y$, 即 $y = 3, x = 1$ 时取等号,

所以 $x + y$ 的最小值为 4,

若 $x + y > m^2 + 3m$ 恒成立, 则 $4 > m^2 + 3m$,

解得 $-4 < m < 1$.

故选 C.]

多维变迁

A [由正实数 x, y 满足 $2x+3y-xy=0$, 得 $\frac{2}{y}+\frac{3}{x}=1$,
 则 $3x+2y=(3x+2y)\left(\frac{2}{y}+\frac{3}{x}\right)=\frac{6x}{y}+9+4+\frac{6y}{x}\geq 13+2\sqrt{\frac{6x}{y}\cdot\frac{6y}{x}}=25$,
 当且仅当 $\frac{6x}{y}=\frac{6y}{x}$, 且 $\frac{2}{y}+\frac{3}{x}=1$, 即 $x=y=5$ 时, 等号成立,
 则 $t\leq 25$.
 故实数 t 的取值范围是 $(-\infty, 25]$.
 故选 A.]

类型二

典例 2 解: (1) 由题意, 当 $v=100$ (千米/时) 时, $y=1$ (万辆/时),
 $\therefore 1=\frac{184\times 100}{100^2+20\times 100+1\ 280l}$,
 $\therefore l=5$ (米). $\therefore$ 该车型的平均车长为 5 米.
 (2) 由 (1) 知, $y=\frac{184v}{v^2+20v+6\ 400}$ ($0<v\leq 120$).
 $\therefore v>0, \therefore y=\frac{184v}{v^2+20v+6\ 400}=\frac{184}{v+\frac{6\ 400}{v}+20}$
 $\leq \frac{184}{2\sqrt{v\cdot\frac{6\ 400}{v}}+20}$
 $=\frac{46}{45}$,
 当且仅当 $v=\frac{6\ 400}{v}$,
 即 $v=80$ 千米/时时取等号.
 故当汽车的平均速度为 80 千米/时时, 车流量 y 达到最大值.

多维变迁

1. B [任取其中两次加油, 假设第一次的油价为 m 元/升, 第二次的油价为 n 元/升, 第一种方案的均价为 $\frac{30m+30n}{60}=\frac{m+n}{2}\geq \sqrt{mn}$; 第二种方案的均价为 $\frac{400}{\frac{200}{m}+\frac{200}{n}}=\frac{2mn}{m+n}\leq \sqrt{mn}$. 所以无论油价如何变化, 第二种都更划算.]
2. 4 4 [设矩形的长为 x cm, 宽为 y cm,
 则 $x+y=8$,
 其面积 $S=xy\leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2=16$,
 当且仅当 $x=y=4$ 时等号成立.]

类型三

典例 3 B [依题意, 二次函数 $f(x)=ax^2-2\sqrt{2}x+2b$ ($a>0$) 的图象与 x 轴仅有一个交点,
 令 $ax^2-2\sqrt{2}x+2b=0$,
 所以 $\Delta=(-2\sqrt{2})^2-4a\cdot 2b=0$,
 所以 $ab=1$.
 因为 $a>0$, 所以 $b>0$,
 所以 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{b}}=2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{2}{a}=\frac{1}{b}$, 即 $a=\sqrt{2}, b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立.]

多维变迁

B [由题知, 圆心 $(1, 2)$ 在直线 $ax+by-2=0$ 上,
 $\therefore a+2b=2$.
 又 $a>0, b>0, \therefore 2=a+2b\geq 2\sqrt{2ab}$,
 $\therefore ab\leq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $a=2b$, 且 $a+2b=2$, 即 $a=1, b=\frac{1}{2}$ 时
 等号成立, $\therefore ab$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$.]

教材拓展 1

典例 4 解: 由于 $a, b, c\in\mathbf{R}_+$, 且 $a+b+c=1$,
 所以 $0<a<1, 0<b<1, 0<c<1$, 所以 $(1-a)\cdot(1-b)(1-c)\leq$
 $\left[\frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3}\right]^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$, 当且仅当 $1-a=$
 $1-b=1-c$,
 即 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时, 原式取得最大值 $\frac{8}{27}$.

母题探究

解: $\therefore a, b, c$ 均属于正实数, $a+b+c=1$,
 $\therefore 3\sqrt[3]{abc}\leq a+b+c=1, \therefore \sqrt[3]{abc}\leq \frac{1}{3}$,
 $\therefore \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\geq 3, \therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\geq 9$,
 当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时, 等号成立.
 $\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的最小值为 9.

第 6 课时 一元二次方程、不等式

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 $\{x|x<x_1 \text{ 或 } x>x_2\}$ $\{x|x_1<x<x_2\}$ $\emptyset$ $\emptyset$

知识点 2 (1) $f(x)g(x)>0$ (<0)

(2) $f(x)g(x)\geq 0$ (≤ 0) 且 $g(x)\neq 0$

知识点 3 $(-\infty, -a)\cup(a, +\infty)$ $(-a, a)$

链教材·夯基固本

1. $(-\infty, -1]\cup\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ [由 $-2x^2+x\leq -3$ 可得 $2x^2-x-3\geq 0$,
 即 $(2x-3)(x+1)\geq 0$, 得 $x\leq -1$ 或 $x\geq \frac{3}{2}$,
 故不等式的解集为 $(-\infty, -1]\cup\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.]
2. R [已知 $A=\{x|x^2-16<0\}=\{x|-4<x<4\}$, $B=\{x|x^2-4x+3>0\}=\{x|x<1 \text{ 或 } x>3\}$, 则 $A\cup B=\mathbf{R}$.]
3. -12 -1 [$\therefore$ 关于 x 的一元二次不等式 $ax^2+bx+1>0$ 的解集为 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$,
 $\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+1=0$ 的两根为 $-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, 且 $a<0$.
 $\therefore \begin{cases} -\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=-\frac{b}{a}, \\ -\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{a}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-12, \\ b=-1. \end{cases}$
4. $(-3, 0)$ [由题意知
 $\begin{cases} k<0, \\ \Delta=k^2-4\times 2k\times\left(-\frac{3}{8}\right)<0, \end{cases}$ 解得 $-3<k<0$.]

考点一

典例 1 ABD [因为方程 $x^2+x-2=0$ 的解为 $x_1=1, x_2=-2$, 所以不等式 $x^2+x-2>0$ 的解集为 $\{x|x<-2, \text{或 } x>1\}$, 故 A 正确;

因为 $\frac{2x+1}{x-2}-1\leq 0$, 即 $\frac{x+3}{x-2}\leq 0$, 即 $(x+3)\cdot(x-2)\leq 0(x-2\neq 0)$, 解得 $-3\leq x<2$, 所以不等式的解集为 $\{x|-3\leq x<2\}$, 故 B 正确;

由 $|x-2|\geq 1$, 可得 $x-2\leq -1$ 或 $x-2\geq 1$, 解得 $x\leq 1$ 或 $x\geq 3$, 所以不等式的解集为 $\{x|x\leq 1, \text{或 } x\geq 3\}$, 故 C 错误;

由 $|x-1|<1$, 可得 $-1<x-1<1$, 解得 $0<x<2$, 由 $\frac{x+4}{x-5}<0$, 可得 $-4<x<5$, 因此, “ $|x-1|<1$ ”是“ $\frac{x+4}{x-5}<0$ ”的充分不必要条件, 故 D 正确. 故选 ABD.]

考点二

典例 2 解: 原不等式可化为 $ax^2+(a-2)x-2\geq 0$.

因为 $a<0$, 所以原不等式化为 $\left(x-\frac{2}{a}\right)\cdot(x+1)\leq 0$.

当 $\frac{2}{a}>-1$, 即 $a<-2$ 时, 解得 $-1\leq x\leq \frac{2}{a}$;

当 $\frac{2}{a}=-1$, 即 $a=-2$ 时, 解得 $x=-1$;

当 $\frac{2}{a}<-1$, 即 $-2<a<0$ 时, 解得 $\frac{2}{a}\leq x\leq -1$.

综上所述, 当 $-2<a<0$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x\left|\frac{2}{a}\leq x\leq -1\right.\right\}$;

当 $a=-2$ 时, 不等式的解集为 $\{-1\}$;

当 $a<-2$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x\left|-1\leq x\leq \frac{2}{a}\right.\right\}$.

母题探究

解: 第 1 步 看二次项系数: 二次项系数含参, 则需要分系数为 0、正、负三种情况讨论.

当 $a=0$ 时, 原不等式可化为 $x+1\leq 0$, 解得 $x\leq -1$.

第 2 步 因式分解: 看含参二次不等式能否因式分解.

当 $a\neq 0$ 时, 不等式 $ax^2-2\geq 2x-ax$ 可化为 $(ax-2)\cdot(x+1)\geq 0$.

第 3 步 能因式分解则比较根的大小, 不能则利用 Δ : 若能通过因式分解求出根, 就比较两根大小, 若不能使用因式分解求根, 就应用判别式判断根的情况, 并求根.

方程 $ax^2-2=2x-ax(a\neq 0)$ 的两根为 $x_1=-1, x_2=\frac{2}{a}$.

当 $a>0$ 时, 原不等式可化为 $\left(x-\frac{2}{a}\right)(x+1)\geq 0$,

解得 $x\geq \frac{2}{a}$ 或 $x\leq -1$.

当 $a<0$ 时, 原不等式化为 $\left(x-\frac{2}{a}\right)(x+1)\leq 0$.

当 $\frac{2}{a}>-1$, 即 $a<-2$ 时, 解得 $-1\leq x\leq \frac{2}{a}$;

当 $\frac{2}{a}=-1$, 即 $a=-2$ 时, 解得 $x=-1$;

当 $\frac{2}{a}<-1$, 即 $-2<a<0$ 时, 解得 $\frac{2}{a}\leq x\leq -1$.

第 4 步 写解集: 在参数的不同取值范围下, 分别写出不等式对应的解集.

综上所述, 当 $a=0$ 时, 不等式的解集为 $\{x|x\leq -1\}$;

当 $a>0$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x\left|x\geq \frac{2}{a}, \text{或 } x\leq -1\right.\right\}$;

当 $-2<a<0$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x\left|\frac{2}{a}\leq x\leq -1\right.\right\}$;

当 $a=-2$ 时, 不等式的解集为 $\{-1\}$;

当 $a<-2$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x\left|-1\leq x\leq \frac{2}{a}\right.\right\}$.

考点三

典例 3 解: 由不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|2<x<3\}$

可知 $a<0$, 且 2 和 3 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根,

由根与系数的关系可知 $\begin{cases} -\frac{b}{a}=2+3=5, \\ \frac{c}{a}=2\times 3=6. \end{cases}$

故 $\frac{b}{c}=-\frac{5}{6}$,

又由 $a<0$ 知 $c<0$, 故不等式 $cx^2+bx+a<0$,

即 $x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}>0$, 即 $x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}>0$,

解得 $x<\frac{1}{3}$ 或 $x>\frac{1}{2}$, 所以不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集为

$\left\{x\left|x<\frac{1}{3}, \text{或 } x>\frac{1}{2}\right.\right\}$.

母题探究

解: 法一: 由 $ax^2+bx+c\geq 0$ 的解集为 $\left\{x\left|-\frac{1}{3}\leq x\leq 2\right.\right\}$, 知

$a<0$, 且 $-\frac{1}{3}, 2$ 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根,

$\therefore \left(-\frac{1}{3}\right)\times 2=\frac{c}{a}<0, -\frac{1}{3}+2=-\frac{b}{a}$.

$\therefore b=-\frac{5}{3}a, c=-\frac{2}{3}a$,

$\therefore$ 不等式 $cx^2+bx+a<0$ 变为 $\left(-\frac{2}{3}a\right)x^2+\left(-\frac{5}{3}a\right)x+a<0$,

即 $2ax^2+5ax-3a>0$.

又 $\because a<0, \therefore 2x^2+5x-3<0$,

故所求不等式的解集为 $\left\{x\left|-3<x<\frac{1}{2}\right.\right\}$.

法二: 由已知得 $a<0$ 且 $-\frac{1}{3}+2=-\frac{b}{a}, \left(-\frac{1}{3}\right)\times 2=\frac{c}{a}$,

则 $c>0$,

设方程 $cx^2+bx+a=0$ 的两根分别为 x_1, x_2 ,

则 $x_1+x_2=-\frac{b}{c}, x_1x_2=\frac{a}{c}$,

其中 $\frac{a}{c}=\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)\times 2}=-\frac{3}{2}$,

$-\frac{b}{c}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-\frac{1}{3}+2}{\left(-\frac{1}{3}\right)\times 2}=-\frac{5}{2}$,

$\therefore x_1=-3, x_2=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集为 $\left\{x\left|-3<x<\frac{1}{2}\right.\right\}$.

微点突破 3

典例 4 (1)D (2)C (3) $[-1, 0] \cup [\frac{5}{3}, 4]$ [(1)当 $a=2$ 时,

不等式 $(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$ 可化为 $-4<0$, 恒成立;
当 $a \neq 2$ 时, 要使关于 x 的不等式 $(a-2) \cdot x^2+2(a-2)x-4<0$ 对一切实数 x 恒成立,

只需 $\begin{cases} a<2, \\ 4(a-2)^2-4(a-2) \times (-4)<0, \end{cases}$

解得 $-2<a<2$. 故 $-2<a \leq 2$. 故选 D.

(2)(分离变量法): $f(x)=x^2-2ax+1 \geq 0$ 对任意 $x \in (0, 2]$

恒成立, 即 $2a \leq x + \frac{1}{x}$ 在 $x \in (0, 2]$ 上恒成立. 因为 $x + \frac{1}{x} \geq$

2, 当且仅当 $x=1$ 时 $x + \frac{1}{x}$ 取最小值 2, 所以 $2a \leq 2$, 即 $a \leq 1$.

故选 C.

(3)(变更主元法): 把不等式的左端看成关于 a 的函数, 令 $g(a)=ax^2-2ax+x+3-a=(x^2-2x-1)a+x+3 \geq 0$, 则

由 $g(a) \geq 0$ 对于 $\forall a \in [-1, 3]$ 恒成立, 得 $\begin{cases} g(-1) \geq 0, \\ g(3) \geq 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} -x^2+3x+4 \geq 0, \\ 3x^2-5x \geq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 4, \\ x \geq \frac{5}{3} \text{ 或 } x \leq 0, \end{cases}$

所以实数 x 的取值范围为 $[-1, 0] \cup [\frac{5}{3}, 4]$.

随堂·对点检测

1. B [由 $\frac{4}{x+2} \geq 1$, 可得 $\frac{4}{x+2} - 1 \geq 0$, 即 $\frac{-x+2}{x+2} \geq 0$, 即

$\frac{x-2}{x+2} \leq 0$,

可化为 $(x-2)(x+2) \leq 0$, 且 $x+2 \neq 0$,

解得 $-2 < x \leq 2$, 所以 $A = \{x | -2 < x \leq 2\}$,

不等式 $x^2-3x < 0$ 可化为 $x(x-3) < 0$,

解得 $0 < x < 3$, 所以 $B = \{x | 0 < x < 3\}$,

所以 $A \cup B = \{x | -2 < x < 3\}$.

故选 B.]

2. CD [由题意可得 1 和 5 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根, 且 $a < 0$,

由根与系数的关系可得 $1+5 = -\frac{b}{a}$, $1 \times 5 = \frac{c}{a}$, 得 $b = -6a$, $c = 5a$.

对于 A, 因为 $a < 0$, 故 A 错误;

对于 B, $a+b+c = a-6a+5a=0$, 故 B 错误;

对于 C, 不等式 $bx+c > 0$, 即 $-6ax+5a > 0$, 即 $6x-5 > 0$, 得 $x > \frac{5}{6}$, 所以不等式 $bx+c > 0$ 的解集是 $\{x | x > \frac{5}{6}\}$, 故 C

正确;

对于 D, 由不等式 $cx^2-bx+a < 0$,

得 $a(5x^2+6x+1) < 0$, 即 $5x^2+6x+1 > 0$,

则 $(5x+1)(x+1) > 0$, 解得 $x > -\frac{1}{5}$ 或 $x < -1$,

即解集为 $\{x | x > -\frac{1}{5} \text{ 或 } x < -1\}$, 故 D 正确. 故选 CD.]

3. 解: 不等式 $ax^2+3x+2 > -ax-1$ 可化为 $ax^2+(a+3)x+3 > 0$, 即 $(ax+3)(x+1) > 0$.

因为 $a > 0$,

所以当 $-\frac{3}{a} < -1$, 即 $0 < a < 3$ 时, 原不等式的解集

为 $\{x | x > -1, \text{ 或 } x < -\frac{3}{a}\}$;

当 $-\frac{3}{a} = -1$, 即 $a=3$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x \neq -1\}$;

当 $-\frac{3}{a} > -1$, 即 $a > 3$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x < -1, \text{ 或 } x > -\frac{3}{a}\}$.

第二章 函数

第 7 课时 函数的概念及其表示

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 实数集 任意一个数 x 唯一 x

知识点 2 定义域 对应关系

知识点 3 解析法 图象法 列表法

知识点 4 (2)并集

链教材·夯基固本

1. BC [对于 A, 当 $x=1.5$ 时, y 没有值与之对应, 故 A 错误;

对于 B, C, 集合 M 中的每一个 x , 集合 N 中都有唯一的 y 与之对应, 故 B, C 正确.

对于 D, 当 $x=1.5$ 时, y 有两个值与之对应, 故 D 错误. 故选 BC.]

2. B [函数 $y=(\sqrt{x})^2=x(x \geq 0)$ 与 $y=x$ 不是同一个函数, 选项 A 错误;

$u=\sqrt[3]{v^3}=v$ 与 $y=x$ 是同一个函数, 选项 B 正确;

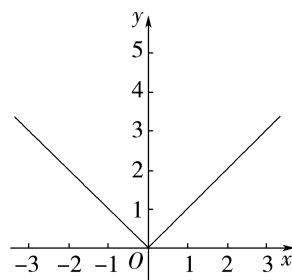
$y=\sqrt{x^2}=|x|$ 与 $y=x$ 不是同一个函数, 选项 C 错误;

$m=\frac{n^2}{n}=n(n \neq 0)$ 与 $y=x$ 不是同一个函数, 选项 D 错误. 故选 B.]

3. 解: 由绝对值的概念, 我们有

$y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$

所以函数 $y=|x|$ 的图象如图所示.



4. 26 [由题意得 $f(1)=5$, $f(-3)=21$,

所以 $f(1)+f(-3)=26$.]

5. $[-3, 0) \cup (0, +\infty)$ [由 $\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x \geq -3, \\ x \neq 0, \end{cases}$

故函数的定义域为 $[-3, 0) \cup (0, +\infty)$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1)ABD (2)C [(1)对于 A, 要使函数 $f(x)=$

$\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{x+2}$ 有意义,

则 $\begin{cases} x^2-1 \geq 0, \\ x+2 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $x < -2$ 或 $-2 < x \leq -1$ 或 $x \geq 1$.

所以函数的定义域为 $(-\infty, -2) \cup (-2, -1] \cup [1, +\infty)$, A 正确;

对于 B, 根据函数的定义可知, 函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $x=2$ 至多有一个交点, B 正确;

对于 C, 函数 $y=\frac{x^2-1}{x+1}$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, 函数 $y=x-1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 故这两个函数不是同一个函数, C 错误;

对于 D, 函数中一个 x 值只能对应一个 y 值, 如果 y 值不同, 则 x 的值一定不同, D 正确. 故选 ABD.

(2) 因为函数 $y=f(x-1)$ 的定义域是 $[-1, 2]$,

所以 $-2 \leq x-1 \leq 1$,

则 $y=f(1-3x)$ 中, $-2 \leq 1-3x \leq 1$,

解得 $0 \leq x \leq 1$,

故 $y=f(1-3x)$ 的定义域为 $[0, 1]$.

故选 C.]

考点二

典例 2 解: (1) 换元法: 令 $\frac{2}{x}+1=t (t>1)$, 则 $x=\frac{2}{t-1}$,

$$\therefore f(t)=\ln \frac{2}{t-1},$$

$$\therefore f(x)=\ln \frac{2}{x-1} (x>1).$$

(2) 配凑法: $\because f\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2$,

令 $t=x^2+\frac{1}{x^2} \geq 2 \sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}}=2$, 当且仅当 $x=\pm 1$ 时取等号,

$$\therefore f(t)=t^2-2 (t \geq 2),$$

$$\therefore f(x)=x^2-2 (x \geq 2).$$

(3) 待定系数法: 设 $f(x)=ax+b (a \neq 0)$, 则 $3f(x+1)-2f(x-1)=3ax+3a+3b-2ax+2a-2b=ax+b+5a=2x+17$, $\therefore a=2, b=7$, $\therefore f(x)=2x+7$.

(4) 解方程组法: $\because 2f(x)+f(-x)=3x$, ①

$\therefore$ 将 x 用 $-x$ 替换得 $2f(-x)+f(x)=-3x$, ②

由 ①② 解得 $f(x)=3x$.

考点三

典例 3 (1) BC (2) D [(1) 函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & -2 \leq x < 1, \\ -x+2, & x \geq 1 \end{cases}$ 的

定义域是 $[-2, +\infty)$, 故 A 错误;

当 $-2 \leq x < 1$ 时, $f(x)=x^2$, 值域为 $[0, 4]$, 当 $x \geq 1$ 时, $f(x)=-x+2$, 值域为 $(-\infty, 1]$, 故 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 4]$, 故 B 正确;

当 $x \geq 1$ 时, 令 $f(x)=-x+2=2$, 无解, 当 $-2 \leq x < 1$ 时, 令 $f(x)=x^2=2$, 解得 $x=-\sqrt{2}$, 故 C 正确;

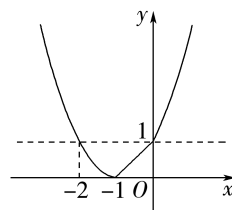
当 $-2 \leq x < 1$ 时, 令 $f(x)=x^2 < 1$, 解得 $x \in (-1, 1)$, 当 $x \geq 1$ 时, 令 $f(x)=-x+2 < 1$, 解得 $x \in (1, +\infty)$, 故 $f(x) < 1$ 的解集为 $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$, 故 D 错误. 故选 BC.

(2) 令 $f(x) \geq g(x)$, 即 $x+1 \geq (x+1)^2$, 解得 $-1 \leq x \leq 0$;

令 $f(x) < g(x)$, 即 $x+1 < (x+1)^2$, 解得 $x < -1$ 或 $x > 0$,

所以 $F(x)=\max\{f(x), g(x)\}=\begin{cases} (x+1)^2, & x < -1, \\ x+1, & -1 \leq x \leq 0, \\ (x+1)^2, & x > 0, \end{cases}$

$F(x)$ 的图象如图所示,



又 $F(0)=F(-2)=1, F(-1)=0$,

要使函数 $F(x)$ 在区间 $[m, n]$ 内的值域为 $[0, 1]$,

当 $n=0$ 时, $-2 \leq m \leq -1$;

当 $m=-2$ 时, $-1 \leq n \leq 0$,

则当 $n=0, m=-2$ 时, $n-m$ 取得最大值 2. 故选 D.]

母题探究

1. 0 或 2 [当 $-2 \leq a < 1$ 时, 由 $a^2=0$, 得 $a=0$; 当 $a \geq 1$ 时, 由 $-a+2=0$, 解得 $a=2$, 故实数 a 的值为 0 或 2.]

2. 1 [$f(f(3))=f(-1)=1$.]

随堂·对点检测

1. B [函数 $f(x)=\begin{cases} 2^x, & x \leq \pi, \\ \log_2 x, & x > \pi, \end{cases}$

则 $f(f(2))=f(2^2)=f(4)=\log_2 4=2$.

故选 B.]

2. C [对于 A, $f(x)=x^2, x \in \mathbf{R}, g(x)=(x+1)^2, x \in \mathbf{R}$, 两函数的对应关系不同, 不是同一个函数;

对于 B, $f(x)=\sqrt{-x^3}=-x\sqrt{-x}, x \in (-\infty, 0], g(x)=x\sqrt{-x}, x \in (-\infty, 0]$, 两函数的对应关系不同, 不是同一个函数;

对于 C, $f(x)=\frac{x}{x}=1, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), g(x)=\frac{1}{x_0}=1, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 两函数的定义域相同, 对应

关系也相同, 是同一个函数;

对于 D, $f(x)=\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-9}, x \in [3, +\infty), g(x)=\sqrt{x^2-9}, x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, 两函数的定义域不同, 不是同一个函数.

故选 C.]

3. C [因为 $x^2-1 \geq -1$, 所以 $f(x^2-1)=x^4-1=(x^2-1)^2+2(x^2-1)$,

所以 $f(x)=x^2+2x$, 其中 $x \geq -1$.

故选 C.]

4. $[-5, 1) \cup (1, +\infty)$ [由题意可得, $\begin{cases} x+5 \geq 0, \\ x-1 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $x \geq -5$

且 $x \neq 1$,

故函数的定义域为 $[-5, 1) \cup (1, +\infty)$.]

第 8 课时 函数的单调性

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 $f(x_1) < f(x_2)$ $f(x_1) > f(x_2)$

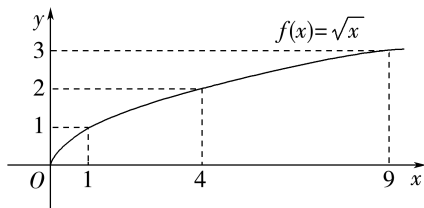
知识点 2 单调递增 单调递减 区间 I

链教材·夯基固本

1. ABD [对于 A, 对任意 $x_1 < x_2, f(x_1)-f(x_2)=-2x_1+1-(-2x_2+1)=2(x_2-x_1) > 0, \therefore f(x_1) > f(x_2), \therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数, A 正确; 对于 B, 对任意 $0 < x_1 < x_2, f(x_1)-f(x_2)=x_1^2+1-(x_2^2+1)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2), \therefore 0 < x_1 < x_2,$

$\therefore x_1 + x_2 > 0, x_1 - x_2 < 0, \therefore f(x_1) - f(x_2) < 0, \therefore f(x_1) < f(x_2), \therefore f(x) = x^2 + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, B 正确; 对于 C, 单调区间表示错误, 两个单调区间不能用并集符号连接, C 错误; 对于 D, 对任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ 且 $x_1 < x_2$, $f(x_1) - f(x_2) = 1 - \frac{1}{x_1} - 1 + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$, $\therefore x_1 < x_2 < 0$, $\therefore x_1 - x_2 < 0, x_1 x_2 > 0, \therefore f(x_1) - f(x_2) < 0, \therefore$ 函数 $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, D 正确. 故选 ABD.]

2. 解: 画出函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 的图象(如图). 由图象可以看出, 函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在定义域 $[0, +\infty)$ 上是增函数.



$\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $x_1 - x_2 < 0$.

$$\text{所以 } f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}.$$

由 $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$, 可知 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$.

所以函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在定义域 $[0, +\infty)$ 上是增函数.

3. B [由题图知, 该函数的单调递增区间为 $[-1, 2]$ 和 $[4, 5]$, 故选 B.]

4. D [函数 $f(x) = \sqrt{3+2x-x^2}$ 的定义域需要满足 $3+2x-x^2 \geq 0$, 解得 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 3]$.

因为 $y = 3+2x-x^2$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增, 所以 $f(x) = \sqrt{3+2x-x^2}$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增.]

考点深研·题型突破

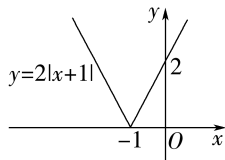
考点一

典例 1 ABD [对于 A, $\because y = x$ 与 $y = -\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单

调递增, $\therefore y = x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 A 正确;

对于 B, 两增函数的和为增函数, 故 B 正确;

对于 C, 作出函数 $y = 2|x+1|$ 的图象, 如图所示,



由图象可知, 函数 $y = 2|x+1|$ 在区间 $(-\infty, -1]$ 上单调递减, 故 C 错误;

由判断复合函数的单调性的方法“同增异减”可得函数 $y = \lg(x+1)$ 是定义域为 $(-1, +\infty)$ 上的增函数, 故 D 正确. 故选 ABD.]

考点二

典例 2 解: 函数 $f(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增.

证明如下: $f(x) = \frac{x-3}{x+2} = \frac{x+2-5}{x+2} = 1 - \frac{5}{x+2}, \forall x_1, x_2 \in (-2, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_1) - f(x_2) = 1 - \frac{5}{x_1+2} - \left(1 - \frac{5}{x_2+2}\right) = \frac{5}{x_2+2} - \frac{5}{x_1+2} = \frac{5(x_1 - x_2)}{(x_1+2)(x_2+2)}$. 又 $x_1 < x_2$, 且 $x_1, x_2 \in (-2, +\infty)$, 所以 $x_1+2 > 0, x_2+2 > 0, x_1 - x_2 < 0$, 所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$, 故函数 $f(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增.

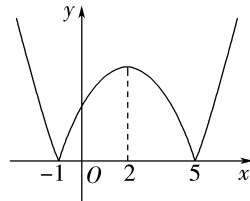
考点三

典例 3 $[-1, 2], [5, +\infty)$ [函数 $y = |-x^2 + 4x + 5|$ =

$$\begin{cases} -x^2 + 4x + 5, & x \in (-1, 5), \\ x^2 - 4x - 5, & x \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty), \end{cases}$$

由 $|-x^2 + 4x + 5| = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 5$,

函数 $y = |-x^2 + 4x + 5|$ 的图象如图所示,



由图可知, 函数 $y = |-x^2 + 4x + 5|$ 的单调递增区间为 $[-1, 2], [5, +\infty)$.]

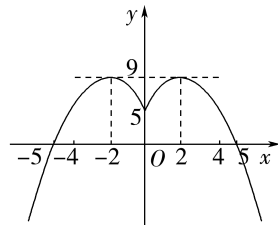
母题探究

1. $[2, 5]$ [函数 $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$ 的定义域需要满足 $-x^2 + 4x + 5 \geq 0$, 解得 $x \in [-1, 5]$, 因为 $t = -x^2 + 4x + 5$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$ 在 $[2, 5]$ 上单调递减.]

2. $(-\infty, -2]$ 和 $[0, 2]$ [$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + 5, & x \geq 0, \\ -x^2 - 4x + 5, & x < 0 \end{cases}$

$$\text{即 } f(x) = \begin{cases} -(x-2)^2 + 9, & x \geq 0, \\ -(x+2)^2 + 9, & x < 0. \end{cases}$$

画出函数的图象如图所示,



可知函数 $f(x) = -x^2 + 4|x| + 5$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -2]$ 和 $[0, 2]$.]

随堂·对点检测

1. C [$f(x) = x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

$f(x) = \frac{1}{2x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, $(0, +\infty)$ 上单调递减, 在定义域内不单调递减;

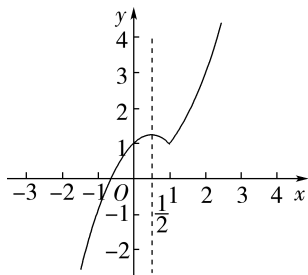
$f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在定义域内不单调递减;

函数 $t = 1 - 2x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数, $t \in \mathbf{R}$, 函数 $y = \sqrt[3]{t}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数,

所以函数 $f(x) = \sqrt[3]{1-2x}$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上为减函数. 故选 C.]

2. B [$g(x) = x|x-1| + 1 = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \geq 1, \\ -x^2 + x + 1, & x < 1, \end{cases}$

画出函数图象如图所示.



根据图象知函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $[\frac{1}{2}, 1]$. 故选 B.]

3. 证明: ①设 x_1 和 x_2 是区间 $(0, 1]$ 上任意两个实数, 且 $x_1 < x_2$,

$$k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 + \frac{1}{x_2} - (x_1 + \frac{1}{x_1})}{x_2 - x_1} = 1 - \frac{1}{x_1 x_2}.$$

由 $0 < x_1 < x_2 \leq 1$, 得 $0 < x_1 x_2 < 1$, $\frac{1}{x_1 x_2} > 1$,

于是 $k = 1 - \frac{1}{x_1 x_2} < 0$, $f(x_2) - f(x_1) < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上单调递减.

②设 x_1 和 x_2 是区间 $[1, +\infty)$ 上任意两个实数, 且 $x_1 < x_2$.

由 $x_2 > x_1 \geq 1$, 得 $x_1 x_2 > 1$, $\frac{1}{x_1 x_2} < 1$,

于是 $k = 1 - \frac{1}{x_1 x_2} > 0$, $f(x_2) - f(x_1) > 0$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增.

第9课时 函数的单调性的应用

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 $f(x) \leq M$ $f(x_0) = M$ $f(x) \geq M$ $f(x_0) = M$

链教材·夯基固本

1. $[\frac{1}{4}, 3]$ -15

2. $-\frac{2}{5}$ -2 [可判断函数 $f(x) = \frac{2}{1-x}$ 在区间 $[2, 6]$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\max} = f(6) = -\frac{2}{5}$, $f(x)_{\min} = f(2) = -2$.]

3. 17 2 [因为 $y = f(x) = x^2 + 1$ 在区间 $[1, 4]$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\max} = f(4) = 17$, $f(x)_{\min} = f(1) = 2$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 B [因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $f(-2) = f(2)$, $f(-\pi) = f(\pi)$. 又 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $2 < 3 < \pi$, 所以 $f(2) < f(3) < f(\pi)$, 所以 $f(-2) < f(3) < f(-\pi)$. 故选 B.]

考点二

典例 2 A [因为 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的减函数, 且 $f(x-1) < f(1-3x)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 1-3x < x-1, \\ -1 \leq 1-3x \leq 1, \end{cases} \text{ 则 } \frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3}.$$

故选 A.]

考点三

典例 3 C [由 $y = x$ 在 $[1, 4]$ 上单调递增,

且 $y = -\frac{2}{x}$ 在 $[1, 4]$ 上单调递增,

可得 $f(x) = x - \frac{2}{x} + 1$ 在 $[1, 4]$ 上单调递增,

$$\text{又 } f(1) = 0, f(4) = \frac{9}{2},$$

故 $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的值域为 $[0, \frac{9}{2}]$.]

母题探究

解: 由对勾函数的模型知 $g(x) = x + \frac{2}{x} + 1$

在 $[1, \sqrt{2}]$ 上单调递减, 在 $[\sqrt{2}, 4]$ 上单调递增,

$$\therefore g(x)_{\min} = g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 1.$$

$$\text{又 } g(1) = 4, g(4) = \frac{11}{2},$$

$$\therefore g(x)_{\max} = g(4) = \frac{11}{2},$$

$\therefore g(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的最小值为 $2\sqrt{2} + 1$, 最大值为 $\frac{11}{2}$.

考点四

典例 4 B [因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = -x^2 - 2ax - a$, 所以 $f(x) = -x^2 - 2ax - a$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 所以 $-\frac{-2a}{2 \times (-1)} = -a \geq 0$, 即 $a \leq 0$; 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x + \ln(x+1)$, 所以函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增. 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 $-a \leq f(0) = e^0 + \ln 1 = 1$, 即 $a \geq -1$.

综上, 实数 a 的取值范围是 $[-1, 0]$. 故选 B.]

考题探源

解: 要使此分段函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数, 需满

$$\text{足 } \begin{cases} -\frac{-a}{2 \times 1} \geq 0, \\ 0^2 - a \times 0 + 1 \geq -0 + 3a, \end{cases}$$

解得 $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$, 即实数 a 的取值范围是 $[0, \frac{1}{3}]$.

多维变迁

B [由 $y = -x^2 + ax - 3a$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 可知 $\frac{a}{2} \leq 1$, 即 $a \leq 2$, 由 $y = 2ax + 1$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 可得 $2a < 0$, 即 $a < 0$, 又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以 $2a + 1 \geq -1 - 2a$, 解得 $a \geq -\frac{1}{2}$.

故实数 a 的取值范围是 $[-\frac{1}{2}, 0)$.

故选 B.]

微点突破 4

典例 5 ACD [对于 A, 配方法: $y = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$,

由 $x \in [0, 3]$, 再结合函数的图象(如图 1 所示), 可得函数的值域为 $[2, 6]$;

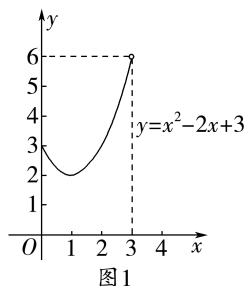


图1

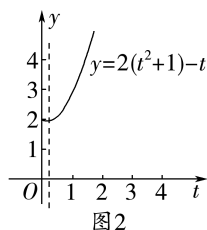


图2

对于 B, 分离常数法: $y = \frac{2x+1}{x-3} = \frac{2(x-3)+7}{x-3} = 2 + \frac{7}{x-3}$, 显然 $\frac{7}{x-3} \neq 0, y \neq 2$,

故函数的值域为 $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$;

对于 C, 换元法: 设 $t = \sqrt{x-1}$, 则 $x = t^2 + 1$, 且 $t \geq 0$,

$$\therefore y = 2(t^2 + 1) - t = 2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8},$$

由 $t \geq 0$, 再结合函数的图象(如图 2 所示), 可得函数的值域为 $\left[\frac{15}{8}, +\infty\right)$;

对于 D, 函数的定义域为 $[1, +\infty)$,

$\therefore y = \sqrt{x+1}$ 与 $y = \sqrt{x-1}$ 在 $[1, +\infty)$ 上均单调递增,

$\therefore y = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore$ 当 $x=1$ 时, $y_{\min} = \sqrt{2}$,

即函数的值域为 $[\sqrt{2}, +\infty)$.

故选 ACD.]

随堂·对点检测

1. B [易知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数,

又 $\pi > 3 > 2$, 故 $f(\pi) < f(3) < f(2)$, 故选 B.]

2. A [因为函数 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 且 $f(1-a) < f(a-3)$,

所以 $1-a < a-3$,

解得 $a > 2$.

故选 A.]

3. A [因为 $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$ 在 $[1, 4]$ 上单调递增, 所以 $M =$

$$f(4) = 2 - \frac{1}{16} = \frac{31}{16}, m = f(1) = 0, \text{ 因此 } M - m = \frac{31}{16}. \text{ 故}$$

选 A.]

4. $(-\infty, 0]$ [函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 4 = (x-a)^2 + 4 - a^2$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[a, +\infty)$, 依题意知, $[0, +\infty) \subseteq [a, +\infty)$, 所以 $a \leq 0$, 即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.]

第 10 课时 函数的奇偶性、周期性

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 $f(-x) = f(x)$ y 轴 $f(-x) = -f(x)$ 原点

知识点 2 (1) $f(x+T) = f(x)$ (2) 最小的正数 最小正数

链教材·夯基固本

1. AC [对于 A, 函数 $f(x) = x^2 - 1$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

因为对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $-x \in \mathbf{R}$,

$$\text{且 } f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x),$$

所以函数 $f(x) = x^2 - 1$ 是偶函数;

对于 B, 函数 $f(x) = 2x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

因为对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $-x \in \mathbf{R}$,

$$\text{且 } f(-x) = 2(-x) = -2x = -f(x),$$

所以函数 $f(x) = 2x$ 是奇函数;

对于 C, 函数 $f(x) = 2|x|$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

因为对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $-x \in \mathbf{R}$,

$$\text{且 } f(-x) = 2|-x| = 2|x| = f(x),$$

所以函数 $f(x) = 2|x|$ 是偶函数;

对于 D, 函数 $f(x) = (x-1)^2$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

$$\text{因为 } f(1) = 0, f(-1) = 4,$$

$$\text{所以 } f(1) \neq f(-1),$$

因此, 函数 $f(x) = (x-1)^2$ 不是偶函数.]

2. $(-2, 0) \cup (2, 5]$ [由题图可知, 当 $0 < x < 2$ 时, $f(x) > 0$; 当 $2 < x \leq 5$ 时, $f(x) < 0$, 又 $f(x)$ 是奇函数, $\therefore$ 当 $-2 < x < 0$ 时, $f(x) < 0$, 当 $-5 \leq x < -2$ 时, $f(x) > 0$.

综上, $f(x) < 0$ 的解集为 $(-2, 0) \cup (2, 5]$.]

3. 解: $\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 且 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 + 2x$,

$$\therefore f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) = x^2 - 2x.$$

$\therefore f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数,

$$\therefore f(-x) = -f(x) = x^2 - 2x,$$

$$\therefore \text{当 } x < 0 \text{ 时, } f(x) = -x^2 + 2x.$$

4. $\frac{1}{2}$ [$\therefore f(x)$ 的周期为 2,

$$\therefore f(2\ 027) = f(1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}.]$$

5. ABC [因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(x) + f(-x) = 0$, 且 $f(0) = 0$, A, B 正确;

因为 $f(-x) = -f(x)$,

所以 $f(x) \cdot f(-x) = -[f(x)]^2 \leq 0$, 当 $x = 0$ 时, 等号成立, C 正确;

当 $x = 0$ 时, $f(-x) = 0$, 此时 $\frac{f(x)}{f(-x)}$ 无意义, D 错误.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 解: (1) 函数的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 关于原点对称, 且对于定义域内的任意一个 x 都有 $f(-x) = (-x)^3 - \frac{1}{-x} = -\left(x^3 - \frac{1}{x}\right) = -f(x)$, 从而函数 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 函数 $f(x) = (1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 的定义域满足 $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$, 则

$$\begin{cases} (1+x)(1-x) \geq 0, \\ x \neq -1, \end{cases} \text{ 解得 } -1 < x \leq 1,$$

由于定义域不关于原点对称, 故 $f(x)$ 既不是奇函数, 也不是偶函数.

(3) $f(x)$ 的定义域为 $\{-1, 1\}$, 关于原点对称.

$$\text{又 } f(-1) = f(1) = 0, f(-1) = -f(1) = 0,$$

所以 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数.

(4) $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 关于原点对称, 当 $x > 0$ 时, $f(-x) = -(-x)^2 - 2 = -(x^2 + 2) = -f(x)$; 当 $x < 0$ 时, $f(-x) = (-x)^2 + 2 = -(-x^2 - 2) = -f(x)$; 当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$, 也满足 $f(-x) = -f(x)$, 故该函数为奇函数.

(5) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 关于原点对称.

$$f(-x) + f(x) = \log_2[-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}] + \log_2(\sqrt{x^2 + 1} + x)$$

$$= \log_2[(\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x)]$$

$$= \log_2 1 = 0,$$

$$\therefore f(-x) = -f(x),$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数.

考点二

典例 2 $(-\infty, 2)$ [因为 $f(x) = -2x - x^5$ 是单调递减的奇函数,

$$\text{又 } f(x-1) + f(5-3x) < 0,$$

$$\text{所以 } f(x-1) < -f(5-3x) = f(3x-5), \text{ 则 } x-1 > 3x-5,$$

$$\text{即 } x < 2,$$

所以不等式的解集为 $(-\infty, 2)$.]

母题探究

1. $-2x-x^5$ [当 $x < 0$ 时, $-x > 0$.

$$f(x) = -f(-x) = -[-2(-x) - (-x)^5] = -2x - x^5.]$$

2. -1 [因为函数 $f(x) = -2x - x^5 - b + 2$ 为 $[-7a, a+6]$ 上的奇函数,

所以 $-7a + a + 6 = 0$ 且 $f(0) = 0$, 所以 $a = 1$ 且 $b = 2$, 故 $a - b = -1$.]

多维变迁

1. **B** [根据题意, 函数 $y = f(x) - x^2$ 是奇函数, 则 $[f(4) - 16] + [f(-4) - 16] = 0$,

又由 $f(4) = 9$, 则 $f(-4) = 23$,

则 $g(-4) = f(-4) + 5 = 28$.

故选 B.]

2. **C** [由于 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(-x) = f(x)$ 恒成立,

不等式 $f(a-1) > f(2)$ 可以转化为 $f(|a-1|) > f(2)$.

函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 根据偶函数的对称性可知, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

所以 $|a-1| > 2$, 解得 $a < -1$ 或 $a > 3$.

故选 C.]

考点三

典例 3 **C** [根据题意可知, $f(x) = -f(x+2) = -[-f(x+4)] = f(x+4)$,

$\therefore f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,

$$f(2025) = f(1 + 506 \times 4) = f(1) = -f(3) = 1.$$

故选 C.]

多维变迁

(1) $x^2 - 6x + 8$ (2) 1 [(1) $\because f(x+2) = -f(x)$, $\therefore f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$.

$\therefore f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, 且 $f(x)$ 的最小正周期是 4.

当 $x \in [-2, 0]$ 时, $-x \in [0, 2]$, 由已知得

$$f(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2.$$

又 $f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(-x) = -f(x) = -2x - x^2$.

$$\therefore f(x) = x^2 + 2x.$$

又当 $x \in [2, 4]$ 时, $x-4 \in [-2, 0]$,

$$\therefore f(x-4) = (x-4)^2 + 2(x-4).$$

又 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, $\therefore f(x) = f(x-4) = (x-4)^2 + 2(x-4) = x^2 - 6x + 8$.

即当 $x \in [2, 4]$ 时, $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

(2) $\because f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 0, f(3) = -1$, 且 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,

$$\therefore f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = f(4) + f(5) + f(6) + f(7) = \dots = f(2020) + f(2021) + f(2022) + f(2023) = 0.$$

$$\therefore f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(2026) = f(0) + f(1) + f(2) = 1.]$$

考点四

典例 4 **A** [法一: 当 $x \in [-1, 0]$ 时, $-x+2 \in [2, 3]$, 所以当 $x \in [-1, 0]$ 时, $f(x) = f(-x) = f(-x+2) = 5-2(-x+2) = 1+2x$,

$$\text{所以 } f\left(-\frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}. \text{ 故选 A.}$$

法二: 由 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的偶函数可得,

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4} + 2\right) = f\left(\frac{11}{4}\right),$$

因为当 $2 \leq x \leq 3$ 时, $f(x) = 5-2x$,

$$\text{所以 } f\left(\frac{11}{4}\right) = 5 - 2 \times \frac{11}{4} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{即 } f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$$

故选 A.]

考题探源

1. 解: 图略, 函数解析式为 $f(x) = \begin{cases} x(1+x), & x \geq 0, \\ -x(x-1), & x < 0. \end{cases}$

$$2. \text{解: } f(3) = 0, f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

随堂·点对检测

1. **A** [$y = x^3$ 是奇函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 A 正确; 选项 B, C, D 是偶函数, 不正确. 故选 A.]

2. **B** [根据题意可知, $f(x+3) = \frac{1}{f(x)}$,

$$\text{则 } f(x+6) = \frac{1}{f(x+3)} = f(x),$$

所以函数 $f(x)$ 的一个周期为 6,

$$\text{所以 } f(2026) = f(337 \times 6 + 4) = f(4) = \frac{1}{3}.$$

故选 B.]

3. **D** [因为 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 所以 $f(x) = f(-x)$, 因为 $f(x) + f(x-2) = 0$, 所以 $f(3) + f(1) = 0$, $f(1) + f(-1) = 0$, 则 $f(1) + f(1) = 0$, 所以 $f(1) = 0$, 则 $f(3) = -f(1) = 0$, 所以 $9+3a+b=0$ ①. 由 $f(x) + f(x-2) = 0$, 得 $f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{5}{2}\right) = 0$, 所以 $f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$, 所以 $f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right)$, 所以 $\frac{9}{4} + \frac{3}{2}a + b = \frac{25}{4} + \frac{5}{2}a + b$, 解得 $a = -4$, 代入①, 得 $b = 3$. 故选 D.]

4. **A** [函数的定义域为 $(-1, 1)$,

因为 $f(x)$ 是奇函数,

$$\text{所以 } f(-x) = (-2x+a) \left| \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \right| = -(2x-a) \cdot$$

$$\left| -\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \right| = -(2x+a) \cdot \left| \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \right| = -f(x) \text{ 恒}$$

成立,

所以 $a = -a$, 即 $a = 0$.

故选 A.]

5. $\frac{1}{3}$ [$\because f(x) = ax^2 + bx + \frac{5}{27}$ 是定义在 $[a-1, 2a]$ 上的偶函数,

$$\therefore a-1+2a=0, \therefore a=-\frac{1}{3}, f(x) = \frac{1}{3}x^2 + bx + \frac{5}{27},$$

$$\text{又 } f(-x) = f(x), \therefore ax^2 + bx + \frac{5}{27} = a \cdot (-x)^2 + b \cdot$$

$$(-x) + \frac{5}{27}, \therefore b=0.$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{27}, x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right],$$

$$\therefore f(x)_{\max} = f\left(-\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{27} = \frac{1}{3}.]$$

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点1 (1)原点 y 轴 (2) $x=a$ ($a,0$)

知识点2 (2)($a,0$)

知识点3 (1) y 轴 (2) x 轴 (3)原点

$$(4)x = \frac{a+b}{2}$$

链教材·夯基固本

1. C [因为 $f(x) = x^3 + x$ 为奇函数,

所以函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称, 故选 C.]

2. (1,0) [将 $y = \frac{1}{x}$ 的图象向右平移 1 个单位长度, 得到 $y =$

$\frac{1}{x-1}$ 的图象, 所以 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 的图象的对称中心是 (1,

0).]

3. B [因为 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$, 所以函数 $y = 3^x$ 与 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的

图象关于 y 轴对称.

故选 B.]

考点深研·题型突破

考点一

考向1 典例1 AB [由于 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 则 $f(1+x) = f(1-x)$, 所以 $f(x+1)$ 为偶函数, 故 A, B 选项正确, C 选项错误; 如 $f(x) = (x-1)^2 + 1$, 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 但 $f(1) = 1 \neq 0$, 故 D 选项错误. 故选 AB.]

考向2 典例2 ABC [对于 A, $f(x) = \frac{2x-1}{x+2} =$

$\frac{2(x+2)-5}{x+2} = 2 - \frac{5}{x+2}$, 其图象可以由 $y = -\frac{5}{x}$ 的图象向左

平移 2 个单位长度, 再向上平移 2 个单位长度得到, 且 $y =$

$-\frac{5}{x}$ 的图象关于原点对称, 故 $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ 的图象关于点

$(-2, 2)$ 中心对称, A 正确;

对于 B, 因为 $f(2x-1)$ 为奇函数, 所以 $f(2x-1) = -f(-2x-1)$, 所以 $f(x-1) = -f(-x-1)$, 所以 $f(x) = -f(-x-2)$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1, 0)$ 中心对称, B 正确;

对于 C, 函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度, 再向上

平移 1 个单位长度得到函数 $y = f(x-1) + 1$ 的图象, 由于

$y = f(x)$ 过定点 $(0, 1)$, 故函数 $y = f(x-1) + 1$ 过定点 $(1,$

2), C 正确;

对于 D, 函数 $y = \frac{x-1}{x-b} = \frac{(x-b)+b-1}{x-b} = 1 + \frac{b-1}{x-b}$ 的图象关

于点 $(3, c)$ 中心对称,

所以 $\begin{cases} 3-b=0, \\ c=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=3, \\ c=1, \end{cases}$

所以 $b+c=4$, D 不正确.

故选 ABC.]

考向3 典例3 B [设 $y = f(x) = 3^{x-1}$, $y = g(x) = 3^{1-x}$, 显然 $g(x) = 3^{(2-x)-1} = f(2-x)$, 故 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 故选 B.]

考点二

典例4 BD [因为函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数,

所以 $f(-x) = f(x)$,

又 $f(x+1)$ 为奇函数, 所以 $f(-x+1) + f(x+1) = 0$,

因为 A 选项中, $f(-x-1) = -f(x+1) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$, 而

$f(-x) = f(x)$, 所以 A 选项错误;

所以 $f(-x) + f(x+2) = 0$, $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称,

且 $f(1) = 0$, 所以 B 选项正确;

所以 $f(x) + f(x+2) = 0$, 所以 $f(x+2) + f(x+4) = 0$,

所以 $f(x+4) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 4, 所以 C 选项

错误;

所以 $f(2025) = f(4 \times 506 + 1) = f(1) = 0$, 所以 D 选项

正确.

故选 BD.]

考点三

典例5 D [由 $f(-x) + f(x) = 2$, 知函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, 1)$ 对称, 由 $f(1-x) = f(1+x)$, 知函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 所以函数 $f(x)$ 的周期为 $4 \times |1-0| = 4$.

又 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$, 所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 - f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{3}{2}\right) =$

$f\left(1 + \frac{1}{2}\right) = f\left(1 - \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$,

所以 $f\left(\frac{5}{2}\right) = f\left(4 - \frac{3}{2}\right) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2 - f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$,

又 $f(0) = 1$, 所以 $f(2) = f(1 - (-1))$

$= f(1 + (-1)) = f(0) = 1$,

所以 $f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

故选 D.]

多维变迁

0 [因为函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称,

所以 $f(-x) = -f(4+x)$.

又 $f(-x) = f(2+x)$,

所以 $f(x+2) + f(x+4) = 0$,

所以 $f(x) - f(x+4) = 0$, 即 $f(x) = f(x+4)$,

所以函数 $f(x)$ 的周期为 4,

所以 $f(18) = f(2) = 0$.]

随堂·对点检测

1. D [法一: $f(x) = \frac{ax-1}{x-1} = a + \frac{a-1}{x-1}$ 的图象关于点 $(1, 2)$ 对

称, 则 $f(x) + f(2-x) = 4$, 即 $a + \frac{a-1}{x-1} + a + \frac{a-1}{2-x-1} = 4$,

解得 $a = 2$. 故选 D.

法二: $f(x) = \frac{ax-1}{x-1} = a + \frac{a-1}{x-1}$,

可知 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, a)$ 对称,

又 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 2)$ 对称,

则 $a = 2$. 故选 D.]

2. ACD [因为 $f(2+x) = f(2-x)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 故 A 正确, B 错误;

因为函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 所以 $f(-x) = f(x+4)$, 又 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x+4) = f(x)$, 所以

$T=4$, 故 C 正确;

因为 $T=4$ 且 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $y = f(x+4)$ 为偶函数, 故 D 正确. 故选 ACD.]

3. C [由 $f(4-x) = f(2-(x-2)) = f(x-2) = -f(2-x) = -f(x)$, 即 $f(4-x) + f(x) = 0$, 故 $f(x)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称, B 错误;

$\because f(2-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, A 错误;

根据题意可得, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

$\therefore f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 关于点 $(2, 0)$ 对称,

则 $f(x)$ 在 $(2, 3)$ 内单调递减, C 正确;

$\therefore f(x) = f(2-x) = -f(x-2)$, 则 $f(x+2) = -f(x)$,

$\therefore f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$, 可知 $f(x)$ 的周期为 4,

则 $f\left(-\frac{7}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{2}{3}\right)$, D 错误. 故选 C.]

4.5 [$\because f(x)$ 为偶函数, $\therefore f(-1) = f(1)$,

由 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称,

可得 $f(1) = f(3) = 2 \times 3 - 1 = 5$,

$\therefore f(-1) = 5$.]

* 第 12 课时 抽象函数(进阶课)

类型一

典例 1 (1) B (2) ACD [(1) 由 $f(a+b) = f(a)f(b)$, $f(1) = 2$, 令 $b=1$, 可得 $f(a+1) = f(a)f(1) = 2f(a)$, 所以 $\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(4)}{f(3)} + \frac{f(6)}{f(5)} + \dots + \frac{f(2\,026)}{f(2\,025)} = \frac{2f(1)}{f(1)} + \frac{2f(3)}{f(3)} + \frac{2f(5)}{f(5)} + \dots + \frac{2f(2\,025)}{f(2\,025)} = 2 \times 1\,013 = 2\,026$. 故选 B. (2) 根据题意可知, 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) - f(x-1) = f(2) + 4x - 6$, 令 $x=1$, 得 $f(2) - f(0) = f(2) + 4 - 6$, 解得 $f(0) = 2$, 故 A 正确; 令 $x=-1$, 得 $f(0) - f(-2) = f(2) - 4 - 6$, 即 $f(2) + f(-2) = f(0) + 10$, 因为 $f(0) = 2, f(-2) = 6$, 所以 $f(2) = 6$, 故 B 错误; 因为 $f(2) = 6$, 则 $f(x+1) - f(x-1) = 4x$, 令 $x=2\,024$, 则 $f(2\,025) - f(2\,023) = 4 \times 2\,024 = 8\,096$, 故 C 正确; 又 $f(6) = f(4) + 4 \times 5 = f(4) + 20, f(4) = f(2) + 4 \times 3 = 18$, 则 $f(6) = 18 + 20 = 38$, 故 D 正确. 故选 ACD.]

类型二

典例 2 A [根据题意, $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 取 $x=a$, $y=0$, 且 $a>0$, 则 $0 < f(a) < 1, f(a+0) = \frac{f(a)+f(0)}{1+f(a)f(0)}$, 即 $f(a) = \frac{f(a)+f(0)}{1+f(a)f(0)}, f(a)[1+f(a)f(0)] = f(a)+f(0)$, 解得 $\{[f(a)]^2 - 1\}f(0) = 0$, 又 $0 < [f(a)]^2 < 1, [f(a)]^2 - 1 \neq 0$, 故 $f(0) = 0$. 令 $y=-x$, 则 $f(0) = \frac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)f(-x)} = 0$, 变形可得 $f(-x) = -f(x)$, 则函数 $f(x)$ 为奇函数, 设 x_1, x_2 为任意实数, 且 $0 < x_1 < x_2$, 则有 $x_2 - x_1 > 0$, 故 $0 < f(x_2 - x_1) < 1$, 则 $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) - f(x_2 - x_1 + x_1) = f(x_1) - \frac{f(x_2 - x_1) + f(x_1)}{1 + f(x_2 - x_1)f(x_1)} = \frac{f(x_2 - x_1)\{[f(x_1)]^2 - 1\}}{1 + f(x_2 - x_1)f(x_1)}$, 因为 $x_1 > 0$, 所以 $0 < f(x_1) < 1$, 而 $0 < f(x_2 - x_1) < 1$, 则 $\frac{f(x_2 - x_1)\{[f(x_1)]^2 - 1\}}{1 + f(x_2 - x_1)f(x_1)} < 0$, 所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$,

则有 $f(x_1) < f(x_2)$,

故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 故选 A.]

多维变迁

ACD [A 中, 令 $x=y=0$, 得 $f(0)=0$, 故 A 正确;

B 中, 令 $y=-x$,

则 $f(0) = \frac{f(x)+f(-x)}{1-f(x)f(-x)} = 0$,

因此 $f(-x) = -f(x)$, 又 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 4k+2, k \in \mathbf{Z}\}$, 关于原点对称,

所以 $f(x)$ 为奇函数, 故 B 错误;

C 中, 令 $y=1$, 则 $f(x+1) = \frac{f(x)+f(1)}{1-f(x)f(1)} = \frac{f(x)+1}{1-f(x)} = -1 + \frac{2}{1-f(x)}$,

所以 $f(x+2) = -1 + \frac{2}{1-f(x+1)} = -\frac{1}{f(x)}$, 因此 $f(x+4) = -\frac{1}{f(x+2)} = f(x)$,

所以 $f(x)$ 为周期函数, 且周期为 4, 故 C 正确;

D 中, $f(2\,027) = f(3) = f(-1) = -f(1) = -1$, 故 D 正确. 故选 ACD.]

第 13 课时 幂函数与二次函数

理法先行 · 题练固本

梳必备 · 破题有方

知识点 1 (1) $y=x^a$ (3) $(1, 1)$ $(0, 0)$

(1, 1) 奇函数 偶函数

知识点 2 (1) $ax^2+bx+c (a \neq 0)$ (m, n) 零点 (2) R

$-\frac{b}{2a}$ $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 偶 减 增 增 减

链教材 · 夯基固本

1. -3 [由题意知 $8^a = 2$, 解得 $a = \frac{1}{3}$, 所以 $f(x) = \sqrt[3]{x}$,

所以 $f(-27) = \sqrt[3]{-27} = -3$.]

2. < [由于函数 $y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

且 $-1.5 < -1.4$, 故 $(-1.5)^3 < (-1.4)^3$.]

3. $(-\infty, -3]$ [因为二次函数 $f(x) = x^2 + 2(a-1)x + 2$ 的图象的对称轴为直线 $x=1-a$, 且开口向上, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1-a]$ 上单调递减.

又已知该函数在区间 $(-\infty, 4)$ 上单调递减, 则 $1-a \geq 4$, 即 $a \leq -3$.

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -3]$.]

4. 解: (1) 配方得 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$

$= \frac{1}{2}(x^2 + 4x) + 5$

$= \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4 - 4) + 5$

$= \frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$.

所以函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$ 的图象可以由函数 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的图象向左平移 2 个单位长度, 再向上平移 3 个单位长度而得到.

(2) 由(1)可知, 该函数的图象开口向上, 对称轴为直线 $x = -2$. 在区间 $(-\infty, -2]$ 上, 函数值 y 随自变量 x 的增大而减小, 在区间 $[-2, +\infty)$ 上, 函数值 y 随自变量 x 的增大而增大. 函数在 $x = -2$ 处取得最小值 3, 即 $y_{\min} = 3$.

考点一

典例 1 (1)B (2)B (3)BC [(1)根据幂函数 $y=x^n$ 的性质,在第一象限内的图象:

当 $n>0$ 时, n 越大, $y=x^n$ 的增长速度越快,所以曲线 C_1 的 $n=2$, C_2 的 $n=\frac{1}{2}$;

当 $n<0$ 时, $|n|$ 越大,曲线越陡峭,所以曲线 C_3 的 $n=-\frac{1}{2}$, C_4 的 $n=-2$.

(2)由 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$, $b=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$, $c=\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}$,

得 $a=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$, $b=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$, $c=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$.

因为幂函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,且 $\frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$,

所以 $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$, 即 $c < a < b$. 故选 B.

(3)设 $f(x)=x^a$, 其图象经过点 $\left(3, \frac{1}{9}\right)$,

则 $3^a = \frac{1}{9}$, 解得 $a = -2$, 故 $f(x) = \frac{1}{x^2}$,

那么 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 故 A 错误;

$f(x)$ 的值域为 $\{y|y > 0\}$, 故 B 正确;

因为 $f(-x) = \frac{1}{x^2} = f(x)$, 则 $f(x)$ 为偶函数, 故 C 正确;

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 在定义域上不是减函数, 故 D 错误. 故选 BC.]

考点二

典例 2 解:法一(利用二次函数的一般式):设 $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$.

由题意得 $\begin{cases} 4a+2b+c=-1, \\ a-b+c=-1, \\ \frac{4ac-b^2}{4a}=8, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-4, \\ b=4, \\ c=7. \end{cases}$

故所求二次函数的解析式为 $f(x)=-4x^2+4x+7$.

法二(利用二次函数的顶点式):

设 $f(x)=a(x-m)^2+n(a \neq 0)$.

$\because f(2)=f(-1)$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{2+(-1)}{2}=\frac{1}{2}$.

$\therefore m=\frac{1}{2}$, 又根据题意函数有最大值 8,

$\therefore n=8, \therefore y=f(x)=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+8$.

$\because f(2)=-1, \therefore a\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+8=-1$, 解得 $a=-4$,

$\therefore f(x)=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+8=-4x^2+4x+7$.

法三(利用二次函数的零点式):

由已知 $f(x)+1=0$ 的两根为 $x_1=2, x_2=-1$,

故可设 $f(x)+1=a(x-2)(x+1)(a \neq 0)$,

即 $f(x)=ax^2-ax-2a-1$.

又函数有最大值 8, 即 $\frac{4a(-2a-1)-a^2}{4a}=8$.

解得 $a=-4$, 故所求二次函数的解析式为 $f(x)=-4x^2+4x+7$.

考点三

考向 1 典例 3 AD [因为图象与 x 轴交于两点,

所以 $b^2-4ac>0$, 即 $b^2>4ac$, A 正确;

对称轴为 $x=-1$, 即 $-\frac{b}{2a}=-1, 2a-b=0$, B 错误;

结合图象, 当 $x=-1$ 时, $y>0$, 即 $a-b+c>0$, C 错误;

由对称轴为 $x=-1$ 知, $b=2a$.

根据抛物线开口向下, 知 $a<0$,

所以 $5a<2a$, 即 $5a<b$, D 正确.

故选 AD.]

考向 2 典例 4 解: $f(x)=x^2-tx-1=\left(x-\frac{t}{2}\right)^2-1-\frac{t^2}{4}$.

(1)依题意, $-1<\frac{t}{2}<2$, 解得 $-2<t<4$,

所以实数 t 的取值范围是 $(-2, 4)$.

(2)①当 $\frac{t}{2} \geq 2$, 即 $t \geq 4$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\min}=f(2)=3-2t$.

②当 $-1<\frac{t}{2}<2$, 即 $-2<t<4$ 时,

$f(x)_{\min}=f\left(\frac{t}{2}\right)=-1-\frac{t^2}{4}$.

③当 $\frac{t}{2} \leq -1$, 即 $t \leq -2$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=t$.

综上, $g(t)=\begin{cases} t, & t \leq -2, \\ -1-\frac{t^2}{4}, & -2 < t < 4, \\ 3-2t, & t \geq 4. \end{cases}$

母题探究

1. $(-\infty, 2]$ [不妨设 $x_1 > x_2$, 则 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > -2$ 可化为

$f(x_1)+2x_1 > f(x_2)+2x_2$, 令 $g(x)=f(x)+2x=x^2-(t-2)x-1$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $\frac{t-2}{2} \leq 0$, 解得 $t \leq 2$.]

2. 解: $f(-1)=t, f(2)=3-2t, f(2)-f(-1)=3-3t$,

当 $t \geq 1$ 时, $f(2)-f(-1) \leq 0$,

$\therefore f(2) \leq f(-1), \therefore f(x)_{\max}=f(-1)=t$;

当 $t < 1$ 时, $f(2)-f(-1) > 0$,

$\therefore f(2) > f(-1)$,

$\therefore f(x)_{\max}=f(2)=3-2t$,

综上有 $G(t)=\begin{cases} t, & t \geq 1, \\ 3-2t, & t < 1. \end{cases}$

教材拓展 2

典例 5 (1)3 (2) $(-\infty, 1)$ [(1) $f(x)=\frac{ax+2-a}{x+1}=$

$\frac{a(x+1)+2-2a}{x+1}=a+\frac{2-2a}{x+1}$,

所以 $f(x)$ 的图象的对称中心为点 $(-1, a)$,

由题意得 $a=3$.

(2)由 $f(x)=\frac{ax+2-a}{x+1}$ 知直线 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的一条渐

近线,

又由一次分式函数的性质知,

当且仅当 $1 \times (2-a) > 1 \times a$,

即 $a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递减,

故实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1)$.]

典例 6 $\frac{3}{2}$ [由 $f(x) = x^2 + \frac{3}{x^2+2} = x^2 + 2 + \frac{3}{x^2+2} - 2$,

令 $x^2 + 2 = t (t \geq 2)$, 则有 $f(t) = t + \frac{3}{t} - 2$,

由对勾函数的性质知, $f(t)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增, 所以当

$t = 2$ 时, $f(t)_{\min} = \frac{3}{2}$,

即当 $x = 0$ 时, $f(x)_{\min} = \frac{3}{2}$.]

典例 7 BCD [当 $a > 0$ 时, $f(x) = x - \frac{a}{x}$, 定义域为 $(-\infty, 0)$

$\cup (0, +\infty)$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ 上单调递增, 当 x

$\rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 故 $f(x)$ 的

值域为 $\mathbf{R}$, 故 A 错误, D 正确; 当 $a = -4$ 时, $f(x) = x + \frac{4}{x}$ 为

对勾函数, 其单调递增区间为 $(-\infty, -2)$, $(2, +\infty)$, 故 B 正

确; 当 $x > 0$ 时, $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$ (当且仅当 $x = 2$ 时取等

号), 当 $x < 0$ 时, $x + \frac{4}{x} = -\left[(-x) + \left(-\frac{4}{x}\right)\right] \leq$

$-2\sqrt{(-x) \cdot \left(-\frac{4}{x}\right)} = -4$ (当且仅当 $x = -2$ 时取等号),

故 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$, 故 C 正确.]

随堂·对点检测

1. C [因为函数 $f(x) = (m^2 - 3m - 3)x^m$ 为幂函数, 则 $m^2 - 3m - 3 = 1$, 解得 $m = 4$ 或 $m = -1$.

当 $m = 4$ 时, $f(x) = x^4$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 不满足条件, A 错误;

当 $m = -1$ 时, $f(x) = x^{-1}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 满足题意.

函数 $f(x) = x^{-1}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 但不是减函数, B 错误;

因为函数定义域关于原点对称, 且 $f(-x) = \frac{1}{-x} = -f(x)$,

所以函数 $f(x)$ 是奇函数, 不是偶函数, 故 C 正确, D 错误.

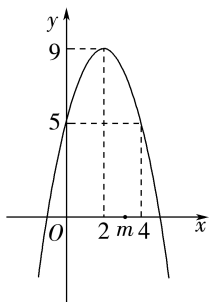
故选 C.]

2. A [已知函数 $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ 在区间 $[0, m]$ 上的值域为 $[5, 9]$,

又 $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ 的图象开口向下, 对称轴为 $x = 2$, 且 $f(0) = f(4) = 5$, $f(2) = 9$,

$\therefore$ 函数 $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ 在区间 $[0, m]$ 上的值域为 $[5, 9]$,

$\therefore$ 由图可知, $2 \leq m \leq 4$, 即实数 m 的取值范围是 $[2, 4]$.



故选 A.]

3. ACD [由二次函数图象开口向下知 $a < 0$,

对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} = 1$,

即 $2a + b = 0$, 故 $b > 0$.

又因为 $f(0) = c > 0$, 所以 $abc < 0$.

$f(2) = f(0) = 4a + 2b + c > 0$,

$f(3) = f(-1) = 9a + 3b + c < 0$.

故选 ACD.]

4. $f(x) = x^2 - 4x$ [由题意, 可设 $f(x) = a(x-2)^2 - 4 (a > 0)$,

又图象过原点,

所以 $f(0) = 4a - 4 = 0$, $a = 1$,

所以 $f(x) = (x-2)^2 - 4 = x^2 - 4x$.]

第 14 课时 指数运算与对数运算

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) 根式 (2) 负数 0 a a $-a$

知识点 2 0

知识点 3 a^{r+s} a^{rs} $a^r b^r$

知识点 4 $\log_a N$ a N $\lg N$ $\ln N$

知识点 5 (1) 0 1 N (2) $\log_a M + \log_a N$ $\log_a M - \log_a N$ $n \log_a M$

链教材·夯基固本

1. 解: (1) $\sqrt[3]{(-8)^3} = -8$;

(2) $\sqrt{(-10)^2} = |-10| = 10$;

(3) $\sqrt[4]{(3-\pi)^4} = |3-\pi| = \pi-3$;

(4) $\sqrt{(a-b)^2} = |a-b| = \begin{cases} a-b, & a \geq b, \\ b-a, & a < b. \end{cases}$

2. 解: (1) 设 $b = 4^{\frac{3}{2}}$, 由定义, 得 $b^2 = 4^3 = 64$, $b = 8 (b > 0)$, 所以 $4^{\frac{3}{2}} = 8$.

(2) 由负分数指数幂的定义, 得 $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{1}{3}}}$.

设 $b = 27^{\frac{1}{3}}$, 由定义, 得 $b^3 = 27$, $b = 3$, 所以 $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$.

(3) 由负分数指数幂的定义, 得 $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{2}} = 16^{\frac{3}{2}} = (4^2)^{\frac{3}{2}} = 4^3 = 64$.

3. 解: (1) 原式 $= \frac{24}{5} \times 5 \times x^{-\frac{2}{3}+1-\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = 24x^0 y^{\frac{1}{6}} = 24y^{\frac{1}{6}}$.

(2) 原式 $= \frac{(m^{\frac{1}{2}})^2 + 2m^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{2}} + (m^{-\frac{1}{2}})^2}{m^{\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}}} = \frac{(m^{\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}})^2}{m^{\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}}} = m^{\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}}$.

4. ABD [对于 A, 因为 $\log_{64} x = -\frac{2}{3}$, 所以

$x = 64^{-\frac{2}{3}} = (4^3)^{-\frac{2}{3}} = 4^{-2} = \frac{1}{16}$, A 正确;

对于 B, 因为 $\log_x 8 = 6$, 所以 $x^6 = 8$. 又 $x > 0$, 所以 $x = 8^{\frac{1}{6}} =$

$(2^3)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, B 正确;

对于 C, 因为 $\lg 100 = x$, 所以 $10^x = 100$, $10^x = 10^2$, 于是 $x = 2$, C 错误;

对于 D, 因为 $-\ln e^2 = x$, 所以 $\ln e^2 = -x$, $e^2 = e^{-x}$, 于是 $x = -2$, D 正确. 故选 ABD.]

5. BC [对于 A, $\log_3(27 \times 9^2) = \log_3(3^3 \times 3^4) = 7$, 故 A 错误; 对于 B, $2(\log_4 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2) = 2\left(\frac{\log_2 3}{\log_2 4} + \frac{\log_2 3}{\log_2 8}\right) \cdot \left(\frac{\log_2 2}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2}{\log_2 9}\right) = \frac{5}{3} \log_2 3 \times \frac{3}{2 \log_2 3} = \frac{5}{2}$, 故 B 正确; 对于 C, $\ln 3 + \ln \frac{1}{3} = \ln 1 = 0$, 故 C 正确; 对于 D, $\log_3 5 - \log_3 15 = \log_3 \frac{1}{3} = -1$, 故 D 错误. 故选 BC.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1) $\pi + \frac{23}{4}$ (2) $\frac{1}{ab}$ (3) 7 47

$$\begin{aligned} & [(1) \left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} + (-8)^{\frac{2}{3}} + 8^{0.25} \times \sqrt[4]{2} + \sqrt[3]{(\pi-2)^3}] \\ &= \left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{1}{2}} + (-2)^2 + 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} + \pi - 2 \\ &= \frac{7}{4} + 4 + 2 + \pi - 2 \\ &= \pi + \frac{23}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (2) \frac{\sqrt{b} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{b^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{a^{-2}}} \div \left(\frac{a^{-2} \cdot \sqrt{b^{-2}}}{ab^2}\right)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{b^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{2}{3}}} \div \left(\frac{a^{-2} \cdot b^{-1}}{ab^2}\right)^{-\frac{2}{3}} \\ &= ab \div (a^{-3} b^{-3})^{-\frac{2}{3}} \\ &= ab \div a^2 b^2 = \frac{1}{ab}. \end{aligned}$$

(3) 由 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$, 得 $a + a^{-1} + 2 = 9$, 即 $a + a^{-1} = 7$, 则 $a^2 + a^{-2} + 2 = 49$, 即 $a^2 + a^{-2} = 47$.]

考点二

考向 1 典例 2 (1) AB (2) D (3) 64

$$[(1) \log_2 \frac{1}{25} \times \log_3 8 \times \log_{\frac{1}{5}} 27 = \frac{\lg \frac{1}{25}}{\lg 2} \times \frac{\lg 8}{\lg 3} \times \frac{\lg 27}{\lg \frac{1}{5}} =$$

$$\frac{2 \lg \frac{1}{5}}{\lg 2} \times \frac{3 \lg 2}{\lg 3} \times \frac{3 \lg 3}{\lg \frac{1}{5}} = 18, \text{ 故 A 正确; } \ln e + \lg 1 + 2^{\log_2 3} +$$

$$\ln 10^{\lg e} = 1 + 0 + 3 + 1 = 5, \text{ 故 B 正确; } \log_3 \sqrt{27} - \log_3 2^{\log_2 3} - 2^{\log_2 3} + \lg \sqrt{2} + \lg \sqrt{5} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} - 1 - 3 + \lg \sqrt{10} = \frac{3}{2} - 4 +$$

$$\frac{1}{2} = -2, \text{ 故 C 错误; 因为 } \log_2 [\log_3 (\lg x)] = 1,$$

所以 $\log_3 (\lg x) = 2$, 所以 $\lg x = 9$, 所以 $x = 10^9$, 故 D 错误. 故选 AB.

$$(2) \text{ 因为 } a = \lg 2, b = \lg 3, \text{ 所以 } \log_{12} 10 = \frac{\lg 10}{\lg 12} = \frac{1}{\lg 4 + \lg 3} =$$

$$\frac{1}{2 \lg 2 + \lg 3} = \frac{1}{2a + b}. \text{ 故选 D.}$$

$$(3) \text{ 由题意 } \frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_4 a} = \frac{3}{\log_2 a} - \frac{1}{2} \log_2 a = -\frac{5}{2}, \text{ 整理得}$$

$$(\log_2 a)^2 - 5 \log_2 a - 6 = 0,$$

$$\text{解得 } \log_2 a = -1 \text{ 或 } \log_2 a = 6.$$

$$\text{又 } a > 1,$$

$$\text{所以 } \log_2 a = 6 = \log_2 2^6, \text{ 故 } a = 2^6 = 64.]$$

考向 2 典例 3 (1) A (2) e [(1) 由 $3^a = 5^b = 15$, 得 $a = \log_3 15, b = \log_5 15$,

$$\text{所以 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\log_3 15} + \frac{1}{\log_5 15} = \log_{15} 3 + \log_{15} 5 = \log_{15} 15 = 1.$$

故选 A.

$$(2) f(\ln 2) f(\ln 4) = a^{\ln 2} a^{\ln 4} = a^{\ln 2 + \ln 4} = a^{3 \ln 2} = (a^{\ln 2})^3 = 8, \therefore a^{\ln 2} = 2, \therefore a = e.]$$

考点三

典例 4 (1) D (2) B [(1) 设北极星的亮度为 I_1 , 牛郎星的亮度为 I_2 ,

$$\text{由题意可得 } 2 = -\frac{5}{2} \lg \frac{I_1}{I_0}, 0.8 = -\frac{5}{2} \lg \frac{I_2}{I_0},$$

$$\text{所以 } I_1 = I_0 \cdot 10^{-\frac{4}{5}}, I_2 = I_0 \cdot 10^{-\frac{8}{25}},$$

$$\text{所以 } \frac{I_1}{I_2} = \frac{10^{-\frac{4}{5}}}{10^{-\frac{8}{25}}} = 10^{-\frac{12}{25}}.$$

故选 D.

$$(2) \text{ 由题意知, } k \log_2 (1.024 \times 10^9) - k \log_2 10^6 = 20,$$

$$\text{即 } k \log_2 \frac{1.024 \times 10^9}{10^6} = 20,$$

$$\text{所以 } k \log_2 1.024 = 20,$$

$$\text{解得 } k = \frac{20}{\log_2 1.024} = \frac{20}{10} = 2,$$

$$\text{所以 } 2 \log_2 (4.096 \times 10^9) - 2 \log_2 (1.024 \times 10^9)$$

$$= 2 \log_2 \frac{4.096 \times 10^9}{1.024 \times 10^9} = 2 \log_2 4 = 2 \times 2 = 4.$$

故选 B.]

随堂·对点检测

1. C [若 $\log_2 x = 3$, 则 $x = 2^3 = 8$, 故 A 错误; 若 $e = \ln x$, 则 $x = e^e$, 故 B 错误; $\lg(\ln e) = \lg 1 = 0$, 故 C 正确; $5^{\log_5 \frac{1}{25}} = \frac{1}{25}$, 故 D 错误. 故选 C.]

2. BCD [$a^{\frac{4}{3}} a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{4}{3} + \frac{3}{4}} = a^{\frac{25}{12}} \neq a$, 故 A 错误;

$$(a^{\frac{1}{4}})^4 = a^{\frac{1}{4} \times 4} = a, \text{ 故 B 正确;}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ 故 C 正确;}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 BCD.]

3. C [$f(t) = ma^t$, 第 3 天时其含量为 100, 第 7 天时其含量为 400,

$$\text{则 } \begin{cases} f(3) = ma^3 = 100, \\ f(7) = ma^7 = 400, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = \sqrt{2}, \\ m = 25\sqrt{2} \end{cases} \text{ (负值已舍去),}$$

$$\text{所以 } f(t) = 25\sqrt{2} \times (\sqrt{2})^t, \text{ 则 } f(t_1) = 25\sqrt{2} \times (\sqrt{2})^{t_1} = 800,$$

$$\text{解得 } t_1 = 9.$$

故选 C.]

4. $\sqrt{35}$ [因为正实数 m, n, t 满足 $5^m = 7^n = t$,
所以 $m = \log_5 t, n = \log_7 t$,
所以 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{\log_5 t} + \frac{1}{\log_7 t} = \log_t 5 + \log_t 7 = \log_t 35 = 2$,
所以 $t^2 = 35$,
又因为 $t > 0$,
所以 $t = \sqrt{35}$.]

第15课时 指数函数

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 2 $(0, +\infty)$ $(0, 1)$ $y > 1$ $0 < y < 1$ $y > 1$ $0 < y < 1$ 增函数 减函数

链教材·夯基固本

1. $y = 9^x$ [设指数函数 $y = a^x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$, 则 $81 = a^2$,
所以 $a = 9$, 所以这个指数函数的解析式为 $y = 9^x$.]
2. D $[b = 2^{-0.4} < 2^0 = 1, c = 9^{0.4} = 3^{0.8} > 3^{0.7} = a > 3^0 = 1, \text{所以}$
 $b < a < c$. 故选 D.]
3. CD [当 $a > 1$ 时, $y = a^x$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增,
此时 $f(1) - f(0) = a - a^0 = a - 1 = \frac{3}{2}$,
解得 $a = \frac{3}{2}$;
当 $0 < a < 1$ 时, $y = a^x$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减,
此时 $f(0) - f(1) = a^0 - a = 1 - a = \frac{1}{2}$,
解得 $a = \frac{1}{2}$.
所以实数 a 的值为 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$. 故选 CD.]
4. $(-\infty, 2)$ [由指数函数的性质, 得 $x - 1 < 3 - x$, 解得 $x < 2$,
所以实数 x 的取值范围是 $(-\infty, 2)$.]

考点深研·题型突破

考点一

- 典例 1 (1) ABD (2) 1.6 [(1) 对于 A, 令 $2a^2 - 3a + 2 = 1$ 且
 $a > 0, a \neq 1$, 则 $a = \frac{1}{2}$, A 正确;
对于 B, 不论 $0 < a < 1$, 还是 $a > 1$, 值域都为 $(0, +\infty)$, B
正确;
对于 C, $f(x) = a^x$ 的图象向左平移一个单位长度得到 $y =$
 a^{x+1} 的图象, C 错误;
对于 D, 令 $2x + 3 = 0$, 则 $x = -\frac{3}{2}, y = 0$, 所以函数 $y =$
 $a^{2x+3} - 1 (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 恒过定点 $(-\frac{3}{2}, 0)$, D 正确. 故
选 ABD.
(2) 由题图可得, $a = 2, f(t) = 2^t$,
当浮萍面积为 4 m^2 时, $2^{t_1} = 4$, 即 $t_1 = 2$,
当浮萍面积为 12 m^2 时, $2^{t_2} = 12$, 即 $t_2 = \log_2 12 = 2 + \log_2 3$,
则 $t_2 - t_1 = \log_2 3 \approx 1.6$.]

考点二

- 考向 1 典例 2 B [$\because$ 函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$, 它的图象关于
直线 $x = 1$ 对称, 且当 $x \geq 1$ 时, 函数 $f(x) = 3^x - 1$ 单调
递增,
 $\therefore$ 当 $x < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递减, 且 $f(\frac{3}{2}) = f(\frac{1}{2})$.]

- $\therefore \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1$,
 $\therefore f(\frac{2}{3}) < f(\frac{1}{2}) < f(\frac{1}{3})$, 即 $f(\frac{2}{3}) < f(\frac{3}{2}) < f(\frac{1}{3})$.
故选 B.]

多维变迁

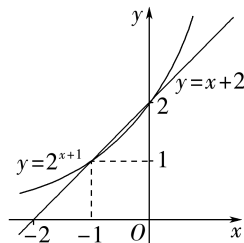
- D [函数 $f(x) = e^x + e^{-x}$ 为偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调
递增.
 $\therefore a = f(2^{1.1}), b = f(-1) = f(1), c = f(\log_2 3), 1 < \log_2 3 <$
 $2 < 2^{1.1}$,
 $\therefore$ 实数 a, b, c 的大小关系为 $b < c < a$.
故选 D.]

考向 2 典例 3 (1) D (2) B [(1) $\because y = 4^x - 3 \cdot 2^x + 3$ 的
值为 $[1, 7]$,

- $\therefore 1 \leq 4^x - 3 \cdot 2^x + 3 \leq 7$, 且 $2^x > 0$,
 $\therefore 0 < 2^x \leq 1$ 或 $2 \leq 2^x \leq 4$,
 $\therefore x \leq 0$ 或 $1 \leq x \leq 2$.
(2) $\because a^x < 1$, 当 $a > 1$ 时, $y = a^x$ 是增函数,
 $\therefore p: \{x | x < 0\}$.

对于不等式 $2^{x+1} < x + 2$,

作出函数 $y = 2^{x+1}$ 与 $y = x + 2$ 的图象, 如图所示.



- 由图象可知, 不等式 $2^{x+1} < x + 2$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 0\}$,
 $\therefore q: \{x | -1 < x < 0\}$.
又 $\because \{x | -1 < x < 0\} \subsetneq \{x | x < 0\}$,
 $\therefore p$ 是 q 的必要不充分条件.]

考向 3 典例 4 解: (1) 因为函数 $f(x) = 1 - \frac{a}{2^x + 1}$ 是定义域为
 $\mathbf{R}$ 的奇函数,

所以 $f(0) = 0$, 即 $1 - \frac{a}{2} = 0$, 解得 $a = 2$,

当 $a = 2$ 时, $f(x) = 1 - \frac{2}{2^x + 1}$,

所以 $f(-x) + f(x) = 1 - \frac{2}{2^{-x} + 1} + 1 - \frac{2}{2^x + 1} = 2 -$
 $\frac{2(2^x + 1)}{2^x + 1} = 0$ 对任意实数 x 恒成立, 所以 $a = 2$.

因为 $y = 2^x$ 是增函数, 所以 $y = 2^x + 1$ 是增函数, 所以 $y =$
 $\frac{2}{2^x + 1}$ 是减函数,

所以 $y = 1 - \frac{2}{2^x + 1}$ 是增函数,

所以 $f(x) = 1 - \frac{2}{2^x + 1}$ 是增函数.

(2) 由 $y = 2^x > 0$, 得 $y = 2^x + 1 > 1$, 所以 $0 < \frac{2}{2^x + 1} < 2$,

所以 $-2 < -\frac{2}{2^x + 1} < 0$, 所以 $-1 < 1 - \frac{2}{2^x + 1} < 1$,

所以函数 $y = f(x) = 1 - \frac{2}{2^x + 1}$ 的值域为 $(-1, 1)$.

随堂·对点检测

1. D [当 $x=1$ 时, $3^1 > 2^1 > \left(\frac{1}{2}\right)^1 > \left(\frac{1}{3}\right)^1$, 所以图象①, ②,

③, ④对应的函数依次为 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 3^x$ 和 $y = 2^x$. 故选 D.]

2. A [令 $x-2=0$, 得 $x=2$,

将 $x=2$ 代入函数可得 $y=3a^0+3=6$,

即函数 $y=3a^{x-2}+3$ 的图象恒过点 $(2, 6)$.

故选 A.]

3. D [$\because a = (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$, $b = 9^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}$, $c = 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{16}$, $\therefore \sqrt[3]{9} < \sqrt[3]{16} < \sqrt[3]{27} = 3$,

$\therefore c > b$, 且 $a > c$, 即 $a > c > b$, 故选 D.]

4. D [法一(复合函数法): 因为 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $y=x(x-a)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 所以 $\frac{a}{2} \geq 1$, 解得 $a \geq 2$, 故选 D.

法二(特值法): 取 $a=3$, 则 $y=x(x-3) = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 所以 $f(x)=2^{x(x-3)}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 所以 $a=3$ 符合题意, 排除 A, B, C. 故选 D.]

5. $(-3, 2)$ [函数 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则

$$2^{x^2-2x-3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3(x-1)} \Leftrightarrow 2^{x^2-2x-3} < 2^{-3(x-1)} \Leftrightarrow x^2-2x-3 < -3(x-1),$$

即 $x^2+x-6 < 0$, 解得 $-3 < x < 2$,

所以原不等式的解集为 $(-3, 2)$.]

第16课时 对数函数

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点1 (2)(0, +\infty) $\mathbf{R}$ (1, 0) 增函数 减函数

知识点2 $y = \log_a x$ $y = x$

链教材·夯基固本

1. C [根据 $f(2) < 1$, $f(3) > 1$, 可知 $y = \ln x$ 满足. 故选 C.]

2. A [根据复合函数单调性的同增异减原则, 可知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增,

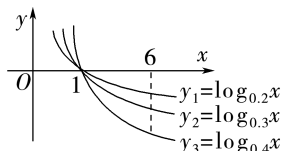
因为 $0 \leq x \leq 1$, 所以 $1 \leq x+1 \leq 2$,

则 $\log_2 1 \leq \log_2(x+1) \leq \log_2 2$,

即 $f(x) \in [0, 1]$.]

3. $(1, +\infty)$ [因为 $y = \log_{0.7} x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且是减函数, 故 $2m > m-1 > 0$, 解得 $m > 1$.]

4. $a > b > c$ [法一: 如图, 作出函数 $y_1 = \log_{0.2} x$, $y_2 = \log_{0.3} x$, $y_3 = \log_{0.4} x$ 的图象,



由图可知, 当 $x=6$ 时, $\log_{0.2} 6 > \log_{0.3} 6 > \log_{0.4} 6$,

即 $a > b > c$.

法二: 易知 $0 > \log_{0.4} 0.4 > \log_{0.3} 0.3 > \log_{0.2} 0.2$,

$$\text{所以 } \frac{1}{\log_{0.4} 0.4} < \frac{1}{\log_{0.3} 0.3} < \frac{1}{\log_{0.2} 0.2},$$

即 $\log_{0.4} 6 < \log_{0.3} 6 < \log_{0.2} 6$,

即 $a > b > c$.]

5. (1) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ (2) $y = \log_5 x$ [(1) 因为对数函数 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

的底数是 $\frac{1}{3}$, 所以它的反函数是指数函数 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

(2) 因为指数函数 $y = 5^x$ 的底数是 5, 所以它的反函数是对数函数 $y = \log_5 x$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例1 (1) BC (2) A (3) $(1, +\infty)$ [(1) 对于 A,

$$\begin{cases} a^2 - 5a + 6 = 0, \\ a - 1 > 0, \\ a - 1 \neq 1, \end{cases} \text{ 解得 } a = 3, \text{ A 错误;}$$

对于 B, 由题意可得, $\begin{cases} x-2 \neq 0, \\ 3-x > 0, \end{cases}$ 解得 $x < 3$ 且 $x \neq 2$, B 正确;

对于 C, 令 $4x-3=1$, 解得 $x=1$, 则 $f(1) = \log_a 1 = 0$, C 正确;

对于 D, $x^2-2x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, 可知当 $x > 2$ 时, $y = x^2-2x$ 单调递增, 结合复合函数的单调性可知 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(2, +\infty)$, D 错误.

(2) 由函数图象可知, $f(x)$ 为增函数, 故 $a > 1$.

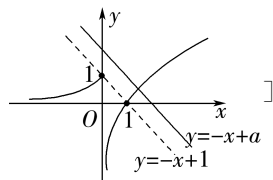
函数图象与 y 轴的交点坐标为 $(0, \log_a b)$,

由函数图象可知 $-1 < \log_a b < 0$,

解得 $\frac{1}{a} < b < 1$.

综上, $0 < a^{-1} < b < 1$.

(3) 如图, 在同一平面直角坐标系中分别作出 $y = f(x)$ 与 $y = -x + a$ 的图象, 其中 a 表示直线在 y 轴上的截距. 由图象可知, 当 $a > 1$ 时, 直线 $y = -x + a$ 与 $f(x)$ 的图象只有一个交点. 故实数 a 的取值范围为 $(1, +\infty)$.

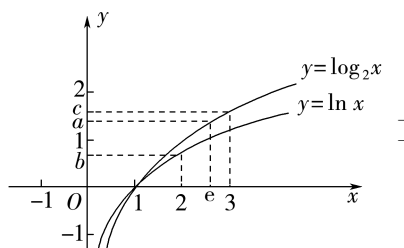


考点二

考向1 典例2 D [法一(中间量法): 因为 $a = \log_2 e > 1$, $b =$

$\ln 2 \in (0, 1)$, $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3 > \log_2 e > 1$, 所以 $c > a > b$.

法二(图象法): $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3$, 在同一平面直角坐标系中作出函数 $y = \log_2 x$, $y = \ln x$ 的图象, 如图. 由图可知 $c > a > b$.



考向2 典例3 B [因为 $\log_{2a}(4a^2+1) < 0$, $4a^2+1 > 1$, 结合对数函数图象的性质得 $0 < 2a < 1$, 所以 $4a^2+1 > 4a > 1$, 所

以 $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$. 故选 B.]

考向3 典例4 解: 由 $x > 0$ 且 $4-x > 0$, 得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 4)$.

(1) 证明: 因为函数 $f(4-x) = \log_2(4-x) + \log_2 x = f(x)$,

所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称.

(2) 函数 $f(x) = \log_2 x + \log_2 (4-x) = \log_2 (4x-x^2) = \log_2 [-(x-2)^2+4] (0 < x < 4)$,

当 $x=2$ 时, $4x-x^2$ 取到最大值 4,

此时 $f(x) = \log_2 x + \log_2 (4-x)$ 取到最大值 $\log_2 4 = 2$, 所以函数 $f(x)$ 的最大值为 2.

母题探究

- 解: $f(x) = \log_2 (4x-x^2) (0 < x < 4)$ 可以看作是由函数 $y = \log_2 u$ 和 $u = -x^2 + 4x (0 < x < 4)$ 复合而成的, 因为 $y = \log_2 u$ 是定义域上的增函数, $u = -x^2 + 4x (0 < x < 4)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, 4)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, 2)$, 单调递减区间是 $(2, 4)$.
- 解: 因为 $f(4-x) + f(x) = 2f(x) = 0$ 不恒成立, 所以 $f(x)$ 的图象不关于点 $(2, 0)$ 对称.

教材拓展 3

典例 5 A $[a = 3\log_8 3 = \log_8 27 = \log_{2^3} 3^3 = \log_2 3,$

$$b = -\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 16 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} = \log_3 4, c = \log_4 5,$$

利用对数型糖水不等式得 $\log_2 3 > \log_3 4 > \log_4 5$, 即 $a > b > c$.]

随堂·对点检测

- A $[$ 因为 $a > 1$, 所以 $y = a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 排除 C; 又 $y = \log_a (-x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0)$, 所以由复合函数的单调性可知, $y = \log_a (-x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 且恒过点 $(-1, 0)$, 排除 B, D. 故选 A.]
- A $[$ 因为 $\log_3 \frac{1}{5} < \log_3 1 = 0$, 所以 $a < 0$, 因为 $4^{0.3} > 4^0 = 1$, 所以 $b > 1$, 因为 $\log_{\frac{1}{3}} 1 < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$, 所以 $0 < c < 1$, 所以 $b > c > a$. 故选 A.]
- A $[$ 因为 $y = \log_{0.3} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $\log_{0.3} (3x) < \log_{0.3} (x+1)$, 所以 $\begin{cases} 3x > 0, \\ 3x > x+1, \end{cases}$ 解得 $x > \frac{1}{2}$, 即 x 的取值范围是 $(\frac{1}{2}, +\infty)$. 故选 A.]
- $-\frac{1}{4}$ $[$ 依题意得 $f(x) = \frac{1}{2} \log_2 x \cdot (2 + 2\log_2 x) = (\log_2 x)^2 + \log_2 x = (\log_2 x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$, 当 $\log_2 x = -\frac{1}{2}$, 即 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立, 所以函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{4}$.]

* 第 17 课时 指、对、幂的大小比较(进阶课)

类型一

- 典例 1 BD $[$ 对于 A, $y = 0.6^x$ 单调递减, 所以 $0.6^{0.6} < 0.6^{0.5}$, 故 A 错误;
- 对于 B, $y = \log_6 x$ 单调递增, 所以 $\log_6 0.6 > \log_6 0.5$, 又 $\log_6 0.5 > \log_5 0.5$, 所以 $\log_6 0.6 > \log_5 0.5$, 故 B 正确;
- 对于 C, $0.6^{0.5} \in (0, 1)$, $\log_{0.6} 0.5 > \log_{0.6} 0.6 = 1$, 所以 $0.6^{0.5} < \log_{0.6} 0.5$, 故 C 错误;

对于 D, $\log_3 7 = \log_9 49$, $y = \log_9 x$ 单调递增, 所以 $\log_9 49 > \log_9 40$, 所以 $\log_3 7 > \log_9 40$, 故 D 正确. 故选 BD.]

类型二

典例 2 C $[$ 因为函数 $y = 4^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 且 $0 < 0.1 < 1$, 所以 $4^0 < 4^{0.1} < 4^1$, 即 $1 < a < 4$. 因为函数 $y = 0.1^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数, 且 $0 < 0.4 < 1$, 所以 $0.1^1 < 0.1^{0.4} < 0.1^0$, 即 $0.1 < b < 1$. 因为函数 $y = \log_4 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $0.1 < 1$, 所以 $\log_4 0.1 < \log_4 1 = 0$, 即 $c < 0$. 所以 $c < b < a$. 故选 C.]

类型三

典例 3 D $[$ 法一(特殊值法): 取 $z = 1$, 则由 $2^x = 3^y = 5^z$ 得 $x = \log_2 5$, $y = \log_3 5$, 所以 $2x = \log_2 25 < \log_2 32 = 5z$, $3y = \log_3 125 < \log_3 243 = 5z$, 所以 $5z$ 最大. 取 $y = 1$, 则由 $2^x = 3^y$ 得 $x = \log_2 3$, 所以 $2x = \log_2 9 > 3y$.

综上可得, $3y < 2x < 5z$.

法二(作差法): 令 $2^x = 3^y = 5^z = k$, 由 x, y, z 为正数, 知 $k > 1$,

$$\text{则 } x = \frac{\lg k}{\lg 2}, y = \frac{\lg k}{\lg 3}, z = \frac{\lg k}{\lg 5},$$

因为 $k > 1$, 所以 $\lg k > 0$,

$$\text{所以 } 2x - 3y = \frac{2\lg k}{\lg 2} - \frac{3\lg k}{\lg 3}$$

$$= \frac{\lg k \cdot (2\lg 3 - 3\lg 2)}{\lg 2 \cdot \lg 3}$$

$$= \frac{\lg k \cdot \lg \frac{9}{8}}{\lg 2 \cdot \lg 3} > 0,$$

故 $2x > 3y$,

$$2x - 5z = \frac{2\lg k}{\lg 2} - \frac{5\lg k}{\lg 5}$$

$$= \frac{\lg k \cdot (2\lg 5 - 5\lg 2)}{\lg 2 \cdot \lg 5}$$

$$= \frac{\lg k \cdot \lg \frac{25}{32}}{\lg 2 \cdot \lg 5} < 0,$$

故 $2x < 5z$.

所以 $3y < 2x < 5z$.

法三(作商法): 令 $2^x = 3^y = 5^z = k$, 由 x, y, z 为正数, 知 $k > 1$.

$$\text{则 } x = \frac{\lg k}{\lg 2}, y = \frac{\lg k}{\lg 3}, z = \frac{\lg k}{\lg 5}.$$

$$\text{所以 } \frac{2x}{3y} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\lg 3}{\lg 2} = \frac{\lg 9}{\lg 8} > 1, \text{ 即 } 2x > 3y,$$

$$\frac{5z}{2x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\lg 2}{\lg 5} = \frac{\lg 32}{\lg 25} > 1, \text{ 即 } 5z > 2x.$$

所以 $5z > 2x > 3y$.]

第 18 课时 函数的图象

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

- 知识点 2 (1) $f(x+h)$ $f(x-h)$ (2) $-f(x)$ $f(-x)$
 $-f(-x)$ $\log_a x (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$ (3) $f(ax)$ $af(x)$
 (4) $|f(x)|$ $f(|x|)$

链教材·夯基固本

1. C $[$ 因为题图 2 中的图象是在题图 1 的基础上, 去掉函数 $y = f(x)$ 图象在 y 轴右侧的部分, 然后将 y 轴左侧的图象翻折到 y 轴右侧得到的, 所以题图 2 中的图象对应的函数可能是 $y = f(-|x|)$. 故选 C.]

2. 上 $\log_2(x+2)$

3. $(-\frac{1}{2}, 0)$ [由指数函数 $y = (\frac{b}{a})^x$ 的图象可知, $0 < \frac{b}{a} < 1$, 所以 $-\frac{1}{2} < -\frac{b}{2a} < 0$, 所以二次函数 $y = ax^2 + bx$ 图象顶点的横坐标的取值范围是 $(-\frac{1}{2}, 0)$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 解: (1) 首先作出 $y = \lg x$ 的图象, 然后将其向右平移 1 个单位长度, 得到 $y = \lg(x-1)$ 的图象, 再把所得图象在 x 轴下方的部分翻折到 x 轴上方, 即得到所求函数 $y = |\lg(x-1)|$ 的图象, 如图 1 所示(实线部分).

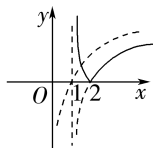


图1

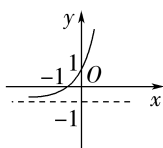


图2

(2) 将 $y = 2^x$ 的图象向左平移 1 个单位长度, 得到 $y = 2^{x+1}$ 的图象, 再将所得图象向下平移 1 个单位长度, 得到 $y = 2^{x+1} - 1$ 的图象, 如图 2 所示.

(3) $y = x^2 - |x| - 2 = \begin{cases} x^2 - x - 2, & x \geq 0 \\ x^2 + x - 2, & x < 0 \end{cases}$, 其图象如图 3 所示.

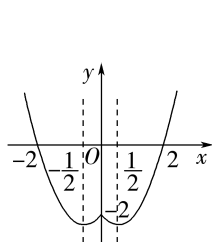


图3

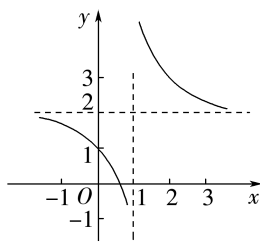


图4

(4) 因为 $y = \frac{2x-1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$, 所以该函数的图象可由 $y = \frac{1}{x}$ 的图象向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 2 个单位长度得到, 如图 4 所示.

考点二

考向 1 典例 2 B [由 $f(-x) = -x^2 + (e^{-x} - e^x) \sin(-x) = -x^2 + (e^x - e^{-x}) \sin x = f(x)$,

又函数定义域为 $[-2.8, 2.8]$, 关于原点对称, 故该函数为偶函数, 图象关于 y 轴对称, 可排除 A, C,

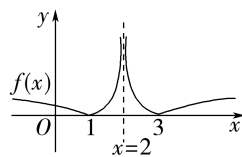
又 $f(1) = -1 + (e - \frac{1}{e}) \sin 1 > -1 + (e - \frac{1}{e}) \sin \frac{\pi}{6} = \frac{e}{2} - 1 - \frac{1}{2e} > 0$, 故可排除 D.

故选 B.]

考向 2 典例 3 D [由题图可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq \pm 1\}$, 且 $f(x)$ 为偶函数, 易得 $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ 与 $f(x) = \frac{x}{|x|-1}$ 均为奇函数, 排除选项 A, B; 由题图可知当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$, 易得当 $x > 1$ 时, $f(x) = \frac{|x|}{1-x^2} < 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x^2-1} > 0$, 排除选项 C. 故选 D.]

考点三

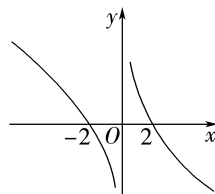
典例 4 (1) ABC (2) B [(1) 由题意知 $f(x) = |\lg|2-x||$. 将函数 $y = \lg x$ 的图象关于 y 轴对称, 可得 $y = \lg|x|$ 的图象, 再将 $y = \lg|x|$ 的图象位于 x 轴下方的部分对折至 x 轴上方, 可得 $y = |\lg|x||$ 的图象, 再将 $y = |\lg|x||$ 的图象向右平移 2 个单位长度, 可得 $f(x)$ 的图象, 如图所示.



结合图象, 可知 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内单调递增, $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, $f(x)$ 的图象与 $y=m (m>0)$ 有且仅有 4 个交点, 故 A, B, C 正确. 令 $x_1 = \frac{21}{10}$, $x_2 = 12$, 则 $f(x_1) =$

$f(x_2) = 1$, 但 $x_1 + x_2 = \frac{21}{10} + 12 \neq 4$, 故 D 错误. 故选 ABC.

(2) 由题意知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 如图所示.



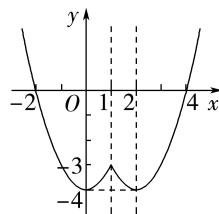
要使 $(x-1)f(x) > 0$, 则当 $x > 1$ 时, 有 $f(x) > 0$, 得 $1 < x < 2$; 当 $x < 1$ 时, 有 $f(x) < 0$, 得 $-2 < x < 0$.

综上, 满足 $(x-1)f(x) > 0$ 的 x 的取值范围是 $(-2, 0) \cup (1, 2)$. 故选 B.]

多维变迁

C [由 $f(x+1) = f(1-x)$, 得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,

且当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = x^2 - 4x$, 作出 $f(x)$ 的图象如图所示.



由图象可知, $f(x)$ 不关于坐标原点对称, 所以 $f(x)$ 不是奇函数, A 错误;

$f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内单调递减, B 错误; $f(x)_{\min} = f(0) = f(2) = -4$, C 正确;

$f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递增, D 错误. 故选 C.]

随堂·对点检测

1. **C** [由 $f(x) = (e^x - e^{-x}) \cos x$,

可知 $f(-x) = (e^{-x} - e^x) \cos(-x)$

$= -(e^x - e^{-x}) \cos x = -f(x)$,

函数 $f(x)$ 是奇函数, $f(x)$ 的图象关于原点对称, 排除 B, D;

又 $f(-\frac{\pi}{2}) = f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上有

3 个零点, 排除 A. 故选 C.]

2. **C** [由题图可知 $f(x)$ 为奇函数, 对于 D, $f(-x) = (-x) \cdot \sin(-\pi x) = x \sin \pi x = f(x)$, 排除 D. 由题图可知, $0 <$

$f(\frac{1}{2}) < 1$, 对于 A, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + 1 > 1$, 排除 A; 对于 B,

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - 1 < 0$, 排除 B. 故选 C.]

3. $(-\infty, \frac{5}{2})$ [作出函数 $f(x)$ 的图

象如图所示,

由图可知,函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,因为 $f(4) = \log_2 4 = 2$,所以 $f(2x-1) < 2$ 等价于 $f(2x-1) < f(4)$,即 $2x-1 < 4$,解得 $x < \frac{5}{2}$,所

以不等式 $f(2x-1) < 2$ 的解集是 $(-\infty, \frac{5}{2})$.]

4. 解:(1)根据绝对值的意义,可将函数式化为分段函数 $y = \begin{cases} 1, & x \geq 1, \\ 2x-1, & x < 1, \end{cases}$ 可知其图象是由两条射线组成,如图 1 所示.

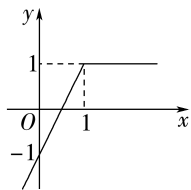


图 1

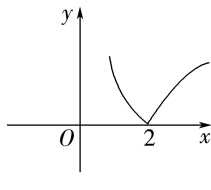


图 2

(2)先作出 $y = \log_2 x$ 的图象,再将其图象向下平移一个单位长度,保留 x 轴上方的部分,将 x 轴下方的图象翻折到 x 轴上方,即得 $y = |\log_2 x - 1|$ 的图象,如图 2 所示.

第 19 课时 函数的零点与方程的解

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) $f(x)=0$ (2)零点 x 轴

(3)连续不断 $f(a)f(b) < 0$ (a, b) $f(c)=0$

知识点 2 连续不断 $f(a)f(b) < 0$ 零点

链教材·夯基固本

1. B [由 $\begin{cases} x \leq 0, \\ x^2 + x - 2 = 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > 0, \\ -1 + \ln x = 0, \end{cases}$ 解得 $x = -2$ 或 $x = e$,故 $f(x)$ 有 2 个零点,故选 B.]

2. B [函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,且 $f(1) = -1, f(2) = 1$,则 $f(1)f(2) < 0$,故 $f(x)$ 的零点所在的区间为 $(1, 2)$. 故选 B.]

3. $(-2, 2)$ [由题意得 $f(-1)f(1) = (-2+a)(2+a) < 0$,解得 $-2 < a < 2$.]

4. A [根据二分法的概念可知选项 A 中函数不能用二分法求零点.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1)B (2)C [(1)函数 $f(x) = e^x + 4x - 4$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

$f(-1) = \frac{1}{e} - 8 < 0, f(0) = 1 - 4 = -3 < 0, f(1) = e + 4 - 4 = e > 0$,

故函数 $f(x)$ 的零点所在区间为 $(0, 1)$.

故选 B.

(2)因为区间 $(2, 3)$ 的长度为 1,经过二分法的一次操作,区间长度变为原来的一半,所以经过 $n (n \in \mathbf{N}_+)$ 次二分法的操作,

区间的长度为 $\frac{1}{2^n}$,由 $\frac{1}{2^n} < 0.1$,解得 $n \geq 4$.

故选 C.]

多维变迁

1. B [易知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减,又 $f(0) = 1 > 0$,
 $f(0.3) = 0.3^{0.3} - \sqrt{0.3} = 0.3^{0.3} - 0.3^{0.5} > 0, f(0.5) = 0.3^{0.5} - \sqrt{0.5} = \sqrt{0.3} - \sqrt{0.5} < 0$,所以 $f(x)$ 的零点所在区间是 $(0.3, 0.5)$. 故选 B.]

2. 1.56 [注意到 $f(1.556 2) \approx -0.029$ 和 $f(1.562 5) \approx 0.003$,显然 $f(1.556 2)f(1.562 5) < 0$,又 $|1.556 2 - 1.562 5| = 0.006 3 < 0.01$,所以近似解可取 1.56.]

考点二

典例 2 (1)D (2)1 [(1)当 $x \leq 0$ 时, $x^2 - 1 = 0$,解得 $x = -1$;

当 $x > 0$ 时, $f(x) = x - 2 + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,并且 $f(1) = 1 - 2 + \ln 1 = -1 < 0$,

$f(2) = 2 - 2 + \ln 2 = \ln 2 > 0$,

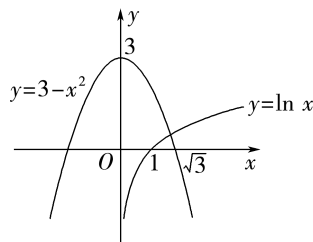
即 $f(1)f(2) < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内必有一个零点.

综上,函数 $f(x)$ 的零点个数为 2. 故选 D.

(2)令 $f(x) = 0$,可得方程 $\ln x + x^2 - 3 = 0$,即 $\ln x = 3 - x^2$,故原函数的零点个数即为函数 $y = \ln x$ 与 $y = 3 - x^2$ 图象的交点个数.

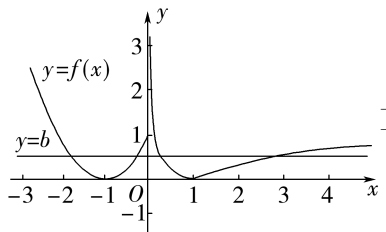
在同一平面直角坐标系中作出两个函数的大致图象(如图).



由图可知,函数 $y = 3 - x^2$ 与 $y = \ln x$ 的图象只有一个交点,故函数 $f(x) = \ln x + x^2 - 3$ 只有一个零点.]

考点三

考向 1 典例 3 A [依题意,函数 $g(x) = f(x) - b$ 有四个不同的零点,即方程 $f(x) = b$ 有四个解,转化为函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = b$ 有四个交点,由函数 $y = f(x)$ 的解析式可知,当 $x \in (-\infty, -1]$ 时,函数单调递减, $y \in [0, +\infty)$; 当 $x \in (-1, 0]$ 时,函数单调递增, $y \in (0, 1]$; 当 $x \in (0, 1)$ 时,函数单调递减, $y \in (0, +\infty)$; 当 $x \in [1, +\infty)$ 时,函数单调递增, $y \in [0, +\infty)$,结合图象,可知实数 b 的取值范围为 $(0, 1]$. 故选 A.



母题探究

$[0, 1)$ [由本例题的解题过程可知, $x_1 + x_2 = -2, x_3 x_4 = 1$,所以 $x_1 x_2 x_3 x_4 = x_1 x_2 = x_1(-2 - x_1) = -x_1^2 - 2x_1$,又 $-2 \leq x_1 < -1$,所以 $-x_1^2 - 2x_1 \in [0, 1)$,故 $x_1 x_2 x_3 x_4$ 的取值范围是 $[0, 1)$.]

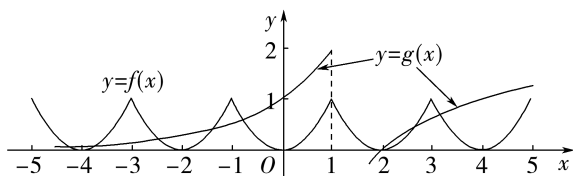
考向 2 典例 4 B [由 $y_1 = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $y_2 = x^2 + m$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,得函数 $f(x) = \log_2 x + x^2 + m$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

因为函数 $f(x) = \log_2 x + x^2 + m$ 在区间 $(1, 2)$ 上存在零点, 所以 $\begin{cases} f(1) < 0, \\ f(2) > 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \log_2 1 + 1^2 + m < 0, \\ \log_2 2 + 2^2 + m > 0, \end{cases}$ 解得 $-5 < m < -1$, 所以实数 m 的取值范围是 $(-5, -1)$.

故选 B.]

多维变迁

A [函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 在区间 $[-5, 5]$ 上恰有 8 个零点, 即函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 的图象在区间 $[-5, 5]$ 上有 8 个交点, 由 $f(x+2) = f(x)$ 知, $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上周期为 2 的函数, 作函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 在区间 $[-5, 5]$ 上的图象, 如图所示,



由图象知, 当 $x \in [-5, 1]$ 时, 图象有 5 个交点, 故在 $(1, 5]$ 上有 3 个交点即可,

故 $\begin{cases} \log_a(3-1) < 1, \\ \log_a(5-1) > 1, \end{cases}$ 解得 $2 < a < 4$. 故选 A.]

随堂·点对检测

1. B [$f(x) = x + \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \log_2 \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} - \log_2 3 < \frac{1}{3} - \log_2 2 = -\frac{2}{3} < 0,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \log_2 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0,$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} + \log_2 \frac{2}{3} = \frac{5}{3} - \log_2 3 = \frac{1}{3}(5 - 3\log_2 3) =$$

$$\frac{1}{3}(\log_2 32 - \log_2 27) > 0, \text{ 则函数 } f(x) = x + \log_2 x \text{ 的零点所}$$

在的区间为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$. 故选 B.]

2. C [由 $f(x) = \log_2 x - \sqrt{x} = 0$,

$$\text{得 } \log_2 x = \sqrt{x},$$

函数 $y = \log_2 x$ 与 $y = \sqrt{x}$ 都是 $(0, +\infty)$ 上的增函数,

$$\text{且 } \log_2 4 = \sqrt{4} = 2, \log_2 16 = \sqrt{16} = 4,$$

且当 $x > 16$ 时, 函数 $y = \sqrt{x}$ 比 $y = \log_2 x$ 增长的快,

则函数 $y = \sqrt{x}$ 与 $y = \log_2 x$ 的图象只有两个交点, 也就是函数 $f(x) = \log_2 x - \sqrt{x}$ 的零点个数是 2. 故选 C.]

3. $(4, +\infty)$ [令 $t = 2^x$, 则 $t > 0$, 且 $2^{2-x} = \frac{4}{t}$, 方程 $2^x +$

$$2^{2-x} - m = 0 \text{ 等价于 } t + \frac{4}{t} = m. \text{ 因为 } t = 2^x \text{ 与 } x \text{ 一一对应, 所}$$

$$\text{以关于 } t \text{ 的方程 } t + \frac{4}{t} = m \text{ 有两个正根, 即函数 } y = t + \frac{4}{t}$$

$(t > 0)$ 的图象与直线 $y = m$ 有两个交点, 结合对勾函数 $y =$

$$t + \frac{4}{t} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上的图象, 可知 } m > 4, \text{ 故 } m \text{ 的取值范围为}$$

$(4, +\infty)$.]

4. $(0, 3)$ [令 $f(x) = 0$, 则 $x \cdot 2^x - kx - 2 = 0$, 即 $k = 2^x - \frac{2}{x}$,

即 $y = k$ 与 $g(x) = 2^x - \frac{2}{x}$ 的图象在 $(1, 2)$ 内有交点. 因为

$y = 2^x$ 和 $y = -\frac{2}{x}$ 在 $(1, 2)$ 内单调递增, 所以 $g(x) = 2^x - \frac{2}{x}$ 在 $(1, 2)$ 内单调递增, 所以 $g(1) < g(x) < g(2)$, 即 $0 < g(x) < 3$, 所以 $0 < k < 3$, 即实数 k 的取值范围是 $(0, 3)$.]

第 20 课时 函数模型及其应用

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 递增 递增 越快 越慢 y 轴 x 轴

链教材·夯基固本

1. D [结合函数的性质可知, 几种函数模型中, 指数函数的增长速度最快. 故选 D.]

2. B [由题图可知, 函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 且散点分布在一条曲线附近,

函数 $y = a \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x + b$ 的图象为一条曲线, 且当 $a > 0$ 时, 该

函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 符合题意. 故选 B.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1)B (2)B [(1)水位由高变低, 排除 C, D. 流完半缸水前水位下降速度先快后慢, 流完半缸水后水位下降速度先慢后快.

(2)A 选项, 由散点图知身高 y 随时间 x 的变化不是线性增长, 故 A 错误; C 选项, 指数函数模型中 y 随 x 的增长越来越快, 与图象不符合; D 选项, 对数函数模型在 $x = 0$ 时没有意义; B 选项符合散点图中 y 随 x 的增长越来越慢, 且在 $x = 0$ 时有意义. 故选 B.]

考点二

典例 2 解: (1) 将 $x = 8\ 100$, $x_0 = 4$ 代入 $v =$

$$\frac{1}{2} \log_3 \frac{x}{100} - \lg x_0,$$

$$\text{得 } v = \frac{1}{2} \log_3 81 - \lg 4 = 2 - 2\lg 2 \approx 2 - 0.6 = 1.4,$$

所以候鸟的飞行速度约是 1.4 km/min.

(2) 设雄性候鸟每分钟的耗氧量为 x_1 , 雌性候鸟每分钟的耗氧量为 x_2 ,

$$\text{依题意可得 } \begin{cases} 2.5 = \frac{1}{2} \log_3 \frac{x_1}{100} - \lg x_0, \\ 1.5 = \frac{1}{2} \log_3 \frac{x_2}{100} - \lg x_0, \end{cases}$$

$$\text{两式相减可得 } 1 = \frac{1}{2} \log_3 \frac{x_1}{x_2}, \text{ 解得 } \frac{x_1}{x_2} = 9.$$

故此时雄性候鸟每分钟的耗氧量是雌性候鸟每分钟的耗氧量的 9 倍.

多维变迁

C [依题意可知, 当 $t = 0$ 时, $\mu(t) = 6.05$,

$$\text{即 } 6.05 = \lambda e^{-\frac{0}{7}} + 0.05, \text{ 解得 } \lambda = 6,$$

$$\text{所以 } \mu(t) = 6e^{-\frac{t}{7}} + 0.05,$$

$$\text{由 } \mu(t) = 6e^{-\frac{t}{7}} + 0.05 \leq 0.1, \text{ 得 } e^{-\frac{t}{7}} \leq \frac{1}{120},$$

$$\text{即 } -\frac{t}{7} \leq \ln \frac{1}{120}, \text{ 即 } \frac{t}{7} \geq \ln 120 = 3\ln 2 + \ln 3 + \ln 5 \approx 3 \times$$

$$0.7 + 1.1 + 1.6 = 4.8,$$

$$\text{所以 } t \geq 33.6, \text{ 又 } t \in \mathbf{N}, \text{ 所以 } t_{\min} = 34,$$

故至少需要放置的时间为 34 天.

故选 C.]

考点三

考向 1 典例 3 解:(1)由题意知,当 $0 \leq x \leq 8$ 时,

$$y = 0.6x + 0.2(14 - x) - \frac{1}{20}x^2 = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{14}{5},$$

当 $8 < x \leq 14$ 时,

$$y = 0.6x + 0.2(14 - x) - \frac{3x + 8}{10} = \frac{1}{10}x + 2,$$

$$\text{即 } y = \begin{cases} -\frac{1}{20}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{14}{5}, & 0 \leq x \leq 8, \\ \frac{1}{10}x + 2, & 8 < x \leq 14. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 当 } 0 \leq x \leq 8 \text{ 时, } y = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{14}{5} = -\frac{1}{20}(x - 4)^2 + \frac{18}{5},$$

$$\text{所以当 } x = 4 \text{ 时, } y_{\max} = \frac{18}{5}.$$

$$\text{当 } 8 < x \leq 14 \text{ 时, } y = \frac{1}{10}x + 2,$$

$$\text{所以当 } x = 14 \text{ 时, } y_{\max} = \frac{17}{5}.$$

$$\text{因为 } \frac{18}{5} > \frac{17}{5}, \text{ 所以当 } x = 4 \text{ 时, } y_{\max} = \frac{18}{5}.$$

所以当精加工蔬菜 4 吨时,总利润最大,最大利润为 3.6 万元.

考向 2 典例 4 解:(1)由题意可得, $y = (400 + kx^2) \times \frac{520}{x} = \frac{208\,000}{x} + 520kx, 0 < x \leq 100$.

(2)由“对勾函数”的性质可得 $y = \frac{208\,000}{x} + 520kx$ 在 $(0, \frac{20}{\sqrt{k}}]$ 上单调递减,在 $[\frac{20}{\sqrt{k}}, +\infty)$ 上单调递增,

又 $0 < x \leq 100$,

当 $0 < \frac{20}{\sqrt{k}} \leq 100$, 即 $k \geq \frac{1}{25}$ 时,

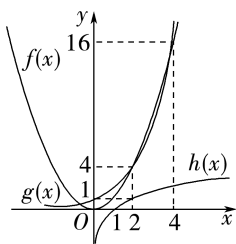
货车速度为 $\frac{20}{\sqrt{k}}$ km/h 时,全程运输成本最低;

当 $\frac{20}{\sqrt{k}} > 100$, 即 $0 < k < \frac{1}{25}$ 时,

货车速度为 100 km/h 时,全程运输成本最低.

随堂·对点检测

1. B [画出函数 $f(x) = x^2, g(x) = 2^x, h(x) = \log_2 x$ 的图象, 如图所示,



结合图象,可得三个函数 $f(x) = x^2, g(x) = 2^x, h(x) = \log_2 x$ 中,当 $x \in (4, +\infty)$ 时,函数 $g(x) = 2^x$ 增长速度最快, $h(x) = \log_2 x$ 增长速度最慢.

故选 B.]

2. A [由题意知 $C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} = \frac{2}{5}C_0$, 所以 $\frac{t}{5730} \lg \frac{1}{2} = \lg \frac{4}{10}$,

$$\text{所以 } t = 5730 \times \frac{1 - 2 \lg 2}{\lg 2} \approx 5730 \times \frac{1 - 2 \times 0.3010}{0.3010} \approx 7577,$$

所以可推断该生物死亡的时间约为公元前 7577 - 2025 = 5552 年.

故选 A.]

3. 解:(1)由题图可知每月销售量 y 与每件售价 x 之间为一次函数关系,

设其函数关系式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

将点 $(60, 600), (80, 400)$ 代入,

$$\text{得 } \begin{cases} 60k + b = 600, \\ 80k + b = 400, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = -10, \\ b = 1\,200, \end{cases}$$

所以每月销售量 y 与每件售价 x 之间的函数关系式为 $y = -10x + 1\,200$.

(2)根据题意得, $(-10x + 1\,200)(x - 50) = 10\,000$,

整理得 $x^2 - 170x + 7\,000 = 0$, 解得 $x_1 = 70, x_2 = 100$,

因为该防护品的每件利润不允许高于进货价的 50%,

所以 $x \leq 50 \times (1 + 50\%)$,

即 $x \leq 75$, 所以 $x = 70$.

所以当这种防护品每件的售价定为 70 元时,该主播每月的总利润可达到 10 000 元.

第三章 一元函数的导数及其应用

第 21 课时 导数的概念及其意义、导数的运算

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) $f'(x_0)$ $y'|_{x=x_0}$

知识点 2 斜率 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

知识点 3 $0 \quad ax^{a-1} \quad \cos x \quad -\sin x \quad a^x \ln a \quad e^x$

知识点 4 $f'(x) \pm g'(x) \quad f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad cf'(x)$

知识点 5 $y'_u \cdot u'_x$

链教材·夯基固本

1. $y = x + \frac{1}{3}$ [设 $y = f(x) = (3x - 1)^{\frac{1}{3}}$, 则 $f'(x) = 3 \times \frac{1}{3}(3x - 1)^{-\frac{2}{3}} = (3x - 1)^{-\frac{2}{3}}$, 则 $f'\left(\frac{2}{3}\right) = 1$, 因此曲线 $y = \sqrt[3]{3x - 1}$ 在点 $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ 处的切线方程为 $y - 1 = x - \frac{2}{3}$, 即 $y = x + \frac{1}{3}$.]

2. AD [对于 A, 因为 $y = x^5$, 所以 $y' = 5x^4$, 所以在 $x = 3$ 处的导数为 $5 \times 3^4 = 405$, 故 A 正确; 对于 B, 因为 $y = \ln x$, 所以 $y' = \frac{1}{x}$, 所以在 $x = \frac{2}{3}$ 处的导数为 $\frac{3}{2}$, 故 B 错误; 对于 C, 因为 $y = \sin x$, 所以 $y' = \cos x$, 所以在 $x = 2\pi$ 处的导数为 $\cos 2\pi = 1$, 故 C 错误; 对于 D, 因为 $y = e^x$, 所以 $y' = e^x$, 所以在 $x = 0$ 处的导数为 $e^0 = 1$, 故 D 正确. 故选 AD.]

3. $1 - \sqrt{2}$ [$f'(x) = -f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x - \cos x$,

$$\text{令 } x = \frac{\pi}{4}, \text{ 得 } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}f'\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{解得 } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}.]$$

4. ABC [选项 D 中, $\left(\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.]

考点一

典例 1 A $\left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+2\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = -6,\right.$

$$\text{则 } 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+2\Delta x) - f(2)}{2\Delta x} = 2f'(2) = -6,$$

解得 $f'(2) = -3$,

故在第 2 h 时,原油温度的瞬时变化率为 -3°C/h .

故选 A.]

多维变迁

D [因为 $f(x) = 2\ln x + 8x$, 所以 $f'(x) = \frac{2}{x} + 8$,

$$\text{所以 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x) - f(1)}{2\Delta x} = 2f'(1) = 20.$$

故选 D.]

考点二

典例 2 CD [对于 A 选项, $(e^{3x})' = e^{3x} \cdot (3x)' = 3e^{3x}$, A 错误;

$$\begin{aligned} \text{对于 B 选项, } \left(\frac{x^2}{2x+1}\right)' &= \frac{(x^2)' \cdot (2x+1) - x^2 \cdot (2x+1)'}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{2x \cdot (2x+1) - 2x^2}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x}{(2x+1)^2}, \text{B 错误;} \end{aligned}$$

对于 C 选项, $(2\sin x - 3)' = 2\cos x$, C 正确;

$$\text{对于 D 选项, } \left(\ln \frac{x}{2-x}\right)' = \frac{1}{\frac{x}{2-x}} \cdot \left(\frac{x}{2-x}\right)' = \frac{2-x}{x}.$$

$$\frac{2-x-x \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \frac{2}{x(2-x)}, \text{D 正确.}$$

故选 CD.]

考点三

考向 1 典例 3 解:第 1 步 算切点:切点已知直接用,切点未知,已知切点横坐标 x_0 ,应用关系式计算纵坐标 $y_0 = f(x_0)$.

第 2 步 求斜率:由导数的几何意义,得切线的斜率 $k = f'(x_0)$.

由题意得 $f'(x) = x^2$,

$\therefore$ 点 $P(2,4)$ 在曲线 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}$ 上,

$\therefore$ 曲线在点 $P(2,4)$ 处切线的斜率为 $k = f'(2) = 4$,

第 3 步 列方程:列出直线的点斜式方程 $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$\therefore$ 曲线在点 $P(2,4)$ 处的切线方程为 $y - 4 = 4(x - 2)$,

即 $4x - y - 4 = 0$.

母题探究

解:第 1 步 设切点:设曲线上的切点坐标为 $(x_0, f(x_0))$.

设曲线 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}$ 与过点 $P(2,4)$ 的直线相切于点

$$A\left(x_0, \frac{1}{3}x_0^3 + \frac{4}{3}\right),$$

第 2 步 求斜率:由导数的几何意义,得切线的斜率 $k = f'(x_0)$.

则切线的斜率为 $k = x_0^2$.

第 3 步 列方程:列出直线的点斜式方程 $y - f(x_0) = k(x - x_0)$.

$$\therefore \text{切线方程为 } y - \left(\frac{1}{3}x_0^3 + \frac{4}{3}\right) = x_0^2(x - x_0),$$

$$\text{即 } y = x_0^2 \cdot x - \frac{2}{3}x_0^3 + \frac{4}{3}.$$

第 4 步 代坐标:把已知点 (a,b) 代入上述方程,

$$\text{得 } b - f(x_0) = k(a - x_0).$$

$\therefore$ 点 $P(2,4)$ 在切线上,

$$\therefore 4 = 2x_0^2 - \frac{2}{3}x_0^3 + \frac{4}{3},$$

$$\text{即 } x_0^3 - 3x_0^2 + 4 = 0.$$

第 5 步 求参数 x_0 得切线方程.

$$\therefore x_0^3 + x_0^2 - 4x_0^2 + 4 = 0,$$

$$\therefore x_0^2(x_0 + 1) - 4(x_0 + 1)(x_0 - 1) = 0,$$

$$\therefore (x_0 + 1)(x_0 - 2)^2 = 0,$$

解得 $x_0 = -1$ 或 $x_0 = 2$.

故所求的切线方程为 $x - y + 2 = 0$ 或 $4x - y - 4 = 0$.

考向 2 典例 4 (1)D (2)4 [(1)因为 $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + b\ln x$,

$$\text{所以 } f'(x) = ax + \frac{b}{x}, \text{由题意得, } f(1) = \frac{a}{2} + b\ln 1 = 1,$$

$$f'(1) = a + b = -\frac{1}{2}, \text{解得 } b = -\frac{5}{2}, a = 2, \text{则 } a + 2b = 2 - 5 = -3. \text{ 故选 D.}$$

(2)设直线 $y = 2x + 5$ 与曲线 $y = e^x + x + a$ 的切点坐标为 $(x_0, e^{x_0} + x_0 + a)$, 由 $y = e^x + x + a$ 得 $y' = e^x + 1$, 所以 $y'|_{x=x_0} = e^{x_0} + 1 = 2$, 解得 $x_0 = 0$, 所以切点坐标为 $(0, 1 + a)$, 又切点 $(0, 1 + a)$ 在切线 $y = 2x + 5$ 上, 所以 $1 + a = 5$, 解得 $a = 4$.]

考题探源

解:对函数 $y = e^{2ax}$ 求导得 $y' = 2ae^{2ax}$.

在点 $(0,1)$ 处的切线斜率 $k = y'|_{x=0} = 2ae^0 = 2a$,

又切线与直线 $2x - y + 1 = 0$ 垂直,

$$\text{所以 } 2a \times 2 = -1, \text{解得 } a = -\frac{1}{4}.$$

多维变迁

1. C [由题可得, $f'(x) = e^x + a$,

则曲线在 $x = 0$ 处的切线的斜率为 $f'(0) = e^0 + a = 1 + a$,

又曲线 $f(x) = e^x + ax$ 在 $x = 0$ 处的切线与直线 $3x - 2y - 5 = 0$ 平行,

$$\text{则有 } 1 + a = \frac{3}{2}, \text{可得 } a = \frac{1}{2}.$$

故选 C.]

2. $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ [$\therefore y = (x+a)e^x$,

$$\therefore y' = (x+1+a)e^x,$$

设切点坐标为 (x_0, y_0) , 则 $y_0 = (x_0 + a)e^{x_0}$, 切线斜率 $k = (x_0 + 1 + a)e^{x_0}$,

$$\text{切线方程为 } y - (x_0 + a)e^{x_0} = (x_0 + 1 + a)e^{x_0}(x - x_0),$$

$$\therefore \text{切线过原点, } \therefore -(x_0 + a)e^{x_0} = (x_0 + 1 + a)e^{x_0}(-x_0),$$

$$\text{整理得 } x_0^2 + ax_0 - a = 0,$$

$$\therefore \text{切线有两条, } \therefore \Delta = a^2 + 4a > 0,$$

$$\text{解得 } a < -4 \text{ 或 } a > 0,$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -4) \cup (0, +\infty).]$$

微点突破 5

典例 5 (1)A (2)ln 2 [(1)由 $y = x^2 + 2\ln x$,

$$\text{得 } y' = 2x + \frac{2}{x}, \text{由 } 2x + \frac{2}{x} = 4, \text{解得 } x = 1,$$

梳必备·破题有方

知识点1 单调递增 单调递减 常数函数

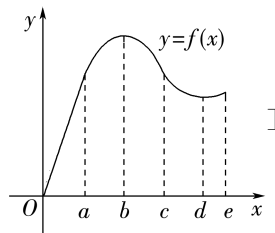
知识点2 定义域 零点

链教材·夯基固本

1. (0,1) (1,2) [由题图知,当 $x \in (0,1)$ 时, $f'(x) > 0$,当 $x \in (1,2)$ 时, $f'(x) < 0$,故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,1)$,单调递减区间是 $(1,2)$.]2. $(-\infty, -1), (\frac{1}{3}, +\infty)$ [$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > \frac{1}{3}$ 或 $x < -1$, 所以 $f(x) = x^3 + x^2 - x$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(\frac{1}{3}, +\infty)$.]3. C [由题图知,当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增;当 $x \in (0, x_1)$ 时, $f'(x) < 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 内单调递减;当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递增. 故选 C.]

考点深研·题型突破

考点一

典例1 (1)D (2)BD [(1)由函数的图象可知,当 $x < 0$ 时,函数单调递增,导数始终为正;当 $x > 0$ 时,函数先增后减再增,即导数先正后负再正,对照选项,应选 D.(2)由题图知,当 $0 < x < a$ 时, $f'(x) > 0$ 且为定值;当 $a < x < c$ 时, $f'(x)$ 单调递减,且在 $x \in (a, b)$ 内, $f'(x) > 0$, 在 $x \in (b, c)$ 内, $f'(x) < 0$; 当 $c < x < e$ 时, $f'(x)$ 单调递增,且在 $x \in (c, d)$ 内, $f'(x) < 0$, 在 $x \in (d, e)$ 内, $f'(x) > 0$, 所以当 $0 < x < a$ 时, $f(x)$ 单调递增且图象为斜率大于0的直线, 当 $a < x < b$ 时, $f(x)$ 单调递增, 当 $b < x < c$ 时, $f(x)$ 单调递减, 当 $c < x < d$ 时, $f(x)$ 单调递减, 当 $d < x < e$ 时, $f(x)$ 单调递增, 其大致图象如图. 故选 BD.

考点二

典例2 (1)BD (2)C [(1)对于 A, $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 其定义域为 $\{x | x \neq 0\}$,其导数 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, 在 $(-1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 内, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 不符合题意;对于 B, $f(x) = x + \sin x$, 其定义域为 $\mathbf{R}$,其导数 $f'(x) = 1 + \cos x$, 有 $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 在定义域上为增函数, 符合题意;对于 C, $f(x) = xe^x$, 其定义域为 $\mathbf{R}$,其导数 $f'(x) = xe^x + e^x = (1+x)e^x$, 在区间 $(-\infty, -1)$ 上, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 不符合题意;对于 D, $f(x) = e^x - e^{-x}$, 其定义域为 $\mathbf{R}$,其导数 $f'(x) = e^x + e^{-x}$, 易得 $f'(x) \geq 2 > 0$ 恒成立,则直线 $y = 4x + m$ 与曲线 $y = x^2 + 2\ln x$ 相切于点 $(1, 4 + m)$, $\therefore 4 + m = 1 + 2\ln 1 = 1$, 得 $m = -3$. $\therefore$ 直线 $y = 4x - 3$ 是曲线 $y = x^3 - nx + 13$ 的切线,由 $y = x^3 - nx + 13$, 得 $y' = 3x^2 - n$, 设切点为 $(t, t^3 - nt + 13)$,则 $3t^2 - n = 4$, 且 $t^3 - nt + 13 = 4t - 3$, 联立可得 $2t^3 = 16$, 解得 $t = 2$, 由 $n = 3t^2 - 4$, 得 $n = 8$. $\therefore n - m = 8 - (-3) = 11$.

故选 A.

(2)由 $y = e^x + x$ 得 $y' = e^x + 1$, 则 $y'|_{x=0} = e^0 + 1 = 2$,故曲线 $y = e^x + x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = 2x + 1$.由 $y = \ln(x+1) + a$ 得 $y' = \frac{1}{x+1}$,设切线与曲线 $y = \ln(x+1) + a$ 相切的切点为 $(x_0, \ln(x_0 + 1) + a)$,由两曲线有公切线得 $y' = \frac{1}{x_0 + 1} = 2$, 解得 $x_0 = -\frac{1}{2}$, 则切点为 $(-\frac{1}{2}, a + \ln \frac{1}{2})$,切线方程为 $y = 2(x + \frac{1}{2}) + a + \ln \frac{1}{2} = 2x + 1 + a - \ln 2$.因为两切线重合, 所以 $a - \ln 2 = 0$, 解得 $a = \ln 2$.]

随堂·对点检测

1. A [因为函数 $f(x) = e^x - x^2$,所以 $f'(x) = e^x - 2x$,所以 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = f'(1) = e - 2$.

故选 A.]

2. C [对于选项 A, 因为 $y = \pi^2$,所以 $y' = 0$, 故选项 A 错误;对于选项 B, 因为 $y = \log_2 x$,所以 $y' = \frac{1}{x \ln 2}$, 故选项 B 错误;对于选项 C, 因为 $y = e^{-2x}$,所以 $y' = e^{-2x} \cdot (-2x)' = -2e^{-2x}$, 故选项 C 正确;对于选项 D, 因为 $y = \cos \frac{x}{3}$,所以 $y' = -\sin \frac{x}{3} \cdot (\frac{x}{3})' = -\frac{1}{3} \sin \frac{x}{3}$, 故选项 D 错误. 故

选 C.]

3. A [设直线 $y = x + a$ 与曲线 $y = \ln(x+b)$ 相切于点 $(x_0,$ $y_0)$, 由导数的几何意义知, $y'|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0+b}$, 因为直线 $y =$ $x + a$ 的斜率为 1, 所以 $\frac{1}{x_0+b} = 1$, 即 $x_0 = 1 - b$.又切点 (x_0, y_0) 既在直线上又在曲线上,所以 $y_0 = x_0 + a$ 且 $y_0 = \ln(x_0 + b)$,即 $\ln(x_0 + b) = x_0 + a$.将 $x_0 = 1 - b$ 代入 $\ln(x_0 + b) = x_0 + a$,得 $\ln(1 - b + b) = 1 - b + a$, 即 $b - a = 1$.

故选 A.]

4. D [因为 $y = 5x + 8\ln x$, 所以 $y' = 5 + \frac{8}{x}$, 所以 $y'|_{x=1} = 13$,所以曲线 $y = 5x + 8\ln x$ 在点 $(1, 5)$ 处的切线方程为 $y - 5 = 13(x - 1)$, 则 $y = 13x - 8$. 故选 D.]

则 $f(x)$ 在定义域上为增函数,符合题意.

故选 BD.

$$(2) \because f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2,$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} - x = \frac{1-x^2}{x},$$

当 $f'(x) > 0$ 时,解得 $0 < x < 1$,

$\therefore$ 函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$.

故选 C.]

考点三

典例 3 解: 因为 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a+1)x + a \ln x$, 定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{所以 } f'(x) = x - (a+1) + \frac{a}{x} = \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x} = \frac{(x-1)(x-a)}{x}.$$

当 $0 < a < 1$ 时,令 $f'(x) > 0$,得 $0 < x < a$ 或 $x > 1$,

令 $f'(x) < 0$,得 $a < x < 1$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调递增,在 $(a, 1)$ 内单调递减,在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

当 $a = 1$ 时, $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ 恒成立,所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

当 $a > 1$ 时,令 $f'(x) > 0$,得 $0 < x < 1$ 或 $x > a$,令 $f'(x) < 0$,得 $1 < x < a$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递增,在 $(1, a)$ 内单调递减,在 $(a, +\infty)$ 上单调递增.

综上,当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调递增,在 $(a, 1)$ 内单调递减,在 $(1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递增,在 $(1, a)$ 内单调递减,在 $(a, +\infty)$ 上单调递增.

多维变迁

解: 由题意知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + a,$$

对于 $f'(x) = 0, \Delta = (-2)^2 - 4 \times 3a = 4(1-3a)$.

① 当 $a \geq \frac{1}{3}$ 时, $f'(x) \geq 0, f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

② 当 $a < \frac{1}{3}$ 时,令 $f'(x) = 0$,即 $3x^2 - 2x + a = 0$,

$$\text{解得 } x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-3a}}{3}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-3a}}{3},$$

令 $f'(x) > 0$,则 $x < x_1$ 或 $x > x_2$;

令 $f'(x) < 0$,则 $x_1 < x < x_2$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1), (x_2, +\infty)$ 上单调递增,在 (x_1, x_2) 内单调递减.

综上,当 $a \geq \frac{1}{3}$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a < \frac{1}{3}$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1 - \sqrt{1-3a}}{3})$,

$(\frac{1 + \sqrt{1-3a}}{3}, +\infty)$ 上单调递增,

在 $(\frac{1 - \sqrt{1-3a}}{3}, \frac{1 + \sqrt{1-3a}}{3})$ 内单调递减.

随堂·对点检测

1. **B** [$f(x) = xe^{-x}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 导函数 $f'(x) = (1-x)e^{-x}$,

由 $f'(x) > 0$,得 $x < 1$,因此 $f(x) = xe^{-x}$ 的单调递增区间是 $(-\infty, 1)$.

故选 B.]

2. **C** [根据题意,由 $f(x)$ 的图象, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减,在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增,

得当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) < 0$,当 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

对于函数 $y = xf'(x)$,在 $(-\infty, -1)$ 上,必有 $xf'(x) > 0$,

在 $(-1, 0)$ 上,必有 $xf'(x) < 0$,

在 $(0, +\infty)$ 上,必有 $xf'(x) > 0$,

分析可知选项 C 符合.

故选 C.]

3. **解:** 函数 $f(x) = e^x - ax$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = e^x - a$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) = e^x - a > 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时,由 $f'(x) > 0$,解得 $x > \ln a$;

由 $f'(x) < 0$,解得 $x < \ln a$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减,在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增,

综上所述,当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减,在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

第 23 课时 函数单调性的应用

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 D [法一: 因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f'(x) \geq 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

因为 $f(x) = kx - \ln x$,

$$\text{所以 } f'(x) = k - \frac{1}{x} \geq 0, \text{ 即 } k \geq \frac{1}{x}.$$

因为 $x > 1$,所以 $0 < \frac{1}{x} < 1$,所以 $k \geq 1$. 故选 D.

$$\text{法二: } f'(x) = k - \frac{1}{x} = \frac{kx-1}{x} (x > 0),$$

当 $k \leq 0$ 时, $f'(x) = k - \frac{1}{x} < 0, f(x)$ 在其定义域内单调递减,不合题意,

当 $k > 0$ 时,由 $f'(x) > 0$ 知 $x > \frac{1}{k}$,即 $(\frac{1}{k}, +\infty)$ 是 $f(x)$ 的单调递增区间. 由题意可知 $\frac{1}{k} \leq 1$,即 $k \geq 1$,故选 D.]

母题探究

1.1 [由本例法二知 $\frac{1}{k} = 1, \therefore k = 1$.]

2. $(-\infty, 0]$ [由题意知 $f'(x) = \frac{kx-1}{x} \leq 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,即 $k \leq \frac{1}{x}$,又 $x > 1$,

$\therefore 0 < \frac{1}{x} < 1, \therefore k \leq 0$,即 k 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.]

3. $(0, 1)$ [法一: 由本例及母题探究 2 知, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调,则 $k \leq 0$ 或 $k \geq 1, \therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上不单调,则 $0 < k < 1$. 即 k 的取值范围是 $(0, 1)$.

法二: 因为 $f(x) = kx - \ln x$,

所以 $f'(x) = k - \frac{1}{x} = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上有解, 即 $y = k$ 和 $y = \frac{1}{x}$ 的图象在 $(1, +\infty)$ 内有交点. 因为当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $\frac{1}{x} \in (0, 1)$, 所以 k 的取值范围是 $(0, 1)$.]

4. $(-\infty, 1)$ [由题意可知 $f'(x) = \frac{kx-1}{x} < 0$ 在 $(1, +\infty)$ 内有解, 即 $k < \frac{1}{x}$, $x \in (1, +\infty)$ 有解, 由 $0 < \frac{1}{x} < 1$ 可知 $k < 1$, 即 k 的取值范围是 $(-\infty, 1)$.]

5. $(-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$ [$\because x \in (1, 2)$,

$$\therefore \frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 1,$$

若 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内单调递增, 则 $f'(x) = \frac{kx-1}{x} \geq 0$ 恒成立,

$$\text{即 } k \geq \frac{1}{x}, \therefore k \geq 1;$$

若 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内单调递减, 则 $f'(x) = \frac{kx-1}{x} \leq 0$ 恒成立,

$$\text{即 } k \leq \frac{1}{x}, \therefore k \leq \frac{1}{2}.$$

$\therefore f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内单调, 则 k 的取值范围是 $(-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$.]

考点二

典例 2 B [因为 $f(x) = x - \sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

所以 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ 恒成立,

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

又根据 $f(-x) = -x - \sin(-x) = -x + \sin x = -f(x)$,

因此 $f(x)$ 为奇函数,

又 $f(\log_2 m) + f(-1) < 0 \Rightarrow f(\log_2 m) < -f(-1) = f(1)$,

则 $\log_2 m < 1$, 解得 $m \in (0, 2)$.

故选 B.]

多维变迁

B [设 $g(x) = f(x) - 2x + 1$,

因为 $f(2) = 3$,

所以 $g(2) = f(2) - 3 = 0$,

$g'(x) = f'(x) - 2$, 因为 $f'(x) > 2$,

所以 $g'(x) > 0$,

所以函数 $g(x) = f(x) - 2x + 1$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

因此由 $f(x) > 2x - 1 \Rightarrow g(x) > 0 = g(2) \Rightarrow x > 2$.

故选 B.]

考点三

典例 3 A [已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x) = (x^2 + 1)e^x$, $x \in \mathbf{R}$,

$$\text{则 } \begin{cases} x^2 + 1 \geq 1, \\ e^x > 0, \end{cases} \quad x \in \mathbf{R} \Rightarrow f'(x) > 0,$$

所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

选项 $x = 2, x = e, x = \pi$ 大小顺序为 $2 < e < \pi$.

所以 $f(2) < f(e) < f(\pi)$.

故选 A.]

多维变迁

A [当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) = \sin x + x \cos x > 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递增,

由题知 $f(-x) = (-x) \cdot \sin(-x) = x \sin x = f(x)$,

则函数 $f(x)$ 是偶函数,

$$\text{故 } f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{因为 } 0 < \frac{\pi}{5} < 1 < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } f\left(\frac{\pi}{5}\right) < f(1) < f\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{即 } f\left(-\frac{\pi}{3}\right) > f(1) > f\left(\frac{\pi}{5}\right). \text{ 故选 A.}]$$

随堂·对点检测

1. D [因为 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$,

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

因此 $f(3) > f(2) > f(1)$.

故选 D.]

2. D [$\because$ 函数 $f(x) = x^2 + 2x + a \ln x$ 在 $(0, 1)$ 内单调递减,

$$\therefore \text{当 } x \in (0, 1) \text{ 时, } f'(x) = 2x + 2 + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 + 2x + a}{x} \leq 0,$$

$\therefore g(x) = 2x^2 + 2x + a \leq 0$ 在 $x \in (0, 1)$ 时恒成立,

$\therefore g(0) \leq 0, g(1) \leq 0$, 即 $a \leq -4$.

故选 D.]

3. B [由题意可知 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$\text{因为 } f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - 1 = -\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 \leq 0 \text{ 恒成立,}$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

由 $f(2x-1) < f(1-x)$,

$$\text{可得 } \begin{cases} 2x-1 > 0, \\ 1-x > 0, \\ 2x-1 > 1-x, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \frac{2}{3} < x < 1, \text{ 即原不等式的解集为 } \left(\frac{2}{3}, 1\right). \text{ 故选 B.}]$$

4. $[-3, 0]$ [$f'(x) = 3x^2 + 2ax - a \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 所以 $4a^2 + 12a \leq 0$, 解得 $-3 \leq a \leq 0$.]

* 第 24 课时 导数中的构造问题(进阶课)

类型一

技法 1 典例 1 B [构造函数 $y = xf(x)$, $x \in (0, +\infty)$, 则

$$y' = f(x) + xf'(x) < 0,$$

所以函数 $y = xf(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

又因为 $f(x+1) > (x-1)f(x^2-1)$, 所以 $(x+1)f(x+1) > (x^2-1)f(x^2-1)$,

所以 $x+1 < x^2-1$, 且 $x^2-1 > 0, x+1 > 0$, 解得 $x > 2$ 或 $x < -1$ (舍去),

所以不等式 $f(x+1) > (x-1)f(x^2-1)$ 的解集是 $(2, +\infty)$.]

母题探究

$$\text{解: 设 } g(x) = \frac{f(x)}{x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2},$$

$\because f(x) < xf'(x), \therefore g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

由 $(x^2+1)f(2x+1) > (2x+1)f(x^2+1)$ 得,

$$\frac{f(2x+1)}{2x+1} > \frac{f(x^2+1)}{x^2+1},$$

即 $g(2x+1) > g(x^2+1)$,

$$\therefore \begin{cases} 2x+1 > 0, \\ 2x+1 > x^2+1, \end{cases} \text{解得 } 0 < x < 2.$$

即不等式 $(x^2+1)f(2x+1) > (2x+1) \cdot f(x^2+1)$ 的解集为 $(0, 2)$.

技法 2 典例 2 A [令 $h(x) = e^x f(x)$,

$$\text{则 } h'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x [f(x) + f'(x)] > 0,$$

所以函数 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

$$\text{故 } h(-2.026) < h(0), \text{即 } e^{-2.026} f(-2.026) < e^0 f(0),$$

$$\text{即 } e^{-2.026} f(-2.026) < f(0).$$

$$\text{同理, } h(2.026) > h(0), \text{即 } e^{2.026} f(2.026) > f(0), \text{故选 A.}]$$

母题探究

$$\text{解: 令 } g(x) = \frac{f(x)}{e^x},$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x},$$

因为对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f'(x) > f(x)$, 所以 $g'(x) > 0$, 即 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

$$\text{所以 } g(-2.026) < g(0),$$

$$\text{即 } \frac{f(-2.026)}{e^{-2.026}} < \frac{f(0)}{e^0},$$

$$\text{所以 } e^{2.026} f(-2.026) < f(0).$$

技法 3 典例 3 BD [构造函数 $F(x) = \frac{f(x)}{\cos x}$,

$$\text{依题意, 当 } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 时,}$$

$$F'(x) = \frac{f'(x)\cos x + f(x)\sin x}{\cos^2 x} > 0,$$

故函数 $F(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增.

$$\text{由 } F(0) < F\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ 得 } \frac{f(0)}{\cos 0} < \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos \frac{\pi}{4}},$$

$$\text{即 } f(0) < \sqrt{2} f\left(\frac{\pi}{4}\right), \text{排除 A;}$$

$$\text{由 } F\left(\frac{\pi}{3}\right) > F\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ 得 } \frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos \frac{\pi}{3}} > \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos \frac{\pi}{4}},$$

$$\text{即 } \sqrt{2} f\left(\frac{\pi}{3}\right) > f\left(\frac{\pi}{4}\right), \text{B 正确;}$$

$$\text{由 } F(0) < F\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ 得 } \frac{f(0)}{\cos 0} < \frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos \frac{\pi}{3}},$$

$$\text{即 } f(0) < 2f\left(\frac{\pi}{3}\right), \text{排除 C;}$$

$$\text{由 } F\left(-\frac{\pi}{3}\right) < F\left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ 得 } \frac{f\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} < \frac{f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)},$$

$$\text{即 } \sqrt{2} f\left(-\frac{\pi}{3}\right) < f\left(-\frac{\pi}{4}\right), \text{D 正确.}]$$

类型二

典例 4 C [由 $a e = e^a, b e^{1.2} = 1.2 e^b, c e^{1.6} = 1.6 e^c$,

$$\text{得 } \frac{a}{e^a} = \frac{1}{e}, \frac{b}{e^b} = \frac{1.2}{e^{1.2}}, \frac{c}{e^c} = \frac{1.6}{e^{1.6}}.$$

$$\text{令 } f(x) = \frac{x}{e^x}, \text{则 } f'(x) = \frac{1-x}{e^x},$$

$$\text{当 } x < 1 \text{ 时, } f'(x) > 0;$$

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时, } f'(x) < 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{于是 } f(1) > f(1.2) > f(1.6),$$

$$\text{即 } f(a) > f(b) > f(c),$$

$$\text{又 } a, b, c \in [0, 1], \text{所以 } a > b > c. \text{ 故选 C.}]$$

第 25 课时 导数与函数的极值

理法先行 · 题练固本

梳必备 · 破题有方

知识点 (1) $f'(x) < 0$ $f'(x) > 0$

(2) $f'(x) > 0$ $f'(x) < 0$ (3) 极值点 极值

链教材 · 夯基固本

1. x_2, x_4 [因为 x_2, x_4 处的导数都为零, 且这两点左右两侧的导数值异号, 所以 x_2, x_4 是函数的极值点. 因为当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (x_2, x_3)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 x_2 是极大值点. 因为当 $x \in (x_3, x_4)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (x_4, x_5)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 x_4 是极小值点.]

$$2. \frac{28}{3} - \frac{4}{3} \text{ [因为 } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4,$$

$$\text{所以 } f'(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2),$$

$$\text{由 } f'(x) > 0, \text{得 } x < -2 \text{ 或 } x > 2,$$

$$\text{由 } f'(x) < 0, \text{得 } -2 < x < 2,$$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2), (2, +\infty)$ 上单调递增,

在 $(-2, 2)$ 内单调递减, 故 $f(x)$ 的极大值为 $f(-2) = \frac{28}{3}$, 极

$$\text{小值为 } f(2) = -\frac{4}{3}.]$$

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 CD [对于选项 A, 由题图知, 当 $x \in (-3, 1)$ 时, $f'(x)$ 的符号有正有负,

$f(x)$ 不是单调函数, 所以选项 A 错误;

对于选项 B, 由题图知, 当 $x \in (1, 2)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 所以选项 B 错误;

对于选项 C, 由题图知 $f'(2) = 0$, 且在 $x = 2$ 左侧附近, $f'(x) > 0$, 在 $x = 2$ 右侧附近, $f'(x) < 0$, 所以 $x = 2$ 是极大值点, $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取到极大值, 所以选项 C 正确;

对于选项 D, 由题图知 $f'(4) = 0$, 且在 $x = 4$ 左侧附近, $f'(x) < 0$, 在 $x = 4$ 右侧附近, $f'(x) > 0$, 所以 $x = 4$ 是极小值点, $f(x)$ 在 $x = 4$ 处取到极小值, 所以选项 D 正确.

故选 CD.]

考点二

典例 2 解: 由题意知 $g(x) = ax - \ln(x+1)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$,

$$\text{则 } g'(x) = a - \frac{1}{x+1},$$

① 当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) = a - \frac{1}{x+1}$ 恒小于 0, 无极值;

② 当 $a > 0$ 时, 令 $g'(x) = a - \frac{1}{x+1} > 0$, 则 $x > \frac{1}{a} - 1$, 当 x 变化时, $g'(x), g(x)$ 的变化情况如表所示.

x	$\left(-1, \frac{1}{a}-1\right)$	$\frac{1}{a}-1$	$\left(\frac{1}{a}-1, +\infty\right)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以当 $x > \frac{1}{a}-1$ 时, $g(x)$ 单调递增, 当 $-1 < x < \frac{1}{a}-1$ 时, $g(x)$ 单调递减,

所以 $g(x)$ 在 $x = \frac{1}{a}-1$ 处取得极小值 $g\left(\frac{1}{a}-1\right) = 1-a + \ln a$, 无极大值.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $g(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上无极值;

当 $a > 0$ 时, $g(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上有极小值 $g\left(\frac{1}{a}-1\right) = 1-a + \ln a$, 无极大值.

多维变迁

解: (1) 因为 $f(x) = x + \frac{f'(1)}{2} \ln x + \frac{3}{x}, x > 0$,

所以 $f'(x) = 1 + \frac{f'(1)}{2x} - \frac{3}{x^2}$,

所以 $f'(1) = 1 + \frac{f'(1)}{2} - 3$, 解得 $f'(1) = -4$.

(2) 由 (1) 可知 $f(x) = x - 2 \ln x + \frac{3}{x}, x > 0$,

所以 $f'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{x^2}$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$ (舍去) 或 $x = 3$,

所以当 x 变化时, $f(x), f'(x)$ 的变化情况如表所示.

x	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	$4-2\ln 3$	单调递增

所以 $f(x)$ 仅有极小值为 $f(3) = 4-2\ln 3$, 无极大值.

考点三

典例 3 (1) A (2) $-\frac{11}{4}$ [(1) 第 1 步 极值点导数为 0; 可导

函数存在极值的必要条件是极值点一阶导数为 0.

由函数 $f(x) = x(x-c)^2$,

可得 $f'(x) = (x-c)^2 + 2x(x-c) = (x-c) \cdot (3x-c)$,

因为函数 $f(x)$ 在 $x = -2$ 处取得极小值,

可得 $f'(-2) = 0$,

第 2 步 求解: 求方程或方程组的解.

即 $(-2-c)(-6-c) = 0$,

解得 $c = -2$ 或 $c = -6$,

第 3 步 检验: 出现多解时, 检验是否符合题中的极值情况.

当 $c = -2$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x < -2$ 或 $x > -\frac{2}{3}$;

令 $f'(x) < 0$, 解得 $-2 < x < -\frac{2}{3}$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递增, 在 $(-2, -\frac{2}{3})$ 内

单调递减, 在 $(-\frac{2}{3}, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x = -2$ 处取极大值, 不符合题意, 舍去.

当 $c = -6$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 可得 $x < -6$ 或 $x > -2$;

令 $f'(x) < 0$, 可得 $-6 < x < -2$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -6)$ 上单调递增, 在 $(-6, -2)$ 内单调递减, 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x = -2$ 处取极小值, 符合题意.

综上所述, $c = -6$. 故选 A.

(2) 对 $f(x) = b \ln x + \frac{3}{2}x^2 + 2ax + a^2 - 3a$ 求导, 得 $f'(x) =$

$\frac{b}{x} + 3x + 2a$,

依题意得 $\begin{cases} f(1) = \frac{27}{2}, \\ f'(1) = 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} a^2 - a + \frac{3}{2} = \frac{27}{2}, \\ b + 2a + 3 = 0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a = 4, \\ b = -11 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = -3, \\ b = 3. \end{cases}$

当 $a = 4, b = -11$ 时, $f(x) = -11 \ln x + \frac{3}{2}x^2 + 8x + 4, x > 0$,

$f'(x) = -\frac{11}{x} + 3x + 8 = \frac{3x^2 + 8x - 11}{x} = \frac{(x-1)(3x+11)}{x}$,

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递减, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

即 $x = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极小值 $f(1) = \frac{27}{2}$, 符合题意, 此

时 $\frac{b}{a} = -\frac{11}{4}$;

当 $a = -3, b = 3$ 时, $f(x) = 3 \ln x + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 18, x > 0$,

$f'(x) = \frac{3}{x} + 3x - 6 = \frac{3x^2 - 6x + 3}{x} = \frac{3(x-1)^2}{x} \geq 0$, 即函数

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 无极值, 与题意不符, 舍去.]

多维变迁

BCD [因为函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} (a \neq 0)$, 所以函数

$f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{ax^2 - bx - 2c}{x^3}$, 因为函数

$f(x)$ 既有极大值也有极小值, 则函数 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个变号零点, 而 $a \neq 0$, 所以关于 x 的方程 $ax^2 - bx - 2c = 0$

有两个不等的正实根 x_1, x_2 , 则 $\begin{cases} \Delta > 0, \\ x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} b^2 + 8ac > 0, \\ \frac{b}{a} > 0, \\ -\frac{2c}{a} > 0, \end{cases}$

所以 $\begin{cases} b^2 + 8ac > 0, \\ ab > 0, \\ ac < 0, \\ bc < 0. \end{cases}$

故选 BCD.]

微点突破 6

典例 4 解: (1) 函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

$f'(x) = (x+1)'e^x + (x+1)(e^x)'$

$= e^x + (x+1)e^x$

$= (x+2)e^x$.

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -2$.

$f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表所示.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	$-\frac{1}{e^2}$	单调递增

所以, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -2)$ 上单调递减, 在区间 $(-2, +\infty)$ 上单调递增.

当 $x = -2$ 时, $f(x)$ 有极小值 $f(-2) = -\frac{1}{e^2}$.

(2) 令 $f(x) = 0$, 解得 $x = -1$.

当 $x < -1$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x > -1$ 时, $f(x) > 0$.

所以, $f(x)$ 的图象经过特殊点 $A(-2, -\frac{1}{e^2})$, $B(-1, 0)$, $C(0, 1)$.

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 与一次函数相比, 指数函数 $y = e^{-x}$ 呈爆炸性增长, 从而 $f(x) = \frac{x+1}{e^{-x}} \rightarrow 0$;

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty, f'(x) \rightarrow +\infty$.

根据以上信息, 画出 $f(x)$ 的大致图象如图所示.

(3) 方程 $f(x) = a (a \in \mathbf{R})$ 的解的个数为函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = a$ 的交点个数.

由(1)及图可得, 当 $x = -2$ 时, $f(x)$ 有最小值 $f(-2) = -\frac{1}{e^2}$.

所以, 关于方程 $f(x) = a (a \in \mathbf{R})$ 的解的个数有如下结论:

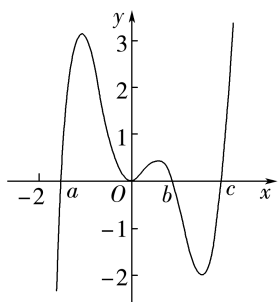
当 $a < -\frac{1}{e^2}$ 时, 解为 0 个;

当 $a = -\frac{1}{e^2}$ 或 $a \geq 0$ 时, 解为 1 个;

当 $-\frac{1}{e^2} < a < 0$ 时, 解为 2 个.

随堂·对点检测

1. C [如图, 设 $f'(x)$ 与 x 轴的交点的横坐标为 $a, 0, b, c$, 其中 $a < 0 < b < c$,



由图象可得 $x < a$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $a < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $0 < x < b$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $b < x < c$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > c$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $x = a, x = c$ 是 $f(x)$ 的极小值点, $x = b$ 是 $f(x)$ 的极大值点,

故 $f(x)$ 极小值点的个数为 2.

故选 C.]

2. A $[f'(x) = \cos x + \frac{1}{2},$

由 $f'(x) = 0$, 得 $\cos x = -\frac{1}{2}$, 结合 $x \in (0, \pi)$, 可得 $x = \frac{2\pi}{3}$,

因为当 $x \in (0, \frac{2\pi}{3})$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (\frac{2\pi}{3}, \pi)$ 时, $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{2\pi}{3})$ 内单调递增, 在 $(\frac{2\pi}{3}, \pi)$ 内单调递减,

可知当 $x = \frac{2\pi}{3}$ 时, $f(x)$ 取得极大值, 极大值为 $f(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} +$

$\frac{\pi}{3}$, 无极小值.

故选 A.]

3. A [函数 $f(x) = (x-a^2)(x-1)^2$,

则 $f'(x) = (x-1)^2 + 2(x-a^2)(x-1) = (x-1)(3x-1-2a^2)$,

令 $f'(x) = 0$, 可得 $x = 1$ 或 $x = \frac{1+2a^2}{3}$,

因为函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值,

所以在 $x = 1$ 两侧导数需满足左负右正,

所以 $\frac{1+2a^2}{3} < 1$, 解得 $-1 < a < 1$. 故选 A.]

4. -4 $[f'(x) = (x-2)'[(x-1)(x-a)] + (x-2)[(x-1)(x-a)]' = (x-1)(x-a) + (x-2)[(x-1) + (x-a)]'$, 因为 $x = 2$ 是函数 $f(x)$ 的极值点, 所以 $f'(2) = 0$, 即 $(2-1)(2-a) = 0$, 则 $a = 2$, 经检验, 满足题意, 所以 $f(x) = (x-1)(x-2)^2$, 所以 $f(0) = -4$.]

第 26 课时 导数与函数的最值

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (2) $f(a)$ $f(b)$ $f(a)$ $f(b)$

知识点 2 (1) 极值 (2) 最大 最小

链教材·夯基固本

1. $\frac{134}{27}$ -10 $[f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2) \cdot (x+2),$

因为 $x \in [-\frac{1}{3}, 1]$, 所以 $f'(x) < 0$,

故 $f(x)$ 在 $[-\frac{1}{3}, 1]$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(-\frac{1}{3}) = \frac{134}{27}$, 最小值为 $f(1) = -10$.]

2. 1.2 1.8 [设该容器底面矩形短边的长为 x m, 则另一边的

长为 $(x+0.5)$ m, 此容器的高为 $y = \frac{14.8}{4} - x - (x+0.5) =$

$3.2 - 2x$, 则此容器的容积为 $V(x) = x(x+0.5)(3.2 - 2x) = -2x^3 + 2.2x^2 + 1.6x$, 其中 $0 < x < 1.6$. 令 $V'(x) =$

$-6x^2 + 4.4x + 1.6 = 0$, 得 $x_1 = 1, x_2 = -\frac{4}{15}$ (舍去). 因为

$V(x)$ 在 $(0, 1.6)$ 内只有一个极值点, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $V'(x) > 0$, 函数 $V(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1, 1.6)$ 时, $V'(x) < 0$, 函数 $V(x)$ 单调递减, 所以 $V(x)_{\max} = V(1) = 1 \times (1 + 0.5) \times (3.2 - 2 \times 1) = 1.8 (\text{m}^3)$, 即当高为 1.2 m 时, 长方体容器的容积最大, 且最大容积为 1.8 m^3 .]

3. $2e^2$ [由题意得, $f'(x) = \ln x + 1$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{e}$,

所以当 $\frac{1}{e} < x \leq e^2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, e^2]$ 上单调递

增, 故 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, e^2]$ 上的最大值为 $f(e^2) = e^2 \ln e^2 = 2e^2$.]

考点深研·题型突破

考点一

考向 1 典例 1 解: 因为 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$,

所以 $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$,

令 $f'(x) = 0$, 即 $(3x+1)(x-1) = 0$, 解得 $x = -\frac{1}{3}$ 或 $x = 1$,

列表如下:

x	$[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}, 1)$	1	$(1, 2]$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增		单调递减		单调递增

当 $x \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (-\frac{1}{3}, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (1, 2]$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(-\frac{1}{3}) = \frac{32}{27}$, $f(x)$ 的极小值为 $f(1) = 0$,

又 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{9}{8}$, $f(2) = 3$,

所以函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-\frac{1}{2}, 2]$ 上的最大值为 3, 最小值为 0.

考向 2 典例 2 解: $f'(x) = 3x^2 - 2ax - a^2 = (3x+a)(x-a)$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -\frac{a}{3}$, $x_2 = a$.

① 当 $a > 0$ 时, $3x+a > 0$, 令 $f'(x) > 0$, 则 $x > a$, 令 $f'(x) < 0$, 则 $0 \leq x < a$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, a)$ 上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增. 所以 $f(x)_{\min} = f(a) = -a^3$;

② 当 $a = 0$ 时, $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\min} = f(0) = 0$;

③ 当 $a < 0$ 时, $x-a > 0$, 令 $f'(x) > 0$, 则 $x > -\frac{a}{3}$,

令 $f'(x) < 0$, 则 $0 \leq x < -\frac{a}{3}$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, -\frac{a}{3})$ 上单调递减, 在 $(-\frac{a}{3}, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\min} = f(-\frac{a}{3}) = \frac{5}{27}a^3$.

综上所述, 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $-a^3$;

当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 的最小值为 0;

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $\frac{5}{27}a^3$.

母题探究

解: $f'(x) = (3x+a)(x-a) (a > 0)$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -\frac{a}{3}$, $x_2 = a$.

所以 $f(x)$ 在 $[-a, -\frac{a}{3})$ 上单调递增,

在 $(-\frac{a}{3}, a)$ 内单调递减, 在 $(a, 2a]$ 上单调递增.

因为 $f(-a) = -a^3$, $f(-\frac{a}{3}) = \frac{5}{27}a^3$,

$f(a) = -a^3$, $f(2a) = 2a^3$.

所以 $f(x)_{\max} = f(2a) = 2a^3$,

$f(x)_{\min} = f(-a) = f(a) = -a^3$.

考点二

典例 3 A $[f'(x) = \frac{2ax(x-1)-ax^2}{(x-1)^2} = \frac{ax(x-2)}{(x-1)^2}$, 且 $x \in$

$(1, +\infty)$,

当 $a = 0$ 时, 不符合题意;

当 $a > 0$ 时, 若 $x \in (1, 2)$, 则 $f'(x) < 0$, 此时函数 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内单调递减,

若 $x \in (2, +\infty)$, 则 $f'(x) > 0$, 此时函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

此时 $f(x)$ 无最大值, 不符合题意;

当 $a < 0$ 时, 若 $x \in (1, 2)$, 则 $f'(x) > 0$, 此时函数 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内单调递增,

若 $x \in (2, +\infty)$, 则 $f'(x) < 0$, 此时函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极大值, 也是最大值, 即 $f(2) = 4a = -8$,

解得 $a = -2$, 符合题意.

综上所述, $a = -2$.

故选 A.]

多维变迁

A [由题意得 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.

当 $f'(x) > 0$ 时, 得 $x < 0$ 或 $x > 2$,

当 $f'(x) < 0$ 时, 得 $0 < x < 2$,

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, 2)$,

即 $x = 2$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极小值 $f(2) = -1$, 画出 $f(x)$ 的图象如图.

当 $x^3 - 3x^2 + 3 = -1$ 时, $(x+1)(x-2)^2 = 0$,

解得 $x = -1$ 或 $x = 2$,

故要使函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ 在区间 $(a, a+6)$ 内存在最小值,

需有 $\begin{cases} a+6 > 2, \\ -1 \leq a < 2, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq a < 2$,

即实数 a 的取值范围为 $[-1, 2)$.

故选 A.]

考点三

典例 4 5 [由题意, 利润 $g(x) = f(x) - 2 - x$, 且 $0 \leq x \leq 10$,

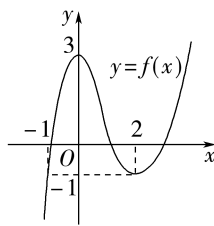
所以 $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - 2$,

则 $g'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x = \frac{x}{2}(5-x)$,

当 $0 \leq x < 5$ 时, $g'(x) \geq 0$, 即 $g(x)$ 在 $[0, 5)$ 上单调递增;

当 $5 < x \leq 10$ 时, $g'(x) < 0$, 即 $g(x)$ 在 $(5, 10]$ 上单调递减,

所以当 $x = 5$ 时, 利润最大.]



多维变迁

225 [设产品单价为 m 万元, 则 $m^2 = \frac{k}{x}$ (其中 k 为非零常数),

所以 $50^2 = \frac{k}{100}$, 故 $k = 250\,000$.

记生产 x 件产品时, 总利润为 $f(x)$, 则

$$f(x) = mx - C(x) = 500\sqrt{x} - 1\,200 - \frac{1}{27}x^2, x > 0, f'(x) = \frac{250}{\sqrt{x}} - \frac{2}{27}x.$$

由 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 225$; 由 $f'(x) < 0$, 得 $x > 225$.

故函数 $f(x)$ 在 $(0, 225)$ 内单调递增, 在 $(225, +\infty)$ 上单调递减.

因此, 当 $x = 225$ 时, $f(x)$ 取最大值, 即产量定为 225 件时, 总利润最大.]

随堂·对点检测

1. C [根据函数 $f(x) = xe^x$, 得 $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$, 因此当 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减, 所以当 $x = -1$ 时, 函数 $f(x)$ 有最小值, 即 $f(-1) = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e}$.

故选 C.]

2. C [由 $f'(x) = x^2 + 2x$, 令 $f'(x) = 0$, 可得 $x = -2$ 或 $x = 0$, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x < -2$ 或 $x > 0$, 由 $f'(x) < 0$ 得 $-2 < x < 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$, $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-2, 0)$ 内单调递减, 所以函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值 $f(0) = 0$, 令 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 = 0$, 解得 $x = 0$ 或 $x = -3$, 若函数 $f(x)$ 在 $(a-1, a+5)$ 内存在最小值, 则 $-3 \leq a-1 < 0 < a+5$, 解得 $-2 \leq a < 1$, 即实数 a 的取值范围是 $[-2, 1)$. 故选 C.]

3. ABD [$g'(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-a}{x^2}$.

对于选项 A, 当 $a \leq 0$ 时, $g(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递增,

此时 $g(x)$ 有最大值, 故 A 选项正确.

对于选项 B, C, 当 $0 < a < e$ 时, 若 $0 < x < a$, 则 $g'(x) < 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调递减;

若 $a < x \leq e$, 则 $g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(a, e]$ 上单调递增.

令 $g(x)_{\min} = g(a) = \frac{a}{a} + \ln a = -1$, 得 $a = \frac{1}{e^2}$, 满足条件,

令 $g(x)_{\min} = g(a) = \frac{a}{a} + \ln a = 2$, 得 $a = e$, 不满足条件, 故 B 选项正确, C 选项错误.

对于选项 D, 当 $a \geq e$ 时, 若 $0 < x \leq e$,

则 $g'(x) \leq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递减, 令 $g(x)_{\min} =$

$g(e) = \frac{a}{e} + \ln e = 3$, 得 $a = 2e$, 所以此时 $g(x)$ 有最小值 3, 故

D 选项正确. 故选 ABD.]

4. 50 [设 A 系列木版画的月利润为 $g(x)$, 则 $g(x) = f(x)(x-30) = (x-90)^2(x-30)$, $30 < x < 90$,

可得 $g'(x) = 2(x-90)(x-30) + (x-90)^2 = 3(x-90) \cdot (x-50)$,

令 $g'(x) = 0$, 则 $x = 50$,

当 $x \in (30, 50)$ 时, $g'(x) > 0$,

当 $x \in (50, 90)$ 时, $g'(x) < 0$,

故 $g(x)$ 在 $(30, 50)$ 内单调递增, 在 $(50, 90)$ 内单调递减,

所以当 $x = 50$ 时, 利润 $g(x)$ 取到极大值, 也是最大值,

即当 A 系列木版画销售价格定为 50 元/套时, 月利润最大.]

* 第 27 课时 利用导数研究不等式问题 (进阶课)

类型一

典例 1 证明: (1) 由题意, $e^x > 1+x$ 等价于 $e^x - x - 1 > 0$,

令 $f(x) = e^x - x - 1$,

$\therefore f'(x) = e^x - 1$, 而 $f'(0) = e^0 - 1 = 0$,

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

故 $f(x) > f(0) = 0$ 在 $x \neq 0$ 时

恒成立, 即 $e^x - x - 1 > 0$ ($x \neq 0$), $\therefore e^x > 1+x$, $x \neq 0$.

如图, 由图象可直观得到 $e^x > 1+x$, $x \neq 0$.

(2) 由题意, $\ln x < x$ 等价于 $x - \ln x > 0$, $x < e^x$ 等价于 $e^x - x > 0$,

令 $f(x) = x - \ln x$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$,

而 $f'(1) = 1 - \frac{1}{1} = 0$,

$\therefore$ 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

故 $f(x) \geq f(1) = 1$ 在 $x > 0$ 时恒成立, 即 $x - \ln x \geq 1 > 0$,

$\therefore \ln x < x$ 在 $x > 0$ 时恒成立.

令 $g(x) = e^x - x$, 则 $g'(x) = e^x - 1$,

而 $g'(0) = e^0 - 1 = 0$,

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

故 $g(x) > g(0) = 1 > 0$ 在 $x > 0$ 时恒成立, 即 $e^x - x > 0$,

$\therefore x < e^x$ 在 $x > 0$ 时恒成立.

综上, $\ln x < x < e^x$, $x > 0$.

如图, 由图象可直观得到 $\ln x < x < e^x$, $x > 0$.

类型二

典例 2 解: 若 $f(x)$ 图象恒在 $g(x)$ 图象的上方, 则 $\ln x > 1 - \frac{a}{x}$ 恒成立,

$\frac{a}{x}$ 恒成立,

即 $a > x(1 - \ln x)$ 恒成立.

设 $h(x) = x(1 - \ln x)$,

所求问题转化为 $a > h(x)_{\max}$.

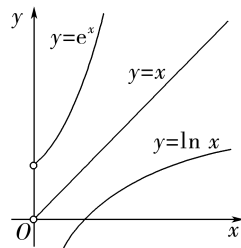
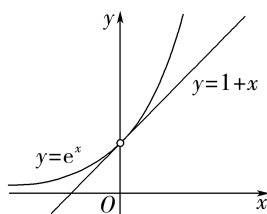
则 $h'(x) = 1 - \ln x + x \left(-\frac{1}{x}\right) = -\ln x$,

令 $h'(x) > 0$, 得 $x \in (0, 1)$, 令 $h'(x) < 0$, 得 $x \in (1, +\infty)$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

故 $h(x)_{\max} = h(1) = 1$,

所以 a 的取值范围为 $(1, +\infty)$.



类型三

典例 3 解:由 $f(x) < x$ 有解, 可得 $a < \frac{2x+1}{e^x}$ 有解,

$$\text{令 } g(x) = \frac{2x+1}{e^x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{1-2x}{e^x},$$

$$\text{令 } g'(x) > 0, \text{ 可得 } x < \frac{1}{2}, \text{ 令 } g'(x) < 0, \text{ 可得 } x > \frac{1}{2},$$

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{所以 } g(x) \text{ 的最大值为 } g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{e}}{e},$$

$$\text{所以 } a < \frac{2\sqrt{e}}{e}, \text{ 故实数 } a \text{ 的取值范围为 } \left(-\infty, \frac{2\sqrt{e}}{e}\right).$$

* 第 28 课时 利用导数研究函数的零点问题(进阶课)

类型一

典例 1 解: $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = \cos x + e^x - 4$.

$$\text{当 } x \leq 0 \text{ 时}, -1 \leq \cos x \leq 1, 0 < e^x \leq 1,$$

$$\text{所以 } f'(x) = \cos x + e^x - 4 < 0,$$

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 所以 $f(x) \geq f(0) = 1$, 此时函数 $f(x)$ 无零点.

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时}, \text{ 设 } h(x) = \cos x + e^x - 4,$$

$$\text{则 } h'(x) = -\sin x + e^x > 0,$$

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

即 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$f'(0) = -2 < 0, f'(2) = \cos 2 + e^2 - 4 > 0,$$

因此 $f'(x)$ 在 $(0, 2)$ 内有唯一零点,

$$\text{记零点为 } m, \text{ 即 } f'(m) = 0,$$

所以 $x \in (0, m)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

$x \in (m, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$$\text{又 } f(0) = 1 > 0, f(1) = \sin 1 + e - 4 < 0,$$

$f(\pi) = e^\pi - 4\pi > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有一个零点, 在 $(1, \pi)$ 内有一个零点.

综上所述, $f(x)$ 在定义域上有 2 个零点.

类型二

典例 2 解:第 1 步 参变分离: 根据函数零点与方程根的关系, 将参数与自变量分开.

$$\text{由 } f(x) = 0, \text{ 得 } a = \frac{(\ln x)^2}{x}, x > 0,$$

第 2 步 求导画曲线: 求导研究曲线性质, 并画出曲线.

$$\text{设 } g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x},$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2},$$

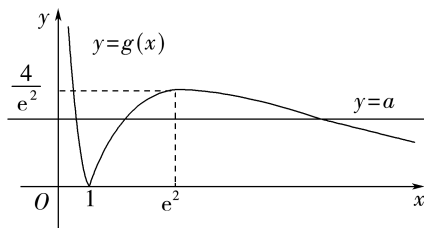
$$\text{令 } g'(x) = 0, \text{ 得 } x = 1 \text{ 或 } x = e^2,$$

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, $g(x) \in (0, +\infty)$;

当 $x \in (1, e^2)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, $g(x) \in \left(0, \frac{4}{e^2}\right)$;

当 $x \in (e^2, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, $g(x) \in \left(0, \frac{4}{e^2}\right)$.

画出函数 $g(x)$ 的大致图象, 如图所示,



第 3 步 曲直相交得范围: 根据直线与曲线的交点个数, 得参数的取值范围.

由函数的图象知, 当直线 $y=a$ 与函数 $g(x)$ 的图象有三个交点时, a 的取值范围是 $\left(0, \frac{4}{e^2}\right)$.

微点突破 7

典例 3 证明: 设 $h(x) = e^x - \ln(x+2)$, $x > -2$,

$$\text{则 } h'(x) = e^x - \frac{1}{x+2}, \text{ 易知 } h'(x) \text{ 在 } (-2, +\infty) \text{ 上单调递增.}$$

$$\text{因为 } h'(-1) < 0, h'(0) > 0,$$

所以 $h'(x) = 0$ 在 $(-2, +\infty)$ 上存在唯一实数根 x_0 , 且 $x_0 \in (-1, 0)$.

当 $x \in (-2, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增.

所以当 $x = x_0$ 时, $h(x)$ 取得最小值.

$$\text{因为 } e^{x_0} = \frac{1}{2+x_0},$$

$$\text{所以 } x_0 = -\ln(2+x_0).$$

$$\text{故 } h(x) \geq h(x_0) = e^{x_0} - \ln(2+x_0) = \frac{1}{2+x_0} + x_0 =$$

$$\frac{(1+x_0)^2}{2+x_0} > 0.$$

$$\text{所以 } e^x - \ln(x+2) > 0.$$

规范答题一

典例 (1) $e^x - 1$ (2) $e - 2$ (3) $(1, e-2)$ (4) $e^x - a$ 单调递增

$$f(\ln a) = a - a \ln a - a^3 = \frac{1}{a} - 2a < 0 \quad (1, +\infty)$$

第四章 三角函数与解三角形

第 29 课时 任意角和弧度制、三角函数的概念

理法先行 · 题练固本

梳必备 · 破题有方

知识点 1 (1) 端点 (2) 零角 象限角

知识点 2 (1) 半径长 (2) $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \cdot aR$

知识点 3 (1) $y = x$ (2) $\frac{y}{x}$ (3) $\frac{y}{r}$ (4) $\frac{x}{r}$ (5) $\frac{y}{x}$ ($x \neq 0$)

链教材 · 夯基固本

1. A [因为 $-2025^\circ = -360^\circ \times 6 + 135^\circ$, 所以与 -2025° 终边相同的最小正角是 135° .

故选 A.]

2. $\frac{2\pi}{3}R$ 4 [由弧长公式可得 $l = aR = \frac{2\pi}{3}R$,

$$\text{由扇形面积公式得 } S = \frac{1}{2}aR^2 = 2R^2,$$

$$\therefore a = \frac{2R^2}{\frac{1}{2}R^2} = 4.]$$

$$3. -\frac{7}{13} \quad [\text{由三角函数的定义可得 } \sin \theta + \cos \theta = \frac{5}{\sqrt{(-12)^2+5^2}} + \frac{-12}{\sqrt{(-12)^2+5^2}} = \frac{5}{13} - \frac{12}{13} = -\frac{7}{13}.]$$

4. D [因为 α 为第一象限角, 所以 $2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $k\pi < \frac{\alpha}{2} < k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$. 当 $k=2n, n \in \mathbf{Z}$ 时, $2n\pi < \frac{\alpha}{2} < 2n\pi + \frac{\pi}{4}$, 属于第一象限角; 当 $k=2n+1, n \in \mathbf{Z}$ 时, $2n\pi + \pi < \frac{\alpha}{2} < 2n\pi + \frac{5\pi}{4}$, 属于第三象限角, 所以 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限角. 故选 D.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 ACD [对于 A, $-\frac{25\pi}{6} = -750^\circ = -1080^\circ + 330^\circ, 330^\circ$ 是第四象限角, 所以 $-\frac{25\pi}{6}$ 是第四象限角, 故 A 正确; 对于 B, 终边落在 y 轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, 角度与弧度不能混用, 故 B 错误; 对于 C, 第三象限角的集合为 $\{\alpha \mid \pi + 2k\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, 故 C 正确; 对于 D, 所有与 45° 角终边相同的角可表示为 $\beta = 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 从而当 $k=-2$ 时, $\beta = -675^\circ$; 当 $k=-1$ 时, $\beta = -315^\circ$, 故 D 正确. 故选 ACD.]

多维变迁

1. D [因为 α 是第二象限角, 可得 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 对于 A, 可得 $-\pi - 2k\pi < -\alpha < -\frac{\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 此时 $-\alpha$ 的终边在第三象限, 所以 $-\alpha$ 是第三象限角, A 错误; 对于 B, 可得 $\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 当 k 为偶数时, $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第一象限; 当 k 为奇数时, $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第三象限, 所以 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限角, B 错误; 对于 C, 可得 $2\pi + 2k\pi < \frac{3\pi}{2} + \alpha < \frac{5\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $2(k+1)\pi < \frac{3\pi}{2} + \alpha < \frac{\pi}{2} + 2(k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ 的终边在第一象限, 所以 $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ 是第一象限角, C 错误; 对于 D, 可得 $\pi + 4k\pi < 2\alpha < 2\pi + 4k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 2α 是第三或第四象限角或终边在 y 轴的非正半轴上, D 正确. 故选 D.]

2. $\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ + 30^\circ \leq \alpha < k \cdot 360^\circ + 105^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
[终边落在射线 OA 上的角的集合是 $\{\beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ + 30^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, 终边落在射线 OB 上的角的集合是 $\{\gamma \mid \gamma = k \cdot 360^\circ + 105^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, 所以终边落在阴影部分(含射线 OA, 不含射线 OB)的角的集合是 $\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ + 30^\circ \leq \alpha < k \cdot 360^\circ + 105^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.]

考点二

典例 2 解: (1) 由题意知 $\alpha = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$, 所以弧长 $l = \alpha R = \frac{2\pi}{3} \times 10 = \frac{20\pi}{3}$ cm.

$$(2) \text{由题意得} \begin{cases} 2R + \alpha R = 10, \\ \frac{1}{2} \alpha R^2 = 4, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} R = 1, \\ \alpha = 8 \end{cases} \text{(舍去) 或} \begin{cases} R = 4, \\ \alpha = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

故扇形的圆心角为 $\frac{1}{2}$.

母题探究

1. 解: 设弓形面积为 $S_{\text{弓}}$. 由题意知 $l = \frac{2\pi}{3}$ cm.

$$S_{\text{弓}} = S_{\text{扇形}} - S_{\text{三角形}} = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3} \times 2 - \frac{1}{2} \times 2^2 \times \sin \frac{\pi}{3} = \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right) \text{ cm}^2.$$

2. 解: 由已知得, $l + 2R = 20$,

法一: 因为 $S = \frac{1}{2} l R = \frac{1}{2} (20 - 2R) R = 10R - R^2 = -(R - 5)^2 + 25$,
所以当 $R = 5$ 时, S 取得最大值 25 cm^2 ,
此时 $l = 10, \alpha = 2$.

法二: $S = \frac{1}{2} l R = \frac{1}{4} l \cdot 2R \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{l + 2R}{2}\right)^2 = 25$,

当且仅当 $l = 2R$, 即 $R = 5 \text{ cm}$ 时, S 的最大值是 25 cm^2 .
此时扇形的圆心角 $\alpha = 2$.

考点三

考向 1 典例 3 D [角 α 的终边经过点 $M(-3, -2)$,

$$\text{则 } \sin \alpha = \frac{-2}{\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2}} = -\frac{2}{\sqrt{13}},$$

$$\cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{13}}, \text{ 故 } 3\sin \alpha - 2\cos \alpha = 0.$$

故选 D.]

多维变迁

D [因为角 θ 的顶点在坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边与直线 $y = \frac{1}{2}x$ 位于第三象限的图象重合, 在角 θ 的终边上取点 $(-2, -1)$,

$$\text{所以 } \sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

故选 D.]

考向 2 典例 4 B [$\because$ 点 $P(2\sin \theta, \sin \theta \cdot \cos \theta)$ 位于第四象限,

$$\therefore \begin{cases} 2\sin \theta > 0, \\ \sin \theta \cdot \cos \theta < 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \sin \theta > 0, \\ \cos \theta < 0, \end{cases}$$

$\therefore$ 角 θ 的终边所在的象限是第二象限.]

随堂·对点检测

1. B [当 k 为奇数时, 记 $k = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}$, 则 $\alpha = 225^\circ + n \cdot 360^\circ (n \in \mathbf{Z})$, 此时 α 为第三象限角; 当 k 为偶数时, 记 $k = 2n, n \in \mathbf{Z}$, 则 $\alpha = 45^\circ + n \cdot 360^\circ (n \in \mathbf{Z})$, 此时 α 为第一象限角. 故 α 的终边在第一或第三象限.]

2. D [因为角 α 的终边过点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$$\text{则 } \tan \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}. \text{ 故选 D.}]$$

3. AB [由题意知 $\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0, \tan \alpha < 0$.

选项 A, $\frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} > 0$;

选项 B, $\cos \alpha - \sin \alpha > 0$;

选项 C, $\sin \alpha \cos \alpha < 0$;

选项 D, $\sin \alpha + \cos \alpha$ 符号不确定.

故选 AB.]

4. 200 [设该扇形的半径为 r , 弧长为 l ,

$$\text{则 } \begin{cases} l = 4r, \\ 2r + l = 60, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} r = 10, \\ l = 40, \end{cases}$$

所以该扇形的面积 $S = \frac{1}{2}rl = 200$.]

第 30 课时 同角三角函数的基本 关系与诱导公式

理法先行 · 题练固本

梳必备 · 破题有方

知识点 1 (1)1

知识点 2 $-\sin \alpha \quad -\sin \alpha \quad \sin \alpha \quad \cos \alpha \quad \cos \alpha \quad -\cos \alpha$
 $\cos \alpha \quad -\cos \alpha \quad \sin \alpha \quad -\sin \alpha \quad \tan \alpha \quad -\tan \alpha \quad -\tan \alpha$

链教材 · 夯基固本

1. A [由题意得 $\cos \alpha = \frac{12}{13}$,

$$\text{故 } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{5}{12}. \text{ 故选 A.}]$$

2. B [$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{3+1}{3-1} = 2$.

故选 B.]

$$\begin{aligned} 3. \frac{\sqrt{2}}{2} & [\sin \frac{5\pi}{6} \cos(-\frac{\pi}{4}) + \sin \frac{11\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{4}] \\ &= \sin(-\frac{\pi}{6} + \pi) \cos \frac{\pi}{4} + \sin(-\frac{\pi}{6} + 2\pi) \cos(\frac{\pi}{4} + \pi) \\ &= \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + (-\sin \frac{\pi}{6})(-\cos \frac{\pi}{4}) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}.] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} & [\text{因为 } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } -\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} - x < \frac{\pi}{3}, \text{ 又} \\ \sin(\frac{\pi}{3} - x) &= \frac{1}{3} > 0, \text{ 所以 } 0 < \frac{\pi}{3} - x < \frac{\pi}{3}, \text{ 所以} \\ \cos(\frac{\pi}{3} - x) &= \sqrt{1 - \sin^2(\frac{\pi}{3} - x)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \\ \sin(\frac{\pi}{6} + x) &= \sin[\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{3} - x)] \\ &= \cos(\frac{\pi}{3} - x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}; \\ \cos(\frac{2\pi}{3} + x) &= \cos[\pi - (\frac{\pi}{3} - x)] \\ &= -\cos(\frac{\pi}{3} - x) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.] \end{aligned}$$

5. A [$(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x = 1 - 2 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$, 所
以 $\cos x - \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.]

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 (1)BC (2)ABC [(1)对于 A, 因为 $\cos \alpha = -\frac{5}{13} < 0$

且 $\cos \alpha \neq -1$,

所以 α 是第二或第三象限角.

①若 α 是第二象限角,

$$\text{则 } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - (-\frac{5}{13})^2} = \frac{12}{13},$$

$$\text{所以 } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}.$$

②若 α 是第三象限角,

$$\text{则 } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - (-\frac{5}{13})^2} = -\frac{12}{13},$$

$$\text{所以 } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}, \text{ A 错误;}$$

$$\text{对于 B, 由 } \sin \alpha + 2\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$\text{两边平方可得 } \sin^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha + 4\sin \alpha \cos \alpha = \frac{5}{2},$$

$$\text{因此, } \frac{\sin^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha + 4\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{5}{2}, \text{ 分子、分母同除以 } \cos^2 \alpha$$

$$\text{可得 } \frac{\tan^2 \alpha + 4\tan \alpha + 4}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{5}{2}, \text{ 整理可得 } 3\tan^2 \alpha - 8\tan \alpha - 3 = 0,$$

$$\text{解得 } \tan \alpha = 3 \text{ 或 } \tan \alpha = -\frac{1}{3}, \text{ B 正确;}$$

$$\text{对于 C, 因为 } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2, \text{ 且 } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2},$$

$$\text{所以 } \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 所以 } \cos \alpha - \sin \alpha =$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{5} - (-\frac{2\sqrt{5}}{5}) = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ C 正确;}$$

$$\text{对于 D, 由 } \frac{\sin \alpha + 3\cos \alpha}{3\cos \alpha - \sin \alpha} = 5, \text{ 得 } \frac{\tan \alpha + 3}{3 - \tan \alpha} = 5,$$

$$\text{可得 } \tan \alpha = 2,$$

$$\text{则 } \cos^2 \alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha = \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{1 + \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{3}{5}, \text{ D 错误. 故选 BC.}$$

$$(2) \text{ 因为 } \sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{17},$$

$$\text{则 } (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{49}{289},$$

$$\text{所以 } 2\sin \theta \cos \theta = -\frac{240}{289} < 0,$$

$$\text{又因为 } \theta \in (0, \pi), \text{ 则 } \sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \text{ 所以 } \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \text{ A}$$

正确;

$$\text{又 } \sin \theta - \cos \theta > 0,$$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2\sin \theta \cos \theta = \frac{529}{289},$$

$$\text{所以 } \sin \theta - \cos \theta = \frac{23}{17}, \text{ D 错误;}$$

$$\text{联立 } \begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{17}, \\ \sin \theta - \cos \theta = \frac{23}{17}, \end{cases} \text{ 可得 } \sin \theta = \frac{15}{17}, \cos \theta = -\frac{8}{17},$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{15}{8}, \text{ 故 B, C 正确.}$$

故选 ABC.]

考点二

典例 2 (1)BC (2)B (3)-1 [(1)对于 A, $\sin(3\pi+\alpha) = \sin(\pi+\alpha) = -\sin \alpha$, 故 A 错误;

对于 B, $\sin\left(\frac{7\pi+\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = -\cos \frac{\alpha}{2}$, 故 B 正确;

对于 C, $\cos\left(\frac{5\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \sin 2\alpha$, 故 C 正确;

对于 D, $\cos(9\pi-3\alpha) = \cos(\pi-3\alpha) = -\cos 3\alpha$, 故 D 错误. 故选 BC.

(2) 因为 $\sin\left(\frac{2\pi}{7} + \alpha\right) = \frac{1}{5}$,

所以 $\cos\left(\frac{3\pi}{14} - \alpha\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{2\pi}{7} + \alpha\right)\right] = \sin\left(\frac{2\pi}{7} + \alpha\right) = \frac{1}{5}$, 则 $\sin\left(\frac{3\pi}{14} - \alpha\right) = \pm\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{3\pi}{14} - \alpha\right)} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$,

所以 $\tan\left(\frac{3\pi}{14} - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{14} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{14} - \alpha\right)} = \pm 2\sqrt{6}$.

故选 B.

(3) $\because \cos 10^\circ > \sin 10^\circ$,

$\therefore$ 原式 $= \frac{\sqrt{1-2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}}{\sin 10^\circ - \cos 10^\circ} = \frac{\sqrt{\sin^2 10^\circ - 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ + \cos^2 10^\circ}}{\sin 10^\circ - \cos 10^\circ} = \frac{|\sin 10^\circ - \cos 10^\circ|}{\sin 10^\circ - \cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{-(\cos 10^\circ - \sin 10^\circ)} = -1$.

考点三

典例 3 (1)证明: $f(\alpha) = \frac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)}$

$= \frac{(-\sin \alpha)(-\cos \alpha)}{\cos \alpha} = \sin \alpha$, 得证.

(2)解: 因为 $f(\alpha) = \sin \alpha = \frac{3}{5}$, 且 α 为第二象限角,

所以 $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$,

所以 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}$, 所以 $\tan \alpha \cdot \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}} - 1 = \left(-\frac{3}{4}\right) \times \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} - 1 = -\frac{5}{4}$.

随堂·对点检测

1. AD $[\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 A 选项正确;

$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 B 选项错误;

$\cos \pi = -\cos 0 = -1$, 所以 C 选项错误;

$\tan \frac{3\pi}{4} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$, D 选项正确.

故选 AD.]

2. A $[\because \alpha$ 是第三象限角, 且 $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$,

$\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

则 $3\cos \alpha + 4\tan \alpha = -2\sqrt{2} + \sqrt{2} = -\sqrt{2}$. 故选 A.]

3. D $[\text{因为 } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{2}$,

所以 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{3}{4} \times \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{2}$,

化简得 $3(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 8(\sin \alpha + \cos \alpha) - 3 = 0$,

解得 $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{3}$ 或 $\sin \alpha + \cos \alpha = 3$ (舍去).

故选 D.]

4. $-\frac{3}{10}$ $[\text{由题意可得 } \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 3\cos(\alpha - \pi) = -\sin \alpha - 3\cos \alpha = 0,$

所以 $-\sin \alpha = 3\cos \alpha$, 可得 $\tan \alpha = -3$,

所以 $\frac{\sin^3 \alpha - \sin \alpha}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\sin \alpha (\sin^2 \alpha - 1)}{-\cos \alpha} = \tan \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha) = \tan \alpha$

$\cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \tan \alpha \cdot \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1} = -3 \times \frac{1}{9+1} = -\frac{3}{10}$.]

第 31 课时 和、差、倍角的正弦、余弦和正切公式

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 2 $\sqrt{a^2+b^2} \sin(\alpha+\varphi)$

链教材·夯基固本

1. D $[\sin 20^\circ \cos 10^\circ - \cos 160^\circ \sin 10^\circ = \sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 20^\circ \cdot$

$\sin 10^\circ = \sin(20^\circ + 10^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

故选 D.]

2. $\frac{7}{25}$ $[\text{因为 } \sin(\alpha - \pi) = -\sin \alpha = \frac{3}{5},$

所以 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, 所以 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \times$

$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$.]

3. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ $[\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ)$

$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.]

4. 7 $[\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

$= \frac{2 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{1 + 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)} = 7$.]

5. $\frac{4}{5}$ $[\text{由题意, 得 } \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{4}{5},$

即 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{5}$.]

6. 2 $[\text{由 } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \tan \frac{3\pi}{4} = -1, \text{ 得 } \tan \alpha +$

$\tan \beta - \tan \alpha \tan \beta + 1 = 0$, 所以 $(1 - \tan \alpha)(1 - \tan \beta) = 1 - (\tan \alpha + \tan \beta) + \tan \alpha \tan \beta = 2$.]

考点一

 典例 1 (1)D (2)A (3)B [(1) $\cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 2 \times$

$$\frac{1}{5} - 1 = -\frac{3}{5}, \text{ 因为 } 0 < \alpha < \pi, \text{ 所以 } \sin \alpha = \frac{4}{5},$$

$$\text{所以 } \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha - \cos \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{7}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

 (2) 因为 $\cos(\alpha + \beta) = m$,

$$\text{所以 } \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = m,$$

$$\text{而 } \tan \alpha \tan \beta = 2,$$

$$\text{所以 } \sin \alpha \sin \beta = 2\cos \alpha \cos \beta,$$

$$\text{故 } \cos \alpha \cos \beta - 2\cos \alpha \cos \beta = m,$$

$$\text{即 } \cos \alpha \cos \beta = -m,$$

$$\text{从而 } \sin \alpha \sin \beta = -2m,$$

$$\text{故 } \cos(\alpha - \beta) = -3m. \text{ 故选 A.}$$

$$(3) \text{ 因为 } \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{1 - \tan \alpha} = \sqrt{3}, \text{ 解得 } \tan \alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以 } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = 2\sqrt{3} - 1.$$

故选 B.]

考点二

 考向 1 典例 2 (1)B (2) $\frac{\pi}{2}$ (取值满足 $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$)

 即可) [(1) 由 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = 1$, 得 $\cos \theta +$

$$\frac{1}{2}\cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \theta = \frac{3}{2}\cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \theta = 1,$$

$$\text{所以 } \sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1,$$

$$\text{所以 } \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{则 } \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = -\frac{1}{3}. \text{ 故选 B.}$$

$$(2) f(x) = \sin(x + \varphi) + \cos x = \sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi + \cos x$$

$$= \cos \varphi \sin x + (\sin \varphi + 1) \cdot \cos x = \sqrt{\cos^2 \varphi + (\sin \varphi + 1)^2}$$

$$\cdot \sin(x + \theta) \left(\text{其中 } \tan \theta = \frac{\sin \varphi + 1}{\cos \varphi} \right), \text{ 由 } f(x) \text{ 的最大值为 } 2,$$

 所以 $\sqrt{\cos^2 \varphi + (\sin \varphi + 1)^2} = 2$, 化简可得 $\sin \varphi = 1$, 则 φ 可

为 $\frac{\pi}{2}$, 其取值满足 $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 即可.]

 考向 2 典例 3 ABD [对于 A, $\cos 82^\circ \sin 52^\circ - \sin 82^\circ \cos 52^\circ =$

$$\sin(52^\circ - 82^\circ) = -\frac{1}{2}, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{对于 B, } \sin 15^\circ \sin 30^\circ \sin 75^\circ = \frac{1}{2} \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 30^\circ =$$

$$\frac{1}{8}, \text{ 故 B 正确;}$$

 对于 C, $\frac{\tan 48^\circ + \tan 72^\circ}{1 - \tan 48^\circ \tan 72^\circ} = \tan(48^\circ + 72^\circ) = -\sqrt{3}$, 故 C

错误;

对于 D, 由二倍角公式可得,

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 ABD.]

 考向 3 典例 4 C [$\because \alpha + \beta = \frac{5\pi}{4}$,

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \tan \frac{5\pi}{4} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\therefore \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1, \text{ 化简得 } \tan \alpha + \tan \beta = 1 - \tan \alpha \tan \beta,$$

$$\text{可得 } (1 + \tan \alpha) \cdot (1 + \tan \beta) = 1 + \tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \cdot$$

$$\tan \beta = 1 + 1 - \tan \alpha \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta = 2.$$

故选 C.]

考点三

 典例 5 (1)C (2)D [(1) 因为角 α, β 均为锐角, 所以 $\alpha + \beta \in$

 $(0, \pi)$,

$$\text{因为 } \cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{10}}{10}, \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } \sin(\alpha + \beta) = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } \cos(\alpha + 2\beta) = \cos[(\alpha + \beta) + \beta]$$

$$= \cos(\alpha + \beta) \cos \beta - \sin(\alpha + \beta) \sin \beta$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{10} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{10}}{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

故选 C.

 (2) 法一: 设 $\beta = 0$, 则 $\sin \alpha + \cos \alpha = 0$, 取 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, 排除 A, C;

 再取 $\alpha = 0$, 则 $\sin \beta + \cos \beta = 2\sin \beta$, 取 $\beta = \frac{\pi}{4}$, 排除 B. 故

选 D.

 法二: $\because \sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\sqrt{2} \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \sin \beta$,

$$\therefore \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 2(\cos \alpha -$$

$$\sin \alpha) \sin \beta = 2\cos \alpha \sin \beta - 2\sin \alpha \sin \beta,$$

$$\therefore \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 0,$$

$$\text{即 } \sin(\alpha - \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 0,$$

$$\therefore \sin(\alpha - \beta) = -\cos(\alpha - \beta),$$

$$\therefore \tan(\alpha - \beta) = -1.]$$

多维变迁

$$\text{C } [\because \cos \beta = \frac{1}{3}, \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \cos \beta = \cos[(\alpha + \beta) - \alpha] = \cos[\alpha - (\alpha + \beta)]$$

$$= \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)$$

$$= \frac{1}{4} + \sin \alpha \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \sin \alpha \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{12},$$

$$\therefore \cos(2\alpha + \beta) = \cos[\alpha + (\alpha + \beta)]$$

$$= \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) - \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

故选 C.]

教材拓展 4

 典例 6 B [因为 $\tan \frac{\alpha}{2} = 3$,

$$\text{所以 } \sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{2 \times 3}{3^2 + 1} = \frac{3}{5},$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - 3^2}{1 + 3^2} = -\frac{4}{5},$$

$$\text{则 } \frac{\sin \alpha}{2 - \cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{2 - (-\frac{4}{5})} = \frac{3}{14}.$$

故选 B.]

随堂·对点检测

1. BC [对于 A, $\frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{\tan 20^\circ \tan 25^\circ - 1} = \frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ} = -\tan(20^\circ + 25^\circ) = -1$, 不符合题意;

对于 B, $4\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = 4\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = 2\sin \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$, 符合题意;

对于 C, $\sin 72^\circ \cos 18^\circ - \cos 108^\circ \sin 18^\circ = \sin 72^\circ \cos 18^\circ + \cos 72^\circ \sin 18^\circ = \sin(72^\circ + 18^\circ) = 1$, 符合题意;

对于 D, $2\cos^2 22.5^\circ - 1 = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 不符合题意.

故选 BC.]

2. D $[\sin 15^\circ + \sin 75^\circ = \sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \sqrt{2} \sin(15^\circ + 45^\circ) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

故选 D.]

3. C $[\tan \alpha + \tan \beta = -\sqrt{3}(1 - \tan \alpha \tan \beta),$

因为 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$,

所以 $\alpha + \beta \in (0, \pi)$,

所以 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -\sqrt{3},$

故 $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}.$

故选 C.]

4. D $[\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 + \cos 2\beta}{2} = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta + \alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta - \alpha + \beta)]$

$= -\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}.$

故选 D.]

5. $-\frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{10}}{10}$ [因为 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 且 α 为第四象限角,

所以 $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$

所以 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$

第 32 课时 简单的三角恒等变换

理法先行·题练固本

链教材·夯基固本

1. $-\frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5}$ [$\because \theta \in (\frac{5\pi}{2}, 3\pi)$,

且 $\sin \theta = \frac{4}{5},$

$\therefore \cos \theta = -\frac{3}{5}, \frac{\theta}{2} \in (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}),$

$$\therefore \sin \frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.]$$

2. (1) $\frac{1}{2} \sin \alpha$ (2) 0 [(1) 原式 $= \frac{1}{2}[\sin(\alpha + 2\beta) + \sin \alpha] -$

$\frac{1}{2} \sin(\alpha + 2\beta) = \frac{1}{2} \sin \alpha.$

(2) 原式 $= 2\sin \frac{10^\circ + 50^\circ}{2} \cos \frac{50^\circ - 10^\circ}{2} - \cos 20^\circ$
 $= 2\sin 30^\circ \cos 20^\circ - \cos 20^\circ = 0.]$

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1) $\frac{1}{8}$ (2) 0 [(1) 法一: 原式

$= \frac{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ}$

$= \frac{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ} = \frac{2\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ}$

$= \frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}.$

法二: 原式 $= \frac{1}{2}[\cos(20^\circ + 40^\circ) + \cos(20^\circ - 40^\circ)] \cos 80^\circ$

$= \frac{1}{4} \cos 80^\circ + \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 80^\circ$

$= \frac{1}{4} \cos 80^\circ + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} [\cos(20^\circ + 80^\circ) + \cos(20^\circ - 80^\circ)]$

$= \frac{1}{4} \cos 80^\circ + \frac{1}{4} \cos 100^\circ + \frac{1}{8}$

$= \frac{1}{8}.$

(2) 原式 $= \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \tan \theta} - \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$

$= \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} - \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$

$= \sin \theta + \cos \theta - \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$

$= \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = 0.]$

考点二

考向 1 典例 2 ABD [对于 A, $\sin 15^\circ \sin 30^\circ \cdot \sin 75^\circ$

$= \frac{1}{2} \sin 15^\circ \sin 75^\circ = -\frac{1}{4} [\cos(15^\circ + 75^\circ) - \cos(15^\circ - 75^\circ)] =$

$\frac{1}{8}$, 故 A 正确;

对于 B, $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$

$= \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$

$= \frac{2(\sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ}$

$= \frac{4 \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4$, 故 B 正确;

对于 C, $\frac{3 - \sin 70^\circ}{2 - \cos^2 10^\circ} = \frac{3 - \cos 20^\circ}{2 - \cos^2 10^\circ}$

$$= \frac{3 - (2\cos^2 10^\circ - 1)}{2 - \cos^2 10^\circ} = \frac{2(2 - \cos^2 10^\circ)}{2 - \cos^2 10^\circ} = 2, \text{故 C 错误;}$$

对于 D, 因为 $\tan 60^\circ = \tan(20^\circ + 40^\circ)$

$$= \frac{\tan 20^\circ + \tan 40^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 40^\circ} = \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } \tan 20^\circ + \tan 40^\circ = \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ,$$

$$\text{即 } \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 60^\circ$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 40^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 40^\circ = \sqrt{3}, \text{故 D 正确.}$$

故选 ABD.]

考向 2 典例 3 B [法一:依题意,得

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}, \\ \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } \cos(2\alpha + 2\beta) = 1 - 2\sin^2(\alpha + \beta) = 1 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

故选 B.

法二(积化和差公式):由条件,知

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{6},$$

$$\text{解得 } \sin(\alpha + \beta) = \frac{2}{3},$$

$$\text{则 } \cos(2\alpha + 2\beta) = \cos[2(\alpha + \beta)] = 1 - 2\sin^2(\alpha + \beta) = 1 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}. \text{ 故选 B.}]$$

考向 3 典例 4 (1)B (2) $-\frac{3\pi}{4}$ [(1)由题意知, $\cos \alpha =$

$$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\because \tan \beta = -3, \text{且 } \beta \text{ 为钝角, } \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1,$$

$$\therefore \sin \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \beta = -\frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) +$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{又 } \because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi,$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}, \therefore \alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}.$$

故选 B.

$$(2) \because \tan \alpha = \tan[(\alpha - \beta) + \beta]$$

$$= \frac{\tan(\alpha - \beta) + \tan \beta}{1 - \tan(\alpha - \beta) \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{7}}$$

$$= \frac{1}{3} > 0,$$

$$\therefore 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{又 } \because \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4} > 0, \therefore 0 < 2\alpha <$$

$$\frac{\pi}{2}, \therefore \tan(2\alpha - \beta) = \frac{\tan 2\alpha - \tan \beta}{1 + \tan 2\alpha \tan \beta} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{7}} = 1.$$

$$\because \tan \beta = -\frac{1}{7} < 0, \therefore \frac{\pi}{2} < \beta < \pi, -\pi < 2\alpha - \beta < 0, \therefore 2\alpha - \beta = -\frac{3\pi}{4}.]$$

随堂·对点检测

1. BC [对于 A, $\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$, 故 A 错误;

$$\text{对于 B, } \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{故 B 正确;}$$

$$\text{对于 C, } \frac{\tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{故 C 正确;}$$

$$\text{对于 D, } \frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} = \frac{\tan 45^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 15^\circ} = \tan(45^\circ + 15^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \text{故 D 错误. 故选 BC.}]$$

2. D [由题意, $\cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$, 得 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} =$

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{8} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2, \text{又 } \alpha \text{ 为锐角, 所以 } \sin \frac{\alpha}{2} > 0,$$

$$\text{所以 } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \text{ 故选 D.}]$$

3. $-\frac{3\pi}{4}$ [由 $\beta \in (0, \pi)$, $\cos \beta = -\frac{4}{5}$,

$$\text{得 } \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{3}{5},$$

$$\text{所以 } \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = -\frac{3}{4},$$

$$\text{又 } \tan \alpha = \frac{1}{7}, \text{ 所以 } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} =$$

$$\frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \times \frac{3}{4}} = \frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}} = 1,$$

$$\text{因为 } \cos \beta = -\frac{4}{5} < 0, \text{ 则 } \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

$$\text{又 } \tan \alpha = \frac{1}{7} > 0, \text{ 则 } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 则 } \alpha - \beta \in (-\pi, 0),$$

$$\text{所以 } \alpha - \beta = -\frac{3\pi}{4}.]$$

4. $\cos \alpha$ [因为 $\pi < \alpha < 2\pi$, 所以 $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } & \frac{(1 + \sin \alpha + \cos \alpha) \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{\sqrt{2 + 2\cos \alpha}} \\ &= \frac{\left(2\cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{\sqrt{4\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} \\
&= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} \\
&= \frac{-\cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha}{\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} \\
&= \frac{-\cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha}{-\cos \frac{\alpha}{2}} \\
&= \cos \alpha.]
\end{aligned}$$

第 33 课时 三角函数的图象与性质

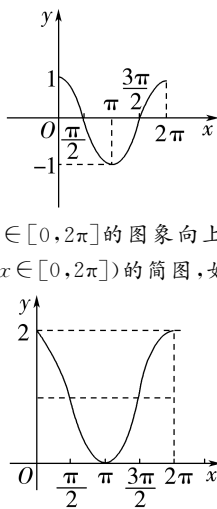
理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

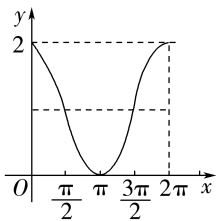
知识点 2 $\left\{ x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$ $[-1, 1]$ $[-1, 1]$ 2π π 奇
 函数 偶函数 奇函数 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right]$ $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$ $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \right]$ $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ $(k\pi, 0)$
 $\left(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0 \right)$ $\left(\frac{k\pi}{2}, 0 \right)$ $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ $x = k\pi$

链教材·夯基固本

1. D $[$ 函数 $y = \cos x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象如图所示,



将函数 $y = \cos x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象向上平移 1 个单位长度得到 $y = 1 + \cos x (x \in [0, 2\pi])$ 的简图, 如图所示.



故选 D.]

2. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right]$ $[$ 由 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$,

得 $x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right]$,

所以 $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right]$.]

3. $\left[\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{11\pi}{12} + k\pi \right] (k \in \mathbf{Z})$ $[$ 由 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

解得 $\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

故 $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left[\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{11\pi}{12} + k\pi \right] (k \in \mathbf{Z})$.]

4. $\left\{ x \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z} \right\}$ $[$ 由 $2x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

得 $x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}$,

故函数 $y = \tan \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$ 的定义域为

$\left\{ x \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z} \right\}$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1) D (2) $\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \right] (k \in \mathbf{Z})$

$[$ (1) $\because x \in \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} \right)$,

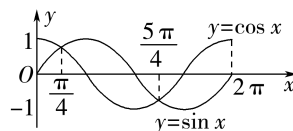
$\therefore 4x - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right)$,

$\therefore \cos \left(4x - \frac{\pi}{3} \right) \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right]$,

$\therefore f(x) \in \left[2 - \sqrt{3}, \frac{7}{2} \right)$.

故选 D.

(2) 法一: 要使函数有意义, 必须使 $\sin x - \cos x \geq 0$. 在同一直角坐标系中画出 $[0, 2\pi]$ 上 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 的图象, 如图所示.



在 $[0, 2\pi]$ 内, 满足 $\sin x = \cos x$ 的 x 为 $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$, 再结合正弦、余弦函数的周期是 2π , 所以原函数的定义域为

$\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \right] (k \in \mathbf{Z})$.

法二: 要使函数 $y = \sqrt{\sin x - \cos x}$ 有意义,

则 $\sin x - \cos x \geq 0$, 即 $\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \geq 0$,

即 $2k\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z})$,

解得 $2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$,

即原函数的定义域为 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \right] (k \in \mathbf{Z})$.]

考点二

典例 2 (1) ACD (2) A $[$ (1) 由题意可得 $f(x)$ 的最小正周期

$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 故 A 正确;

令 $2x - \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 可得 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 故 B 错误;

令 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

可得 $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

当 $k = 0$ 时, $x = \frac{\pi}{3}$, 故 $f(x)$ 的图象的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{3}, 0 \right)$, 故

C 正确;

若 $f(x) = \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} + \varphi \right)$ 为奇函数, 则 $-\frac{\pi}{6} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$(k \in \mathbf{Z}), \varphi = k\pi + \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$, 当 $k=0$ 时, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, 故 D 正确.

故选 ACD.

(2) 由题意得 $\omega = \frac{2\pi}{T} \in (2, 3)$, 函数 $y = f(x)$ 的图象关于点

$(\frac{3\pi}{2}, 2)$ 中心对称, 则 $b=2$, 且 $f(\frac{3\pi}{2})=2$,

所以 $\sin(\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4}) + 2 = 2$, 则 $\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得

$\omega = \frac{4k-1}{6}, k \in \mathbf{Z}$. 由 $\omega \in (2, 3)$, 得 $k=4, \omega = \frac{5}{2}$, 所以 $f(x) =$

$\sin(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{4}) + 2$, 故 $f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{5}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) + 2 =$

$-1 + 2 = 1$. 故选 A.]

母题探究

1. $\frac{3}{2}$ [由函数 $f(x)$ 的最小正周期 T 满足 $\frac{4\pi}{5} < T < \pi$, 得 $\frac{4\pi}{5} <$

$\frac{2\pi}{\omega} < \pi$, 解得 $2 < \omega < \frac{5}{2}$, 又因为函数图象关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 2)$ 中心

对称,

所以 $\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 且 $b=2$, 所以 $\omega = \frac{2k}{3} + \frac{1}{6}, k$

$\in \mathbf{Z}$, 所以 $\omega = \frac{13}{6}$, 即 $f(x) = \cos(\frac{13}{6}x + \frac{\pi}{4}) + 2$,

则 $f(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{13\pi}{12} + \frac{\pi}{4}) + 2 = \frac{3}{2}$.]

2. -1 [因为函数 $f(x)$ 的最大值为 $2+b=1$, 所以 $b=-1$.

由 $\pi < T < 2\pi$, 得 $\pi < \frac{2\pi}{\omega} < 2\pi$, 解得 $1 < \omega < 2$.

由 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{7\pi}{4}$ 对称,

可得 $\omega \times \frac{7\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $\omega = \frac{4}{7}(k - \frac{3}{8}), k \in \mathbf{Z}$.

所以 $1 < \frac{4}{7}(k - \frac{3}{8}) < 2$, 解得 $\frac{17}{8} < k < \frac{31}{8}$.

又 $k \in \mathbf{Z}$, 所以 $k=3$, 所以 $\omega = \frac{4}{7} \times (3 - \frac{3}{8}) = \frac{3}{2}$,

所以 $f(x) = 2\cos(\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{8}) - 1$.

故 $f(\frac{3\pi}{4}) = 2\cos(\frac{3}{2} \times \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{8}) - 1$

$= 2\cos \frac{3\pi}{2} - 1 = -1$.]

考点三

典例 3 (1)C (2)D [(1)由题意得 $y = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x) =$

$-\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3})$,

所以函数 $y = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3})$ 的单调递减区间, 就是 $y =$

$\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x)$ 的单调递增区间,

由 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $4k\pi + \frac{5\pi}{3} \leq$

$x \leq 4k\pi + \frac{11\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $y = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x)$ 在区间 $[4k\pi + \frac{5\pi}{3}, 4k\pi + \frac{11\pi}{3}] (k \in$

$\mathbf{Z})$ 上单调递增,

当 $x \in [-2\pi, 2\pi]$ 时, $y = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x)$ 的单调递增区间是

$[-2\pi, -\frac{\pi}{3}]$ 和 $[\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$.

故选 C.

(2) 由 $a = \cos(-\frac{3\pi}{8}) = \cos \frac{3\pi}{8}$,

$b = \cos \frac{9\pi}{7} = \cos(\pi + \frac{2\pi}{7}) = -\cos \frac{2\pi}{7} < 0$,

$c = \sin \frac{2\pi}{7} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7}) = \cos \frac{3\pi}{14}$,

又 $0 < \frac{3\pi}{14} < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$,

$y = \cos x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减,

所以 $\cos \frac{3\pi}{14} > \cos \frac{3\pi}{8} > 0$, 即 $c > a > 0 > b$,

所以 $c > a > b$.

故选 D.]

微点突破 8

典例 4 ACD [对于 $f(x) = |\sin x| + \cos x$,

由 $f(-x) = f(x)$, 可知 $f(x)$ 是偶函数, 故 A 正确;

因为 $f(\pi-x) = |\sin(\pi-x)| + \cos(\pi-x) = |\sin x| - \cos x$
 $\neq f(x)$,

所以 $f(x)$ 的图象不关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 故 B 错误;

由题意得 $f(x) =$

$\begin{cases} \sin x + \cos x, x \in [2k\pi, 2k\pi + \pi], \\ -\sin x + \cos x, x \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi], \end{cases} k \in \mathbf{Z}$,

所以 $f(x) =$

$\begin{cases} \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}), x \in [2k\pi, 2k\pi + \pi], \\ -\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}), x \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi], \end{cases} k \in \mathbf{Z}$,

根据正弦函数的性质, 可知当 $x \in [2k\pi, 2k\pi + \pi]$ 时, $f(x)$
 $\in [-1, \sqrt{2}]$,

当 $x \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi]$ 时, $f(x) \in (-1, \sqrt{2}]$,

所以 $f(x) \in [-1, \sqrt{2}]$, 即 $f(x)$ 的最小值为 -1 , 可知 C
 正确;

当 $x \in (-\pi, 0)$ 时, $f(x) = -\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}), x - \frac{\pi}{4}$

$\in (-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\pi, 0)$ 上不单调, 可知 D 正确.

故选 ACD.]

随堂·对点检测

1. C [根据函数 $y = \sin \frac{x}{2}$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, 可知 A

项错误;

根据函数 $y = \cos x$ 的最小正周期为 2π , 可知 B 项错误;

根据函数 $y = \tan x$ 的最小正周期为 π , 且在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单

调递增, 可知 C 项正确;

当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $y = |\sin x| = \sin x$, 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减, 可知 D 项错误.
故选 C.]

2. BC $[f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ 为奇函数, A 错误;
根据正弦函数的性质可得, $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, B 正确;

由 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ 得 $T = \pi$, C 正确;

当 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $-\pi \leq 2x \leq \pi$, 此时 $f(x)$ 不单调, D 错误.
故选 BC.]

3. B $[A$ 中, $T = \frac{2\pi}{\pi} = 4$, B 中, $T = \frac{2\pi}{\pi} = 4$, C 中, $T = \frac{2\pi}{\pi} = 8$, D

中, $T = \frac{2\pi}{\pi} = 8$, 排除 C, D; 对于 A, 当 $x = 2$ 时, $f(2) =$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} \times 2\right) = 0$, 故点 $(2, 0)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中

心, 排除 A; 对于 B, 当 $x = 2$ 时, $f(2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \times 2\right) = -1$, 故 $x = 2$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴. 故选 B.]

4. $\frac{3}{2}$ $[\because x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{12}\right], \therefore 2x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right],$

则 $f(x) = \sin 2x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right],$

即 $M = 1, m = -\frac{1}{2}$, 则 $M - m = \frac{3}{2}$.]

第 34 课时 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象及应用

理法先行 · 题练固本

梳必备 · 破题有方

知识点 1 0 -A

知识点 2 $|\varphi| \left| \frac{\varphi}{\omega} \right|$

知识点 3 $\omega x + \varphi$

链教材 · 夯基固本

1. A $[$ 令 $x = 0$, 得 $y = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 排除 B, D; 由 $x =$

$-\frac{\pi}{3}$ 时, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $y = 0$, 排除 C.

故选 A.]

2. C $[$ 将函数 $y = \sin x$ 的图象上每个点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 得到 $y = \sin 2x$ 的图象, 再将得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到 $y = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象. 故选 C.]

3. C $[$ 由题意知 $A = 2, f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{4\pi}$, 初相为 $-\frac{\pi}{3}$. 故选 C.]

考点深研 · 题型突破

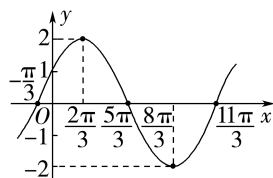
考点一

典例 1 解: $y = \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right),$

令 $M = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}$, 则列表如下:

M	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{3}$
$y = 2 \sin M$	0	2	0	-2	0

在平面直角坐标系中描出相应的五点, 用平滑的曲线连接起来, 向两端伸展一下, 如图所示.



从图象观察知该函数的最小正周期 $T = \frac{11\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 4\pi$.

$\left[-\frac{4\pi}{3} + 4k\pi, \frac{2\pi}{3} + 4k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$ 为单调递增区间,

$\left[\frac{2\pi}{3} + 4k\pi, \frac{8\pi}{3} + 4k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$ 为单调递减区间.

由函数 $y = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把横坐标变为原来的 2 倍 (纵坐标不变), 最后把纵坐标变为原来的 2 倍 (横坐标不变) 即可得到函数 $y = 2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

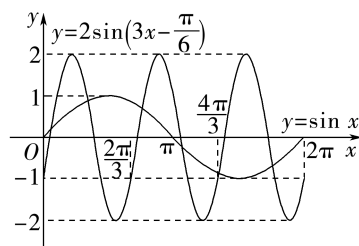
多维变迁

C $[$ 因为函数 $y = \sin x$ 的最小正周期 $T = 2\pi$,

函数 $y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{3}$,

所以在 $x \in [0, 2\pi]$ 上, 函数 $y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 有三个周期的图象,

在平面直角坐标系中结合五点法画出两函数的图象, 如图所示,



由图可知, 两函数图象有 6 个交点. 故选 C.]

考点二

典例 2 (1) $-\frac{3\pi}{4}$ (2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $[$ (1) 由 $f(x)$ 的部分图象知, $A +$

$2 = 3$, 解得 $A = 1$,

最小正周期 $T = 2 \times \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{3}{2}$,

所以 $f(x) = \sin\left(\frac{3}{2}x + \varphi\right) + 2$,

因为点 $\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$ 在函数图象上,

所以 $\sin\left(\frac{3}{2} \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) + 2 = 1$,

$$\text{所以 } \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = -1,$$

$$\text{所以 } \varphi = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{因为 } |\varphi| < \pi, \text{ 所以 } \varphi = -\frac{3\pi}{4},$$

$$\text{所以 } f(x) = \sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{3\pi}{4}\right) + 2,$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 的初相为 } -\frac{3\pi}{4}.$$

(2) 对比正弦函数 $y = \sin x$ 的图象易知, 点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 为“五点

(画图)法”中的第五点, 所以 $\frac{2\pi}{3}\omega + \varphi = 2\pi$. ①

$$\text{由题知 } |AB| = x_B - x_A = \frac{\pi}{6}, \text{ 又 } y = \frac{1}{2}, \text{ 则 } \begin{cases} \omega x_A + \varphi = \frac{\pi}{6}, \\ \omega x_B + \varphi = \frac{5\pi}{6}, \end{cases} \text{ 两}$$

式相减,

$$\text{得 } \omega(x_B - x_A) = \frac{4\pi}{6},$$

$$\text{即 } \frac{\pi}{6}\omega = \frac{4\pi}{6}, \text{ 解得 } \omega = 4.$$

$$\text{代入 ①, 得 } \varphi = -\frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } f(\pi) = \sin\left(4\pi - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= -\sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.]$$

多维变迁

1.1 [根据当 $x = \frac{\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 2, 当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, $f(x)$

取得最小值 -2,

可知 $f(x)$ 的最小正周期 $T = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{2}$, 即 $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$,

解得 $\omega = 4$,

由 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 是函数的最大值, 根据余弦函数的性质, 可得 $4 \times$

$$\frac{\pi}{12} + \varphi = 2k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{结合 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 取 } k = 0, \text{ 得 } \varphi = -\frac{\pi}{3},$$

$$\text{可得 } f(x) = 2\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right),$$

将函数 $f(x)$ 图象上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 可得

$$f\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left[4\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{3}\right] = 2\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ 的}$$

图象,

$$\text{所以 } g(x) = 2\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right), \text{ 可得 } g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos \frac{5\pi}{3}$$

$$= 2\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos \frac{\pi}{3} = 1.]$$

2. 解: 由题图得 $A = \frac{3-0}{2} = \frac{3}{2}$,

$$B = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2},$$

$$T = 2\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{5\pi}{3},$$

$$\therefore |\omega| = \frac{2\pi}{T} = \frac{6}{5}.$$

$$\text{当 } \omega > 0 \text{ 时, 函数的解析式为 } y = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{6}{5}x + \varphi\right) + \frac{3}{2},$$

$\therefore$ 点 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 在函数图象上,

$$\therefore \frac{6}{5} \times \frac{\pi}{2} + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore \varphi = \frac{9\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\therefore |\varphi| < \pi, \therefore \varphi = \frac{9\pi}{10}, \therefore y = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{6}{5}x + \frac{9\pi}{10}\right) + \frac{3}{2}.$$

$$\text{当 } \omega < 0 \text{ 时, 函数的解析式为 } y = -\frac{3}{2} \cdot \sin\left(\frac{6}{5}x - \varphi\right) + \frac{3}{2},$$

$\therefore$ 点 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 在函数图象上,

$$\therefore \frac{6}{5} \times \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{10} - 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\therefore |\varphi| < \pi, \therefore \varphi = \frac{\pi}{10}.$$

$$\therefore y = -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{6}{5}x - \frac{\pi}{10}\right) + \frac{3}{2}.$$

$$\text{综上, 所求的一个函数解析式为 } y = \frac{3}{2} \cdot \sin\left(\frac{6}{5}x + \frac{9\pi}{10}\right) + \frac{3}{2}$$

$$\text{或 } y = -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{6}{5}x - \frac{\pi}{10}\right) + \frac{3}{2}.$$

考点三

考向 1 典例 3 解: (1) 因为 $f(0) = \cos \varphi = \frac{1}{2}$, 且 $0 \leq \varphi < \pi$,

$$\text{所以 } \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) g(x) = f(x) + f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos 2x$$

$$= \cos 2x \cos \frac{\pi}{3} - \sin 2x \sin \frac{\pi}{3} + \cos 2x$$

$$= \frac{3}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)$$

$$= \sqrt{3}\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

因为 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值域是 $[-1, 1]$,

所以函数 $y = \sqrt{3}\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值域是 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$,

所以 $g(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

$$\text{令 } 2k\pi - \pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 得 } k\pi - \frac{7\pi}{12} \leq x \leq k\pi - \frac{\pi}{12}$$

$$(k \in \mathbf{Z}), \text{ 所以 } g(x) \text{ 的单调递增区间为 } \left[k\pi - \frac{7\pi}{12}, k\pi - \frac{\pi}{12}\right] (k$$

$\in \mathbf{Z})$.

$$\text{令 } 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 得 } k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12}$$

$$(k \in \mathbf{Z}), \text{ 所以 } g(x) \text{ 的单调递减区间为 } \left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right] (k$$

$\in \mathbf{Z})$.

考题探源

1. 解: (1) 由题意, 函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos x + a$,

$$\begin{aligned} \text{化简得 } f(x) &= \sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} + \sin x \cos \frac{\pi}{6} - \\ &\cos x \sin \frac{\pi}{6} + \cos x + a = \sqrt{3} \sin x + \cos x + a = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + a, \end{aligned}$$

$\therefore y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的最大值为 1,

$\therefore f(x)_{\max} = 2 \times 1 + a = 1$, 解得 $a = -1$.

(2) 由 (1) 可知 $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$.

$$\text{令 } 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } 2k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x \leq 2k\pi + \frac{4\pi}{3}, k \in \mathbf{Z},$$

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$.

(3) 由题意 $f(x) \geq 0$, 即 $2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 \geq 0$,

$$\text{可得 } \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2},$$

$$\therefore 2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z},$$

$\therefore$ 使 $f(x) \geq 0$ 成立的 x 的取值集合是

$$\left\{x \mid 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

2. 解: $f(x) = \frac{1}{2} \cos^2 x - \frac{1}{2} \sin^2 x + 1 - \sqrt{3} \sin x \cos x$

$$= \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + 1$$

$$= \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1,$$

$$\text{最小正周期 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi,$$

由 $2k\pi - \pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 可得,

$$k\pi - \frac{2\pi}{3} \leq x \leq k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z},$$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{2\pi}{3}, k\pi - \frac{\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z}$.

考向 2 典例 4 ACD [由题意, 知 $\frac{T}{2} = 10 - 4 = 6$, 解得 $T =$

12, 故 A 正确;

$$\text{由 } \frac{2\pi}{\omega} = 12, \text{ 得 } \omega = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{由 } \begin{cases} A+B=50, \\ -A+B=10, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} A=20, \\ B=30, \end{cases}$$

$$\text{所以 } h(t) = 20\sin\left(\frac{\pi}{6}t + \varphi\right) + 30.$$

$$\text{由 } h(0) = 20, \text{ 得 } 20\sin \varphi + 30 = 20,$$

$$\text{即 } \sin \varphi = -\frac{1}{2}.$$

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

所以 $h(t) = 20\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{6}\right) + 30$, 故 B 错误;

$$h(14) = 20\sin\left(\frac{\pi}{6} \times 14 - \frac{\pi}{6}\right) + 30$$

$$= 20\sin \frac{\pi}{6} + 30 = 40, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{由 } h(t) = 20\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{6}\right) + 30 < 20, \text{ 得 } \sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{6}\right) <$$

$$-\frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < \frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{6} < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } 8 +$$

$12k < t < 12 + 12k, k \in \mathbf{Z}$. 所以一个周期内过山车距离地平面

低于 20 m 的时间是 $(12 + 12k) - (8 + 12k) = 4$ s, 故 D 正确.

故选 ACD.]

多维变迁

1. C [由题意得, $\begin{cases} A+B=14, \\ A-B=6, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} A=10, \\ B=4, \end{cases}$

$$\text{所以 } H(t) = 10 + 4\sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\text{令 } H(t) \geq 8, \text{ 即 } \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{2\pi}{3}\right) \geq -\frac{1}{2},$$

因为 $0 \leq t < 24$,

$$\text{所以 } -\frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi}{12}t - \frac{2\pi}{3} < \frac{4\pi}{3},$$

由正弦函数的图象与性质可知 $-\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{12}t - \frac{2\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{6}$, 解得

$$6 \leq t \leq 22,$$

所以该港口一天内水位不小于 8 m 的时长为 $22 - 6 = 16$ (h).

故选 C.]

2. 解: (1) 由题图可知 $A = 3, \frac{3}{4}T = \frac{4\pi}{9} - \left(-\frac{\pi}{18}\right) = \frac{\pi}{2}$, 解得

$$T = \frac{2\pi}{3},$$

所以 $\omega = 3, f(x) = 3\sin(3x + \varphi)$,

又 $f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{4\pi}{9}, -3\right)$,

$$\text{所以 } -3 = 3\sin\left(3 \times \frac{4\pi}{9} + \varphi\right),$$

$$\text{所以 } \frac{4\pi}{3} + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{又 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{6}, f(x) = 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right),$$

将函数 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{3}{2}$, 再将

所得函数图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到 $g(x) =$

$$3\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ 的图象.}$$

$$\text{综上, } f(x) = 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$g(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$(2) \text{ 令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } -\frac{\pi}{6}$$

$$+ k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

即函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$,

令 $2x - \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

所以函数 $g(x)$ 的图象的对称中心为 $(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, 0) (k \in \mathbf{Z})$.

(3) 当 $x \in [-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$,

所以 $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$,

所以 $g(x) \in [-\frac{3\sqrt{3}}{2}, 3]$, 即函数 $g(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$ 上的值域为 $[-\frac{3\sqrt{3}}{2}, 3]$.

随堂·对点检测

1. B [将函数 $y = \cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度, 得到
的图象的函数解析式为 $y = \cos[2(x - \frac{\pi}{8})] = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$.
故选 B.]

2. D [函数的周期 $T = 2[\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{12})] = \frac{2\pi}{3}$, 可得 $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$,
解得 $\omega = 3$,

因为当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $f(x) = 0$, 且 $x = \frac{\pi}{4}$ 在函数 $f(x)$ 的单调递减区间内,

所以 $3 \times \frac{\pi}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 结合 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 解得
 $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, 又 $A = 2$, 可得 $f(x) = 2\cos(3x - \frac{\pi}{4})$, 将 $f(x)$ 图
象上的所有点向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度,

可得 $f(x + \frac{\pi}{4}) = 2\cos(3x + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = 2\cos(3x + \frac{\pi}{2})$ 的
图象,

结合 $\cos(3x + \frac{\pi}{2}) = -\sin 3x$,

可得 $f(x + \frac{\pi}{4}) = -2\sin 3x$, D 选项符合题意.

故选 D.]

3. BD [由 $f(x) = 3\sin(2\omega x + \varphi)$ 的部分图象知, $T = 2 \times$
 $[\frac{3\pi}{8} - (-\frac{\pi}{8})] = \pi$, 即 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 解得 $\omega = 1$,

将点 $(-\frac{\pi}{8}, 3)$ 代入解析式中, 得

$\sin(-\frac{\pi}{4} + \varphi) = 1$,

所以 $-\frac{\pi}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\varphi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $f(x) = 3\sin(2x + \frac{3\pi}{4} + 2k\pi)$

$= 3\sin(2x + \frac{3\pi}{4}), k \in \mathbf{Z}$.

对于 A, 因为 $\omega = 1$, 所以选项 A 错误;

对于 B, 因为 $f(-\frac{5\pi}{8}) = 3\sin(-\frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}) = -3$ 是最小值,

所以直线 $x = -\frac{5\pi}{8}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 选项 B 正确;

对于 C, 因为 $f(\frac{\pi}{4}) = 3\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}) = 3\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \neq 0$,

所以点 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 不是 $f(x)$ 图象的对称中心, 选项 C 错误;

对于 D, 函数 $f(x + \frac{7\pi}{8}) = 3\sin(2x + \frac{7\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}) = 3\sin(2x + \frac{5\pi}{2}) = 3\cos 2x$, 为偶函数, 选项 D 正确.

故选 BD.]

4. $y = 16 + 2\sin \frac{\pi}{6}x$ (答案不唯一) [根据题意, 可得函数 $y =$

$h + A\sin(\omega x + \varphi)$ 的周期 T 满足 $9 - 3 = \frac{T}{2}$, $T = 12$, 即 $\frac{2\pi}{|\omega|} =$

12 , 解得 $\omega = \pm \frac{\pi}{6}$.

不妨设 $A > 0, \omega = \frac{\pi}{6}$, 根据水的深度在早上 3 时达到最大值
18 m, 可知 $f(3)$ 为函数的最大值,

所以 $\frac{3\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 取 $k = 0$, 得 $\varphi = 0$, 函数表达式

为 $y = h + A\sin \frac{\pi}{6}x$.

由 $f(3) = 18$ 是最大值, $f(9) = 14$ 是最小值, 可

得 $\begin{cases} h + A\sin \frac{\pi}{2} = h + A = 18, \\ h + A\sin \frac{3\pi}{2} = h - A = 14, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} h = 16, \\ A = 2. \end{cases}$

所以该港口水的深度 y 关于时间 t 的函数的近似表达式为 $y =$
 $16 + 2\sin \frac{\pi}{6}x$ (答案不唯一).]

第 35 课时 正弦定理、余弦定理

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 $b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

$a^2 + b^2 - 2ab\cos C \quad \sin A : \sin B : \sin C \quad \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

知识点 3 (2) $\frac{1}{2}ab\sin C \quad \frac{1}{2}ac\sin B$

$\frac{1}{2}bc\sin A \quad (3) \frac{1}{2}r(a+b+c)$

链教材·夯基固本

1. $\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{3}$ [在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $b = 2, A = 45^\circ, C = 75^\circ$, 所以

$B = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$, 则由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $c =$

$\frac{b\sin C}{\sin B} = \frac{2\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{3}$.]

2. $\frac{2\pi}{3}$ [由余弦定理的推论, 得

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25 + 9 - 49}{30} = -\frac{1}{2}$,

因为 $0 < A < \pi$,

所以 $A = \frac{2\pi}{3}$.]

3. D [对于选项 A, 由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 得 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{14 \times \frac{1}{2}}{7} = 1$, 又 $0^\circ < B < 180^\circ$, 从而 $B = 90^\circ$, $C = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, 只有一解; 对于选项 B, 因为 $A = 150^\circ$, $\triangle ABC$ 是钝角三角形, 所以只有一解; 同理选项 C 只有一解; 对于选项 D, 由 $b \sin A < a < b$, 所以 B 可能是锐角, 也可能是钝角, 故有两解. 故选 D.]

4. $\frac{27-9\sqrt{3}}{2}$ [由 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 得 $\sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

由于 $0^\circ < C < 180^\circ$,

所以 $C = 45^\circ$ 或 $C = 135^\circ$.

由于 $b > c$, 故 $B > C$, 所以 $C = 45^\circ$,

所以 $A = 180^\circ - 120^\circ - 45^\circ = 15^\circ$,

$$\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{6} \times 6 \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{27 - 9\sqrt{3}}{2}$.]

5. D [由正弦定理, 得 $\frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$, 得 $\sin A = \frac{1}{2}$. 又 $a < b$,
 $\therefore A < B = 45^\circ$. $\therefore A = 30^\circ$. 故选 D.]

6. $\frac{35\sqrt{6}}{24}$ [由题意可得

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+6+7}{2} = 9,$$

$S_{\triangle ABC} = \sqrt{9 \times (9-5) \times (9-6) \times (9-7)} = 6\sqrt{6}$, 设外接圆半径为 R ,

$$\text{则 } R = \frac{abc}{4S} = \frac{5 \times 6 \times 7}{4 \times 6\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{24}.$$

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 (1) A [由题意得 $\cos A = \frac{(1+\sqrt{3})^2 + 6 - 4}{2(1+\sqrt{3}) \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 因为

$0^\circ < A < 180^\circ$,

所以 $A = 45^\circ$.]

(2) 解: (i) 由 $\frac{a}{c} = \frac{2}{3}$ 得 $a = \frac{2}{3}c$,

由余弦定理及其推论得 $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cos B$,

$$\text{即 } \frac{4}{9}c^2 + c^2 - 25 = 2 \times \frac{2}{3}c \times c \times \frac{9}{16},$$

整理得 $\frac{25}{36}c^2 = 25$, 解得 $c = 6$ (舍负), 故 $a = \frac{2}{3}c = 4$.

(ii) 因为 $\cos B = \frac{9}{16}$,

$$\text{所以 } \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{5\sqrt{7}}{16},$$

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 得 $\frac{4}{\sin A} = \frac{5}{\frac{5\sqrt{7}}{16}}$,

$$\text{即 } \sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

多维变迁

1. C [$\because B = 30^\circ, b = \sqrt{2}, c = 2$,

$$\text{则 } \sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore C > B, 0^\circ < C < 180^\circ$,

$\therefore C = 45^\circ$ 或 $C = 135^\circ$.

故选 C.]

2. A [$\because \sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4$,

$\therefore$ 由正弦定理, 得 $a : b : c = 2 : 3 : 4$,

不妨设 $a = 2, b = 3, c = 4$,

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \times 3 \times 4} = \frac{7}{8}.$$

故选 A.]

3. A [已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 又

$$2S = a^2 - (b - c)^2,$$

$$\text{所以 } b^2 + c^2 - a^2 = 2bc - 2S,$$

$$\text{又因为 } b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A, S = \frac{1}{2} bc \sin A,$$

$$\text{所以 } 2bc \cos A = 2bc - bc \sin A,$$

$$\text{即 } \sin A = 2 - 2\cos A,$$

$$\text{因为 } \cos A = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}, \sin A = 2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2},$$

$$\text{所以 } 2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 2 - 2\left(1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}\right),$$

$$\text{即 } 2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 4\sin^2 \frac{A}{2},$$

$$\text{因为 } \sin \frac{A}{2} > 0, \text{ 所以 } \cos \frac{A}{2} = 2\sin \frac{A}{2},$$

$$\text{即 } \tan \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{1}{2}.$$

故选 A.]

考点二

典例 2 A [法一(化角为边): 因为 $b \cos C + c \cos B$

$$= b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2a^2}{2a} = a, \text{ 所以 } a \sin A =$$

a , 即 $\sin A = 1$, 故 $A = \frac{\pi}{2}$, 因此 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

法二(化边为角): 因为 $b \cos C + c \cos B = a \sin A$,

$$\text{所以 } \sin B \cos C + \sin C \cos B = \sin^2 A,$$

$$\text{即 } \sin(B + C) = \sin^2 A,$$

$$\text{所以 } \sin A = \sin^2 A,$$

又 $\sin A \neq 0$,

故 $\sin A = 1$, 即 $A = \frac{\pi}{2}$, 因此 $\triangle ABC$ 是直角三角形.]

多维变迁

BC [对于 A, 由正弦定理可得 $\sin A \cos A = \sin B \cos B$,

$$\therefore \sin 2A = \sin 2B, \therefore A = B \text{ 或 } 2A + 2B = 180^\circ,$$

$$\text{即 } A = B \text{ 或 } A + B = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形, 故 A 错误;

$$\text{对于 B, } a \sin B = 40 \sin 25^\circ < 40 \sin 30^\circ = 40 \times \frac{1}{2} = 20,$$

即 $a \sin B < b < a$, $\therefore \triangle ABC$ 必有两解, 故 B 正确;

对于 C, $\because \triangle ABC$ 是锐角三角形, $\therefore 0^\circ < A < 90^\circ, 0^\circ < B < 90^\circ, 180^\circ > A + B > 90^\circ$,

即 $90^\circ > A > 90^\circ - B > 0^\circ$,

$\therefore \sin A > \sin(90^\circ - B) = \cos B$, 故 C 正确;

对于 D, 由题意及二倍角的余弦公式知 $1 - 2\sin^2 A + 1 - 2\sin^2 B - 1 + 2\sin^2 C < 1$,

即 $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C > 0$, 即 $a^2 + b^2 - c^2 > 0$, $\therefore \cos C > 0$, 即 C 为锐角, 但不能说明 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 故 D 错误.

故选 BC.]

考点三

典例 3 解: (1) 因为 $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$,

$$\text{所以 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{又 } 0 < C < \pi, \text{ 所以 } C = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{所以 } \sqrt{2} \cos B = \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{所以 } \cos B = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } 0 < B < \pi, \text{ 所以 } B = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{法一: 由 (1) 得 } A = \pi - B - C = \frac{5\pi}{12}.$$

$$\text{因为 } \sin \frac{5\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{4}.$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$\text{所以由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\text{得 } \frac{a}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$\text{所以 } a = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}c.$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}c^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 + \sqrt{3},$$

$$\text{解得 } c = 2\sqrt{2} \text{ (舍负)}.$$

$$\text{法二: 由 (1) 得 } A = \pi - B - C = \frac{5\pi}{12}.$$

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R ,

$$\text{由正弦定理得 } b = 2R \sin B = \sqrt{3}R, c = 2R \sin C = \sqrt{2}R.$$

$$\text{因为 } \sin \frac{5\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{4}.$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}R \cdot \sqrt{2}R \cdot \sin \frac{5\pi}{12} = 3 + \sqrt{3}, \text{ 即}$$

$$\frac{\sqrt{6}R^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = 3 + \sqrt{3}, \text{ 解得 } R^2 = 4, \text{ 所以 } R = 2 \text{ (舍负)},$$

$$\text{所以 } c = \sqrt{2}R = 2\sqrt{2}.$$

多维变迁

1. C [由余弦定理得 $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle BAC$,

$$\text{即 } 64 = 100 + AB^2 - 2AB \times 10 \times \frac{3}{5}, \therefore AB^2 - 12AB + 36 = 0,$$

$$\therefore AB = 6, \therefore AB^2 + BC^2 = AC^2, \therefore AB \perp BC,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24.]$$

2. 解: (1) 法一: 由 $b \cos A = (2c - a) \cos B$ 及正弦定理可得

$$2 \sin C \cos B = \sin B \cos A + \sin A \cos B,$$

$$\text{可得 } 2 \sin C \cos B = \sin(A + B),$$

$$\text{因为 } A + B = \pi - C, \text{ 所以 } 2 \sin C \cos B = \sin C,$$

$$\text{因为 } \sin C \neq 0, \text{ 所以 } \cos B = \frac{1}{2},$$

$$\text{因为 } 0 < B < \pi, \text{ 所以 } B = \frac{\pi}{3}.$$

法二: 由 $b \cos A = (2c - a) \cos B$ 及余弦定理可得 $b \cdot$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = (2c - a) \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\text{化简得 } a^2 + c^2 - b^2 = ac,$$

$$\text{由余弦定理可得 } 2ac \cos B = ac,$$

$$\text{因为 } ac \neq 0, \text{ 所以 } \cos B = \frac{1}{2},$$

$$\text{因为 } 0 < B < \pi, \text{ 所以 } B = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{由 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B, \text{ 得 } \sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times c \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{解得 } c = 1,$$

$$\text{由余弦定理 } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \text{ 可得 } b^2 = 4^2 + 1^2 - 2 \times$$

$$4 \times 1 \times \frac{1}{2} = 13, \text{ 解得 } b = \sqrt{13},$$

$$\text{故 } \triangle ABC \text{ 的周长为 } 5 + \sqrt{13}.$$

教材拓展 5

典例 4 C [法一(正弦定理法): 由 $a \cos B - b \cos A = c$ 结合

$$\text{正弦定理得 } \sin A \cos B - \sin B \cos A = \sin C = \sin(A + B),$$

$$\text{即 } \sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

$$\text{即 } \sin B \cos A = 0.$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } \because \sin B \neq 0, \therefore \cos A = 0, \text{ 即 } A = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{则 } B = \pi - A - C = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}, \text{ 故选 C.}$$

法二(余弦定理法): 由 $a \cos B - b \cos A = c$ 结合余弦定理的

$$\text{推论得 } a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = c,$$

$$\text{化简得 } b^2 + c^2 = a^2, \therefore A = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{则 } B = \pi - A - C = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}, \text{ 故选 C.}$$

法三(射影定理法): 由 $a \cos B - b \cos A = c$ 结合射影定理

$$a \cos B + b \cos A = c, \text{ 得 } b \cos A = 0.$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } b \neq 0, \therefore \cos A = 0, \text{ 即 } A = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{则 } B = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}, \text{ 故选 C.}]$$

随堂·对点检测

$$1. D \quad [\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ 得 } b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{6}} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2}. \text{ 故选 D.}]$$

2. B [根据余弦定理得 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot$

$$\cos A = 4 + 1 - 2 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{4} = 4, \text{ 解得 } BC = 2 \text{ (舍负)},$$

故选 B.]

3. **ABC** [对于 A, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=6, AC=5, BC=8$,

由余弦定理的推论得 $\cos A =$

$$\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{6^2 + 5^2 - 8^2}{2 \times 6 \times 5} = -\frac{1}{20} < 0,$$

则 A 为钝角, 所以 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, A 正确;

对于 B, 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\cos A = \cos B$, 则 $A = B$, 所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, B 正确;

对于 C, 由 $a : b : c = 4 : 6 : 7$, 设 $a = 4k, b = 6k, c = 7k (k > 0)$,

所以 C 是 $\triangle ABC$ 的最大内角,

$$\text{所以 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{16k^2 + 36k^2 - 49k^2}{2 \times 4k \times 6k} = \frac{1}{16} > 0,$$

又 $0 < C < \pi$, 所以 C 是锐角, 则 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, C 正确;

对于 D, 由正弦定理及题意, 得 $\sin C - \sin A \cos B = 2 \sin A \cos A - \sin B \cos A$,

所以 $\sin(A+B) - \sin A \cos B = 2 \sin A \cdot \cos A - \sin B \cos A$,

故 $\cos A (\sin B - \sin A) = 0$,

所以 $\cos A = 0$ 或 $\sin A = \sin B$, 即 $A = \frac{\pi}{2}$ 或 $A = B$,

故 $\triangle ABC$ 为直角三角形或等腰三角形, D 错误. 故选 ABC.]

4. $\frac{3}{4} \quad \frac{15\sqrt{7}}{4}$ [依题意得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3}{4}$,

$$\text{所以 } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{7}}{4},$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{15\sqrt{7}}{4}.]$$

* 第 36 课时 解三角形的综合应用(进阶课)

类型一

典例 1 **B** [在 $\triangle ABD$ 中, $AB=2, BD=\sqrt{2}, \angle ABD=\frac{\pi}{4}$,

由余弦定理得 $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos \frac{\pi}{4} = 4 +$

$$2 - 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2,$$

所以 $AD = \sqrt{2}$.

在 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin \angle CAD} = \frac{AD}{\sin \angle ACD}$,

$$\angle ACD = \frac{\pi}{4}, \angle CAD = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{即 } \frac{CD}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \text{ 解得 } CD = \sqrt{3}.$$

故选 B.]

多维变迁

解: (1) 连接 AC (图略),

因为四边形 ABCD 为圆内接四边形,

所以 $B+D=\pi$, 所以 $\cos B = -\cos D$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$,

$$\text{即 } AC^2 = 2 + 9 + 2 \times \sqrt{2} \times 3 \cos D = 11 + 6\sqrt{2} \cos D.$$

在 $\triangle ADC$ 中, 由余弦定理得 $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cos D$,

$$\text{即 } AC^2 = 1 + 8 - 2 \times 1 \times 2\sqrt{2} \cos D = 9 - 4\sqrt{2} \cos D.$$

$$\text{所以 } 11 + 6\sqrt{2} \cos D = 9 - 4\sqrt{2} \cos D,$$

$$\text{解得 } \cos D = -\frac{\sqrt{2}}{10},$$

又 $D \in (0, \pi)$,

$$\text{所以 } \sin D = \sqrt{1 - \cos^2 D} = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } \sin D = \frac{7\sqrt{2}}{10},$$

$$\text{因为 } B+D=\pi, \text{ 所以 } \sin B = \sin D = \frac{7\sqrt{2}}{10},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin B = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 3 \times \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{21}{10},$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot DC \sin D = \frac{1}{2} \times 1 \times 2\sqrt{2} \times \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{7}{5},$$

$$\text{所以 四边形 ABCD 的面积 } S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{21}{10} + \frac{7}{5} = \frac{7}{2}.$$

$$\text{结合 (1) 得, } AC^2 = 11 + 6\sqrt{2} \cos D = 11 + 6\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = \frac{49}{5},$$

$$\text{所以 } AC = \frac{7\sqrt{5}}{5},$$

设圆 O 的半径为 R,

$$\text{可得 } 2R = \frac{AC}{\sin B} = \frac{\frac{7\sqrt{5}}{5}}{\frac{7\sqrt{2}}{10}} = \sqrt{10},$$

$$\text{所以 圆 O 的半径 } R = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

类型二

典例 2 (1) **D** (2) **A** (3) **A** [(1) 先要测出 c, 则可利用正弦

定理求出 PB, 再利用正弦定理求出 PA,

最后由余弦定理求出 AB, 则需测出 a, b 才能求出 DE.

故选 D.

(2) 法一: 因为 $AB=h, \angle ADB=\beta, \angle ACB=\alpha$,

则 $\angle ACD = \pi - \alpha$, 所以 $\sin \angle ACD = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$,

$\angle DAC = \alpha - \beta$,

$$\text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中, 可得 } AD = \frac{AB}{\sin \beta} = \frac{h}{\sin \beta},$$

在 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理可得

$$\frac{CD}{\sin \angle DAC} = \frac{AD}{\sin \angle ACD},$$

$$\text{即 } \frac{CD}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\frac{h}{\sin \beta}}{\sin \alpha},$$

$$\text{可得 } CD = \frac{h \sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

$$\text{法二: } CD = BD - BC = \frac{h}{\tan \beta} - \frac{h}{\tan \alpha}$$

$$= \frac{h(\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha)}{\sin \beta \sin \alpha} = \frac{h \sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

故选 A.

(3) 如图, $\angle BAC = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$,

由正弦定理得

$$\frac{4\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin \angle BAC},$$

解得 $\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $0^\circ < C < 90^\circ$,

所以 $C = 45^\circ$, 因为 $90^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$,

所以乙船航行的最佳方向为西偏南 15° . 故选 A.]

规范答题二

典例 (1) $\pi - \cos B \sin A \sin C \cos A \cos C \cos A$
 $\cos C$ (2) $\sin B$ 2

第五章 平面向量、复数

第 37 课时 平面向量的概念及线性运算

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) 大小 方向 长度 $|\vec{AB}|$

(2) 0 (3) 1 个单位 (4) 相同 相反 平行 (5) 相等 相同 (6) 相等 相反

知识点 2 $\vec{b} + \vec{a} \quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad |\lambda| |\vec{a}| \quad$ 相同 相反 $\vec{0}$

$(\lambda\mu)\vec{a} \quad \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \quad \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

知识点 3 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$

链教材·夯基固本

1. CD [易知 A, B 正确;

单位向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向均不确定, 故 C 错误;

两个单位向量平行, 它们的方向可能相反, 两个向量不相等, 故 D 错误. 故选 CD.]

2. $\vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC}$ [因为 $\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD}$,

而 $\vec{CD} = \vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$,

故 $\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} = \vec{OC} + (\vec{OA} - \vec{OB}) = \vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC}$.]

3. $\frac{1}{3}$ [由题意知, 存在实数 λ , 使得

$$\vec{b} - t\vec{a} = \lambda \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} \right), \text{ 则 } \begin{cases} t = -\frac{1}{2}\lambda, \\ \frac{3}{2}\lambda = -1, \end{cases}$$

解得 $t = \frac{1}{3}$.]

4. 5 1 [$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| = 2 + 3 = 5$, 当且仅当 $\vec{a}, \vec{b}$ 同向时取等号, 所以 $|\vec{a} + \vec{b}|_{\max} = 5$.

又 $|\vec{a} + \vec{b}| \geq ||\vec{a}| - |\vec{b}|| = |3 - 2| = 1$,

当且仅当 $\vec{a}, \vec{b}$ 反向时取等号, 所以 $|\vec{a} + \vec{b}|_{\min} = 1$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1) CD (2) ABC [(1) 方向相反的两个非零向量必定平行, 所以方向相反的两个非零向量一定共线, 单位向量的模相等, 但方向不确定, 不一定是共线向量, 故 A 错误;

零向量是有方向的, 其方向是任意的, 故 B 错误;

因为 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 与 $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 都是单位向量, 所以只有当 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 与 $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 是相反

向量, 即 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向共线时, $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{0}$ 才成立, 故 C 正确;

向量是有方向和大小的大小的矢量, 不能比较大小, 但它们的模能比较大小, 故 D 正确. 故选 CD.

(2) 由正六边形的结构特征, 知 $\vec{AB}$ 与 $\vec{OC}$ 方向相同, 长度相等, 所以 $\vec{AB} = \vec{OC}$, 故 A 正确;

$\vec{AB}$ 与 $\vec{DE}$ 方向相反, 所以 $\vec{AB} \parallel \vec{DE}$, 故 B 正确;

由正六边形的性质, 知 $|\vec{AD}| = |\vec{BE}|$, 故 C 正确; $\vec{AD}$ 与 $\vec{FC}$ 不共线, 故 D 错误. 故选 ABC.]

考点二

典例 2 (1) D (2) B (3) B [(1) $\frac{1}{2}\vec{BD} - \vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{BA} +$

$\frac{1}{2}\vec{AD} - \vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{BA} - \vec{AD}) = -\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD}) = \frac{1}{2}\vec{CA}$. 故选 D.

(2) 由已知得, $\vec{BE} = \vec{AE} - \vec{AB} = \frac{3}{4}\vec{AD} - \vec{AB}$

$$= \frac{3}{4}(\vec{AB} + \vec{BD}) - \vec{AB}$$

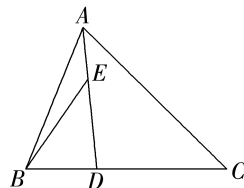
$$= \frac{3}{4}\left(\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC}\right) - \vec{AB}$$

$$= \frac{3}{4}\left[\vec{AB} + \frac{2}{3}(\vec{AC} - \vec{AB})\right] - \vec{AB}$$

$$= -\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

故选 B.

(3) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{BD} = \frac{1}{3}\vec{BC}$, $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AD}$,



根据向量的运算法则, 可得 $\vec{EB} = \vec{EA} + \vec{AB} = -\frac{1}{3}\vec{AD} +$

$$\vec{AB} = -\frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{BD}) + \vec{AB} = \frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\vec{BC}$$

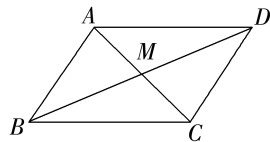
$$= \frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{9}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{7}{9}\vec{AB} - \frac{1}{9}\vec{AC},$$

所以 $\lambda + \mu = \frac{7}{9} - \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$. 故选 B.]

多维变迁

1. A [$\because$ 四边形 ABCD 为平行四边形, $\therefore M$ 是 AC, BD 的中点,

$$\therefore \vec{MA} + \vec{MC} = \vec{0}, \vec{MB} + \vec{MD} = \vec{0},$$



$$\therefore \vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC} + \vec{MD} = \vec{MC} + \vec{MB} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{DB} =$$

$$\frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{DB}) = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{DC} + \vec{CB}) = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC}) =$$

$$\vec{AB} = \vec{DC}. \text{ 故选 A.}]$$

2. ABD [对于 A, 由题意知, E, F 分别是 CD 边上的两个三等分点, 且 $\vec{EF}$ 与 $\vec{AB}$ 方向相同, $|\vec{EF}| = \frac{1}{3}|\vec{AB}|$, 则 $\vec{EF} =$

$$\frac{1}{3}\vec{AB}, \text{ 故 A 正确;}$$

对于 B, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, 故 B 正确;

对于 C, $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EB}$, 故 C 错误;

对于 D, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, 故 D 正确. 故选 ABD.]

考点三

典例 3 (1)B (2)A [(1)由题意知 $ka - b = \lambda(-2a + kb)$,

$$\lambda > 0, \text{ 即 } \begin{cases} k = -2\lambda, \\ -1 = k\lambda, \text{ 解得 } \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}, k = -\sqrt{2}. \\ \lambda > 0, \end{cases}$$

故选 B.

(2)对于 A, 因为 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = a + 5b$,

所以 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$, 所以 A, B, D 三点共线, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $\overrightarrow{BC} = -2a + 8b$, $\overrightarrow{AB} = a + 5b$,

所以不存在 $\lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$,

所以 A, B, C 三点不共线, 故 B 错误;

对于 C, 因为 $\overrightarrow{CD} = 3a - 3b$, $\overrightarrow{BC} = -2a + 8b$,

所以不存在 $\lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $\overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{CD}$,

所以 B, C, D 三点不共线, 故 C 错误;

对于 D, 因为 $\overrightarrow{CD} = 3a - 3b$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -a + 13b$,

所以不存在 $\lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CD}$,

所以 A, C, D 三点不共线, 故 D 错误.

故选 A.]

母题探究

1. 解: 由题意知 $ka - b = \lambda(-2a + kb)$, 即 $(2\lambda + k)a - (k\lambda + 1)b = 0$, 因为 a, b 是两个不共线的向量, 所以 $\begin{cases} k = -2\lambda, \\ -1 = k\lambda, \end{cases}$ 解得 $k = \sqrt{2}$ 或 $k = -\sqrt{2}$.

2. 解: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (a + kb) + 3(a - b) = 4a + (k - 3)b$, a, b 不共线,

若 A, B, D 三点共线, 则存在实数 λ , 使 $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{AB}$,

即 $4a + (k - 3)b = \lambda(a + 5b)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 4 = \lambda, \\ k - 3 = 5\lambda, \end{cases} \text{ 解得 } k = 23.$$

随堂·对点检测

1. C $[\frac{1}{2}(a + 2b - 3c) - 3(a - 2b - c) = -\frac{5}{2}a + 7b + \frac{3}{2}c$, 故选 C.]

2. D [对于选项 A, 两个向量不能比较大小, 故 A 错误;
对于选项 B, 若 $a = b$, 则可得 $|a| = |b|$ 且 $a \parallel b$, 所以必要性成立,
当 $|a| = |b|$ 且 $a \parallel b$ 时, 则可得 $a = b$ 或 $a = -b$, 故充分性不成立, 故 B 错误;
对于选项 C, 当 $b = 0$ 时, 因为零向量与任意向量都平行, 对于任意向量 a 和 c , 都有 $a \parallel b$ 且 $b \parallel c$, 但 a 与 c 不一定平行, 故 C 错误;

对于选项 D, A, B, C, D 是不共线的四点, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, 即模相等且方向相同, 即平行四边形 ABCD 对边平行且相等, 反之也成立, 故 D 正确. 故选 D.]

3. A [由点 F 是线段 DE 的中点,

$$\text{得 } \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE},$$

由 $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{EC}$, 且四边形 ABCD 为平行四边形,

$$\text{得 } \overrightarrow{CE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}) =$$

$$\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AD},$$

$$\text{且 } \overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD},$$

$$\text{故 } \mu = \frac{5}{6}.$$

故选 A.]

4. $-\frac{2}{3}$ [由 a 与 b 不共线, $a - xb$ 与 $3a + 2b$ 共线,

$$\text{可设 } a - xb = \lambda(3a + 2b),$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 1 = 3\lambda, \\ -x = 2\lambda, \end{cases} \text{ 解得 } x = -\frac{2}{3}.]$$

第 38 课时 平面向量基本定理及坐标表示

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1)不共线 有且只有 (2)不共线

知识点 2 (1) $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ $(\lambda x_1, \lambda y_1)$ (2) $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

知识点 3 $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$

链教材·夯基固本

1. B [对于 A, 因为零向量与任何向量平行, 所以选项 A 中的两个向量不可以作为基底; 对于 B, $e_1 = (-1, 2)$ 与 $e_2 = (5, 7)$ 对应坐标不成比例, 两向量不共线, 可以作为基底; 对于 C, $e_1 = (3, 5)$, $e_2 = (6, 10)$, $e_1 = \frac{1}{2}e_2$, 两向量共线, 不可以作为基底; 对于 D, $e_1 = (2, -3)$, $e_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$, $e_1 = 4e_2$, 两向量共线, 不可以作为基底. 故选 B.]

2. $b - \frac{1}{2}a$ $a - \frac{1}{2}b$ [根据题意, 得 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = b$,

$$\overrightarrow{CF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}a,$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = b - \frac{1}{2}a.$$

$$\text{同理 } \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = a - \frac{1}{2}b.]$$

3. (1, 5) [设 $D(x, y)$, 则 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,
得 $(3 - (-1), -1 - (-2)) = (4, 1) = (5 - x, 6 - y)$,
即 $\begin{cases} 4 = 5 - x, \\ 1 = 6 - y, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 5, \end{cases}$ 即 $D(1, 5).$]

4. -4 [因为 $a = (2, 3)$, $b = (x, -6)$, $a \parallel b$, 所以 $2 \times (-6) - 3x = 0$, 解得 $x = -4$, 所以当 $x = -4$ 时, a 与 b 共线.]

5. B [由题意得, P 是 $\triangle OAB$ 的重心,
又 $A(5, -2)$, $B(-4, -3)$, $O(0, 0)$,
所以 P 点坐标为 $(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3})$. 故选 B.]

考点一

典例 1 (1)B (2)C [(1)因为 $e_1 - 2e_2 = -(2e_2 - e_1)$, 所以 $\{e_1 - 2e_2, 2e_2 - e_1\}$ 不能作为平面向量的基底, A 错误; 因为不存在实数 λ , 使得 $2e_1 + 3e_2 = \lambda(3e_1 + 2e_2)$, 所以 $2e_1 + 3e_2, 3e_1 + 2e_2$ 不共线, 所以 $\{2e_1 + 3e_2, 3e_1 + 2e_2\}$ 能作为平面向量的基底, B 正确;

因为 $6e_1 + 4e_2 = 2(2e_2 + 3e_1)$, 所以 $\{2e_2 + 3e_1, 6e_1 + 4e_2\}$ 不能作为平面向量的基底, C 错误; 因为 $e_1 - 2e_2 = -2(e_2 - \frac{1}{2}e_1)$, 所以 $\{e_1 - 2e_2, e_2 - \frac{1}{2}e_1\}$ 不能作为平面向量的基底, D 错误. 故选 B.

(2) 由题意, D 为 BC 的中点, E 是线段 AD 上的一点, 设 $\overrightarrow{AE} = m\overrightarrow{AD}$,

$$\text{则 } \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CA} + m\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} + m(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{CA} + m(\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}) = (1-m)\overrightarrow{CA} + \frac{m}{2}\overrightarrow{CB},$$

$$\text{又 } \overrightarrow{CE} = x\overrightarrow{CA} + (1-2x)\overrightarrow{CB},$$

$$\text{则 } \begin{cases} x = 1-m, \\ 1-2x = \frac{m}{2}, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ m = \frac{2}{3}. \end{cases} \text{ 故选 C.}]$$

母题探究

解: 由本例(2)解析可知, $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, 即 $3\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$, ①

由 D 为 BC 的中点, 可得 $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CD} = 2(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED})$, ②

将②代入①得, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CE} - 2\overrightarrow{ED}$,

所以 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = 4\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CE} = 4\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EC}$.

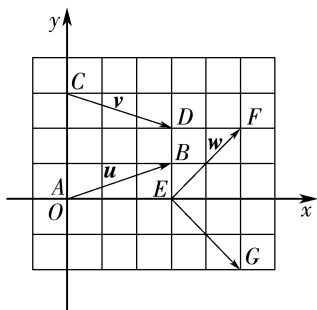
考点二

典例 2 (1)B (2)A [(1)由题意得 $\overrightarrow{AB} = (-2, -7)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, -4)$,

所以 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-3, -11)$.

故选 B.

(2) 如图所示, 由题意可得 $a = \overrightarrow{EG}$, 以 A 为原点, AC 为 y 轴, AE 为 x 轴建立平面直角坐标系, 设每个小正方形的边长为 1,



则 $C(0,3), A(0,0), E(3,0), B(3,1), D(3,2), G(5,-2)$,

所以 $a = (2, -2), u = \overrightarrow{AB} = (3, 1), v = \overrightarrow{CD} = (3, -1)$,

因为 $u = ma - nv$, 即 $(3, 1) = m(2, -2) - n(3, -1) = (2m - 3n, -2m + n)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 2m - 3n = 3, \\ n - 2m = 1, \end{cases} \text{ 解得 } m = -\frac{3}{2}, n = -2,$$

所以 $m + n = -\frac{7}{2}$. 故选 A.]

考点三

典例 3 (1)C (2)ACD (3) $\frac{1}{2}$ [(1)因为 $a = (2, 1)$, a 与 b

共线且方向相反,

所以 $b = \lambda a = (2\lambda, \lambda) (\lambda < 0)$,

又因为 $|b| = 5$, 所以 $|b| = \sqrt{4\lambda^2 + \lambda^2} = 5$,

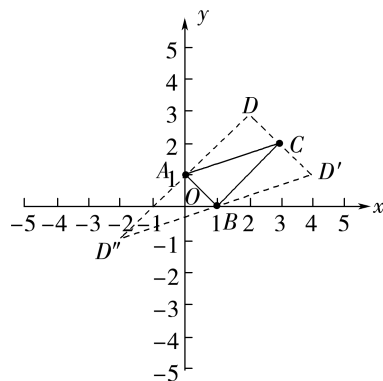
解得 $\lambda = -\sqrt{5}$,

所以 $b = (2\lambda, \lambda) = (-2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$.

故选 C.

(2) 因为 $A(0,1), B(1,0), C(3,2)$,

以 A, B, C 三个点为顶点作平行四边形, 如图所示.



设第四个顶点 D 的坐标为 (x, y) ,

若 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, 则 $(1, -1) = (3-x, 2-y)$,

即 $\begin{cases} 3-x=1, \\ 2-y=-1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=3, \end{cases}$ 所以 $D(2,3)$, 选项 A 正确;

若 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, 则 $(3, 1) = (x-1, y)$,

即 $\begin{cases} x-1=3, \\ y=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=4, \\ y=1, \end{cases}$ 所以 $D(4,1)$, 选项 C 正确;

若 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$, 则 $(x, y-1) = (-2, -2)$,

即 $\begin{cases} x=-2, \\ y-1=-2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-2, \\ y=-1, \end{cases}$

所以 $D(-2, -1)$, 选项 D 正确.

故选 ACD.

(3) 因为 $a = (2, 1), b = (1, x), a \parallel b$,

则 $2x = 1$, 解得 $x = \frac{1}{2}$.]

随堂·对点检测

1. C [因为向量 $\overrightarrow{AB} = (1, 2), \overrightarrow{AC} = (3, 5)$,

所以 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (2, 3)$.

故选 C.]

2. B [因为点 D 在边 AB 上, $BD = 2DA$, 所以 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DA}$, 即 $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = 2(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD})$, 所以 $\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{CA} = 3n - 2m = -2m + 3n$.

故选 B.]

3. A [由已知得, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AB}$, 则 $x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{4}, x + y = 1$. 故选 A.]

4. 1 [由题可得 $a + b = (2, 2), a + kb = (3-k, 1+k)$,

又 $(a+b) \parallel (a+kb)$,

则 $2(1+k) = 2(3-k)$, 解得 $k = 1$.]

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点1 (2) $|a||b|\cos\theta$ $|a||b|\cos\theta$

链教材·夯基固本

$$1. \sqrt{3}c \quad 3\sqrt{2}a \quad [(a \cdot b)c = |a||b|\cos\frac{\pi}{6}c = 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}c = \sqrt{3}c,$$

$$a(b \cdot c) = a \cdot |b||c|\cos\frac{\pi}{4} = 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = 3\sqrt{2}a.]$$

$$2. -\frac{\sqrt{962}}{962} \quad [\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{-30+28}{\sqrt{74} \times \sqrt{52}} = -\frac{\sqrt{962}}{962}.]$$

$$3. \pm \frac{3}{4} \quad [由题意知(a+kb) \cdot (a-kb) = a^2 - k^2b^2 = 9 - 16k^2 = 0, 解得 k = \pm \frac{3}{4}.]$$

$$4. 84 \quad [(2a-b) \cdot (a+3b) = 2|a|^2 + 5a \cdot b - 3|b|^2 = 2 \times 36 + 5 \times 6 \times 4 \times \frac{1}{2} - 3 \times 16 = 84.]$$

考点深研·题型突破

考点一

典例1 (1)B (2)B (3)6 [(1)因为 $a=(1,1), b=(-1, 2)$,

$$则 a \cdot b = -1 + 2 = 1, |b| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$则 a 在 b 上的投影向量是 \frac{a \cdot b}{|b|^2}b = \frac{1}{5}b = (-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}).$$

故选 B.

$$(2) 法一: 由题意知, \vec{EC} = \vec{EB} + \vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD}, \vec{ED} = \vec{EA} + \vec{AD} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD}, 所以 \vec{EC} \cdot \vec{ED} = (\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD}) \cdot (-\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD}) = |\vec{AD}|^2 - \frac{1}{4}|\vec{AB}|^2, 由题意知 |\vec{AD}| = |\vec{AB}| = 2, 所以 \vec{EC} \cdot \vec{ED} = 4 - 1 = 3. 故选 B.$$

法二: 以点 A 为坐标原点, $\vec{AB}, \vec{AD}$ 的方向分别为 x, y 轴的正方向建立平面直角坐标系(图略), 则 $E(1, 0), C(2, 2), D(0, 2)$, 所以 $\vec{EC} = (1, 2), \vec{ED} = (-1, 2)$, 所以 $\vec{EC} \cdot \vec{ED} = -1 + 4 = 3$. 故选 B.

$$(3) 由题意, a 与 b 的夹角为 \frac{2\pi}{3}, |a|=5, |b|=4,$$

$$则 (a+b) \cdot b = a \cdot b + b^2 = 5 \times 4 \times (-\frac{1}{2}) + 4^2 = 6.]$$

考点二

考向1 典例2 (1)B (2)D [(1)因为 $(b-2a) \perp b$, 所以 $(b-2a) \cdot b = 0$,

$$即 b^2 = 2a \cdot b, 又因为 |a|=1, |a+2b|=2,$$

$$所以 1+4a \cdot b+4b^2=1+6b^2=4,$$

$$所以 |b| = \frac{\sqrt{2}}{2}, 故选 B.$$

$$(2) 因为 |a-3b|=|a+3b|,$$

$$所以两边同时平方可得 a^2 - 6a \cdot b + 9b^2 = a^2 + 6a \cdot b + 9b^2, 所以 a \cdot b = 0,$$

$$因为 a = (3-m, 3), b = (2, m+4),$$

$$所以 a \cdot b = 2(3-m) + 3(m+4) = m + 18 = 0,$$

$$解得 m = -18. 故选 D.]$$

考向2 典例3 (1)C (2)C [(1)因为 $|2b-a| = \sqrt{15}$,

$$所以两边同时平方得 |2b-a|^2 = (2b-a)^2 = 4|b|^2 + |a|^2 - 4a \cdot b = 15,$$

$$又因为 |a|=1, |b|=2,$$

$$所以 16+1-4a \cdot b = 15, 得 a \cdot b = \frac{1}{2},$$

$$所以 \cos\langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{1}{4}.$$

故选 C.

$$(2) 由已知得 a-b = (1-x, -2).$$

由于向量 $a-b$ 与 b 的夹角为锐角, 所以 $(a-b) \cdot b > 0$, 且 $a-b$ 与 b 不共线,

$$则 (1-x)x + 2 > 0, 且 -2x \neq x-1, 解得 x \in$$

$$(-1, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, 2),$$

$$即 x 的取值范围为 (-1, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, 2).$$

故选 C.]

考向3 典例4 $\sqrt{2}$ [法一: 因为 $a=(x, 1), b=(x-1, 2x)$,

$$所以 a-b = (1, 1-2x), 又 a \perp (a-b),$$

$$所以 a \cdot (a-b) = x+1-2x=0, 解得 x=1,$$

$$所以 a = (1, 1),$$

$$则 |a| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

法二: 由 $a \perp (a-b)$, 得 $a \cdot (a-b) = 0$, 即 $a^2 = a \cdot b$, 将 $a=(x, 1), b=(x-1, 2x)$ 代入, 得 $x^2+1=x(x-1)+2x$, 解得 $x=1$, 所以 $a=(1, 1)$, 则 $|a| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$

考题探源

$$1. 解: 因为 a=(1, 0), b=(1, 1), 所以 a+\lambda b=(1+\lambda, \lambda),$$

$$因为 (a+\lambda b) \perp a, 所以 (a+\lambda b) \cdot a = 1+\lambda = 0,$$

$$解得 \lambda = -1.$$

$$2. 解: 因为 m=(\lambda+1, 1), n=(\lambda+2, 2),$$

$$所以 m+n=(2\lambda+3, 3), m-n=(-1, -1),$$

$$因为 (m+n) \perp (m-n),$$

$$所以 (m+n) \cdot (m-n) = -(2\lambda+3) - 3 = -2\lambda - 6 = 0,$$

$$解得 \lambda = -3.$$

教材拓展 6

典例5 解: (1) 由极化恒等式知 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AD}^2 - \frac{BC^2}{4} = 9 -$

$$\frac{9}{4} = \frac{27}{4}.$$

$$(2) 设 |\vec{AD}| = 3m > 0, |\vec{BC}| = 2n > 0. 因为 \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 27, 所$$

$$以由极化恒等式知 \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AD}^2 - \frac{BC^2}{4} = 9m^2 - n^2 = 27.$$

$$因为 \vec{FB} \cdot \vec{FC} = -5, 由极化恒等式知 \vec{FB} \cdot \vec{FC} = \vec{FD}^2 -$$

$$\vec{BD}^2 = m^2 - n^2 = -5, 所以 \begin{cases} 9m^2 - n^2 = 27, \\ m^2 - n^2 = -5, \end{cases} 解得 m=2, n=3,$$

$$所以 \vec{EB} \cdot \vec{EC} = 4m^2 - n^2 = 7.$$

随堂·对点检测

$$1. B \quad [因为 a=(3, 1), b=(-2, 2),$$

$$所以 a+\lambda b=(3-2\lambda, 1+2\lambda),$$

$$因为 a \perp (a+\lambda b),$$

$$所以 a \cdot (a+\lambda b) = 3 \times (3-2\lambda) + 1 \times (1+2\lambda) = 10-4\lambda = 0,$$

$$解得 \lambda = \frac{5}{4}. 故选 B.]$$

2. D [法一(平方法): 由 $|a+b|=1$, 两边平方, 得 $a^2+2a \cdot b+b^2=1$ ①. 由 $|a-b|=\sqrt{3}$, 两边平方, 得 $a^2-2a \cdot b+b^2=3$ ②. ①-②, 得 $4a \cdot b=-2$, 所以 $a \cdot b=-\frac{1}{2}$. 故选 D.]

法二(整体表示法): 因为 $a=\frac{1}{2}[(a+b)+(a-b)]$, $b=\frac{1}{2}[(a+b)-(a-b)]$, 所以 $a \cdot b=\frac{1}{2}[(a+b)+(a-b)] \cdot \frac{1}{2}[(a+b)-(a-b)]=\frac{1}{4}(|a+b|^2-|a-b|^2)=\frac{1}{4} \times (1-3)=-\frac{1}{2}$. 故选 D.]

3. A [设 a 与 b 的夹角为 θ , $\theta \in [0, \pi]$,

因为 $(a+b) \cdot (a-2b)=a^2-a \cdot b-2b^2=|a|^2-|a||b| \cdot \cos \theta-2|b|^2=-17$,

所以 $2^2-2 \times 3 \cos \theta-2 \times 3^2=-17$,

解得 $\cos \theta=\frac{1}{2}$, 因为 $\theta \in [0, \pi]$, 所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

故选 A.]

4. ABD [由题意可知, $\overrightarrow{AB}=(3,1)$, $\overrightarrow{AC}=(2,4)$, $\overrightarrow{BD}=(-4,2)$, $\overrightarrow{CD}=(-3,-1)$,

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$, A 正确;

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}=-4 \times 2+2 \times 4=0$, 则 $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$, B 正确;

$\cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AB}|} = \frac{3 \times 2+1 \times 4}{\sqrt{2^2+4^2} \sqrt{3^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 又

$0^\circ \leq \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle \leq 180^\circ$, 则向量 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为 45° , C 错误;

$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$, 即 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, D 正确.

故选 ABD.]

5. $(\sqrt{5}, 3)$ [设向量 a, b 的夹角为 θ , 因为向量 a, b 的夹角为锐角, 所以 $0 < \cos \theta < 1$, 因为 $c=a+2b$, 所以 $c^2=(a+2b)^2=a^2+4a \cdot b+4b^2=5+4 \cos \theta \in (5, 9)$, 所以 $|c| \in (\sqrt{5}, 3)$.]

第 40 课时 平面向量的应用

理法先行·题练固本

链教材·夯基固本

1. C [因为 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, 所以 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, 所以 $A = \frac{\pi}{2}$. 故选 C.]

2. 8 [取 AB 的中点 M , 连接 CM (图略), 则 $CM \perp AB$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \angle BAC = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2 = 8$.]

考点深研·题型突破

考点一

- 典例 1 A [因为 $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$,

所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

设 $AB=x$, 则 $\overrightarrow{AD}^2=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2$,

$$\text{即 } 37 = \frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9} \times x \times 9 \cos 60^\circ + \frac{1}{9} \times 9^2,$$

$$\text{即 } 2x^2 + 9x - 126 = 0,$$

因为 $x > 0$,

故解得 $x=6$ (负值舍去), 即 $AB=6$,

$$\text{所以 } |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|$$

$$= \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - 2|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ}$$

$$= \sqrt{6^2 + 9^2 - 2 \times 6 \times 9 \times \frac{1}{2}}$$

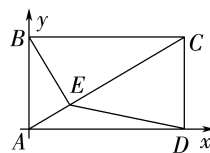
$$= 3\sqrt{7}.]$$

多维变迁

$$\frac{\sqrt{21}}{2} \text{ [以 } A \text{ 为坐标原点, } AD, AB \text{ 所在直线分别为 } x \text{ 轴、} y$$

轴建立平面直角坐标系, 则 $A(0,0)$, $B(0,\sqrt{3})$, $C(3,\sqrt{3})$,

$D(3,0)$, $\overrightarrow{AC}=(3,\sqrt{3})$,



设 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}$, 则 E 的坐标为 $(3\lambda, \sqrt{3}\lambda)$,

故 $\overrightarrow{BE}=(3\lambda, \sqrt{3}\lambda-\sqrt{3})$.

因为 $BE \perp AC$, 所以 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC}=0$,

$$\text{即 } 9\lambda + 3\lambda - 3 = 0,$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{1}{4},$$

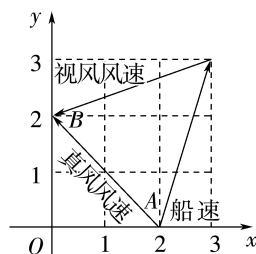
$$\text{所以 } E\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right),$$

$$\text{故 } \overrightarrow{ED}=\left(\frac{9}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right), |\overrightarrow{ED}|=\frac{\sqrt{21}}{2},$$

$$\text{即 } ED=\frac{\sqrt{21}}{2}.]$$

考点二

典例 2 (1)A (2)AC [(1)如图, 真风风速对应的向量=视风风速对应的向量-船行风风速对应的向量=视风风速对应的向量+船速对应的向量= $\overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{2} \in (1.6, 3.3)$, 故选 A.]

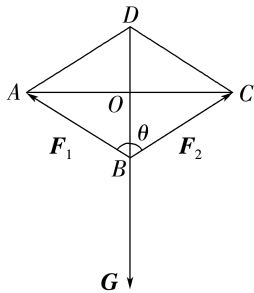


(2) 如图所示, 因为 $|\overrightarrow{F_1}|=|\overrightarrow{F_2}|$, 所以平行四边形 $ABCD$ 为菱形, 故 $|\overrightarrow{F_1}| \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{G}|$, 即 $|\overrightarrow{F_1}| = \frac{|\overrightarrow{G}|}{2 \cos \frac{\theta}{2}}$, 故 A 正确;

由 A 项解析知, θ 越小越省力, θ 越大越费力, 故 B 错误;

当 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 时, $\angle ABD = \frac{\pi}{3}$, 又 $AB=AD$, 所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形, 即 $|\overrightarrow{F_1}|=|\overrightarrow{G}|$, 故 C 正确;

若 $\theta = \pi$, 则 $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$, 与 $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{G}$ 矛盾, 所以 $\theta \neq \pi$, 故 D 错误.



故选 AC.]

考点三

考向 1 典例 3 8

[如图, 因为 $\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$,

E 为 AC 的中点,

所以 $\vec{AD} = x\vec{AB} + 2y\vec{AE}$,

因为 B, E, D 三点共线,

所以 $x + 2y = 1 (x > 0, y > 0)$,

所以 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = (x + 2y) \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \right) = 4 + \frac{4y}{x} + \frac{x}{y} \geq 4 +$

$2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{x}{y}} = 8$,

当且仅当 $\frac{4y}{x} = \frac{x}{y}$, 即 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}$ 时等号成立, 故 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$

的最小值为 8.]

考向 2 典例 4 B [因为 P 为图中 7 个正六边形(边长为 1)

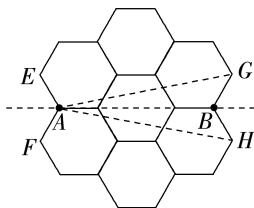
内部或边界上的点,

A, B 为两个固定顶点,

所以 $\vec{AP} \cdot \vec{AB} = |\vec{AP}| |\vec{AB}| \cos \langle \vec{AP}, \vec{AB} \rangle = 4 |\vec{AP}| \cos \langle \vec{AP}, \vec{AB} \rangle$,

当点 P 与点 E 或点 F 重合时,

$|\vec{AP}| \cos \langle \vec{AP}, \vec{AB} \rangle$ 最小,



最小值为 $1 \times \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$;

当点 P 与点 G 或点 H 重合时, $|\vec{AP}| \cos \langle \vec{AP}, \vec{AB} \rangle$ 最大,

最大值为 $4 + 1 \times \cos 60^\circ = \frac{9}{2}$,

所以 $-2 \leq 4 |\vec{AP}| \cos \langle \vec{AP}, \vec{AB} \rangle \leq 18$,

则 $\vec{AP} \cdot \vec{AB}$ 的取值范围是 $[-2, 18]$.

故选 B.]

考向 3 典例 5 D [由 $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = \sqrt{2}, |\vec{AB}| = 2$, 可知 $\vec{OA} \perp \vec{OB}$,

故点 A, B 在以 O 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆上,

取 AB 的中点 H , 可知 $|OH| = 1$,

所以点 H 在以 O 为圆心, 1 为半径的圆上,

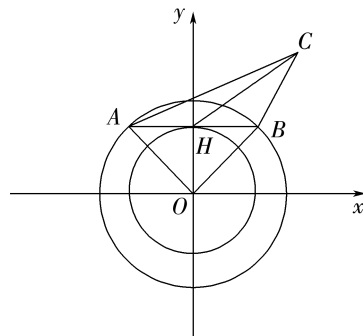
则 $|2\vec{CA} + \vec{AB}|^2 = 4\vec{CA}^2 + 4\vec{CA} \cdot \vec{AB} + \vec{AB}^2$

$$= 4\vec{CA} \cdot (\vec{CA} + \vec{AB}) + 4 = 4\vec{CA} \cdot \vec{CB} + 4$$

$$= 4(\vec{CH} + \vec{HA}) \cdot (\vec{CH} + \vec{HB}) + 4$$

$$= 4(\vec{CH}^2 - \vec{HA}^2) + 4$$

$$= 4(\vec{CH}^2 - 1) + 4 = 4\vec{CH}^2,$$



所以 $|2\vec{CA} + \vec{AB}| = 2|\vec{CH}|$,

又 $||\vec{CO}| - 1| \leq |\vec{CH}| \leq |\vec{CO}| + 1, |\vec{CO}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,

则 $4 \leq |\vec{CH}| \leq 6$, 故 $8 \leq 2|\vec{CH}| \leq 12$,

即 $|2\vec{CA} + \vec{AB}|$ 的取值范围是 $[8, 12]$.

故选 D.]

教材拓展 7

典例 6 B [$\because \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}, \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}$ 分别表示与向量 $\vec{AB}, \vec{AC}$ 方向相

同的单位向量,

$\therefore$ 设 $\vec{AD} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}, \vec{AE} = \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}$,

则 $|\vec{AD}| = |\vec{AE}| = 1$,

以 AD, AE 为邻边作平行四边形 $ADFE$, 可得 $\vec{AF} = \vec{AD} +$

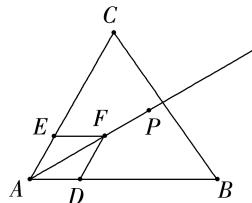
$\vec{AE} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}$,

$\therefore$ 四边形 $ADFE$ 是菱形, 可得 AF 平分 $\angle BAC$.

又 $\because \vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} \right), \lambda \in [0, +\infty)$,

$\therefore \vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = \lambda \left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} \right) = \lambda \vec{AF}$, 可得点 P 在射

线 AF 上运动.



由于 $\triangle ABC$ 的内心在 $\angle BAC$ 的平分线上, 所以点 P 的轨迹一定经过 $\triangle ABC$ 的内心.

故选 B.]

随堂·对点检测

1. A [$\because (\vec{OB} - \vec{OC}) \cdot (\vec{OB} + \vec{OC} - 2\vec{OA}) = 0$,

$\therefore \vec{CB} \cdot (\vec{AB} + \vec{AC}) = 0$,

$\therefore \vec{CB} \perp (\vec{AB} + \vec{AC})$,

$\therefore \triangle ABC$ 的边 BC 上的中线和边 BC 垂直,

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形. 故选 A.]

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) $a \parallel b$ (2) $\neq$ (3) $a=c$ 且 $b=d$ (4) $a=c$

$$\text{且 } b=-d \quad (5) |z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

知识点 2 $Z(a, b)$

知识点 3 (1) $(a+c)+(b+d)i$ $(a-c)+(b-d)i$ $(ac-$

$$bd)+(ad+bc)i \quad \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

链教材·夯基固本

1. -1 [由题意知 $\begin{cases} m+1=0, \\ m-1 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $m=-1$.]

2. $-2+i$ [$\frac{5}{i-2} = \frac{5(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = -2-i$,

故其共轭复数是 $-2+i$.]

3. A [由 $z=m(3+i)-(2-i)=(3m-2)+(m+1)i$,

$$\text{又 } \frac{2}{3} < m < 1, \text{ 则 } \begin{cases} 3m-2 > 0, \\ m+1 > 0, \end{cases}$$

所以复数 z 在复平面内对应的点为 $(3m-2, m+1)$, 位于第一象限.

故选 A.]

4. $-5-5i$ [$(-2-i)(3+i) = -2 \times 3 - 2 \times i - 3 \times i - i \times i = -6-2i-3i-i^2 = -6-2i-3i+1 = -5-5i$.]

5. 1 [由题意可知 $|z| = \left| \frac{1+i}{1-i} \right| = |i| = 1$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 ACD [对于 A, 由题知, $\bar{z}=1-mi$, 则 $\bar{z}(2-i) = (1-mi)(2-i) = (2-m) - (1+2m)i$,

$$\text{又 } \bar{z}(2-i) \text{ 是纯虚数, 则 } \begin{cases} 2-m=0, \\ 1+2m \neq 0, \end{cases}$$

解得 $m=2$, A 正确;

对于 B, $i(1+i) = -1+i$, 其虚部为 1, B 错误;

对于 C, 因为 $z(1+i)=2$, 所以 $z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-i$, 则 $|z| = \sqrt{2}$, C 正确;

对于 D, 由 $(x-i)i = -i^2 + xi = 1+xi = y+5i$, 得 $x=5, y=1$, 则 $x+y=6$, D 正确. 故选 ACD.]

母题探究

1. $-\frac{1}{2}$ [由题知, $\bar{z}=1-mi$, 则 $\bar{z}(2-i) = (1-mi)(2-i) = (2-m) - (1+2m)i$,

$$\text{又 } \bar{z}(2-i) \text{ 是实数, 则 } 1+2m=0, \text{ 解得 } m=-\frac{1}{2}.$$

2. $-1-i$ [$i(1+i) = -1+i$, 故其共轭复数为 $-1-i$.]

3. $\sqrt{2}$ [法一: $z=i(1+i) = -1+i$, $|z| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$.

$$\text{法二: } |z| = |i(1+i)| = |i| |1+i| = \sqrt{2}.]$$

考点二

典例 2 (1) A (2) A (3) A (4) B

$$[(1) \frac{1}{z-1} = \frac{1}{i} = -i, \text{ 故选 A.}]$$

(2) 因为 $z = (\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ) = \cos(75^\circ+15^\circ) + i \sin(75^\circ+15^\circ) = i$,

所以 $|z|=1$. 故选 A.

2. D [由题意, 知 $F_1+F_2+F_3=0$, 即 $F_3=-(F_1+F_2)$, 所以 $F_3^2=(F_1+F_2)^2=F_1^2+F_2^2+2F_1 \cdot F_2=4+16+16\cos 60^\circ=28$, 即 $|F_3|=2\sqrt{7}$ N. 故选 D.]

3. A [因为 $a=(-5, m)$, $b=(-2, 3)$, 且 a, b 的夹角为锐角, 则 $a \cdot b = 10+3m > 0$, 解得 $m > -\frac{10}{3}$.

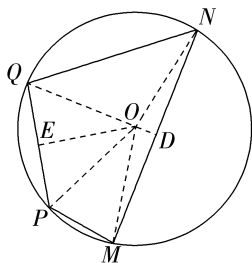
当 a, b 共线时, $-2 \times m = -5 \times 3$, 解得 $m = \frac{15}{2}$,

此时 $a = (-5, \frac{15}{2})$, $b = (-2, 3)$, 满足 $a = \frac{5}{2}b$, 此时两向量夹角为 0° ,

于是当 a, b 的夹角为锐角时, $m \in (-\frac{10}{3}, \frac{15}{2}) \cup (\frac{15}{2}, +\infty)$.

故选 A.]

4. C [如图, 连接 MO, OP, OQ, ON , 作 $PQ \perp OE, MN \perp OD$, 垂足分别为 E, D ,



则 E, D 分别是 QP, MN 的中点,

由勾股定理得 $OE = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, $OD = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$,

$$\text{又 } \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OQ} = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) - (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = 2(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OE}),$$

故 $|\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{QN}| = 2|\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OE}| \leq 2(|\overrightarrow{OD}| + |\overrightarrow{OE}|) = 34$, 当 $\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD}$ 共线且反向时等号成立, 所以 $|\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{QN}|$ 的最大值是 34. 故选 C.]

5. 16 [因为 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, 所以 $\overrightarrow{CB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$,

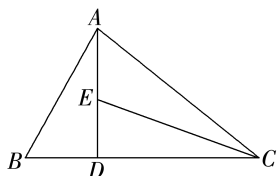
$$\text{因为 } \overrightarrow{CE} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{CE} = x\overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}y\overrightarrow{CD},$$

且 A, D, E 三点共线, 则 $x + \frac{3y}{2} = 1, x > 0, y > 0$,

$$\text{则 } \frac{6x+y}{xy} = \frac{6}{y} + \frac{1}{x} = \left(\frac{6}{y} + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{3}{2}y\right) = \frac{6x}{y} + \frac{3y}{2x} + 10 \geq 2\sqrt{\frac{6x}{y} \cdot \frac{3y}{2x}} + 10 = 16,$$

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} \frac{6x}{y} = \frac{3y}{2x}, \\ x + \frac{3}{2}y = 1, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x = \frac{1}{4}, \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ 时, 等号成立,}$$



所以 $\frac{6x+y}{xy}$ 的最小值是 16.]

$$(3) \because \frac{1+2i}{2-i} = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{5i}{5} = i,$$

$$\therefore z = i^{2027} = i^{4 \times 506 + 3} = -i, \therefore z \cdot \bar{z} = 1.$$

故选 A.

$$(4) (1-3i)^2 = 1-6i+9i^2 = 1-6i-9 = -8-6i, \text{ 故选 B. }$$

多维变迁

$$1. C \quad \left[\text{因为 } \frac{z}{z-1} = \frac{z-1+1}{z-1} = 1 + \frac{1}{z-1} = 1+i, \right.$$

$$\text{所以 } z = 1 + \frac{1}{i} = 1-i. \left. \right]$$

$$2. 2i \quad \left[\text{因为复数 } z \text{ 对应的点的坐标为 } (2, -1), \right.$$

$$\text{所以 } z = 2-i, \bar{z} = 2+i,$$

$$\text{故 } \frac{\bar{z}+i}{z-1} = \frac{2+i+i}{2-i-1} = \frac{2+2i}{1-i} = \frac{2(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)^2}{2} = 2i. \left. \right]$$

考点三

$$\text{典例 3} \quad (1) A \quad (2) B \quad \left[(1) \text{ 由题意可知, } \bar{z} = \frac{4+3i}{1+2i} = \right.$$

$$\frac{(4+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = 2-i,$$

则 $z = 2+i$, 在复平面上对应的点为 $(2, 1)$, 位于第一象限. 故选 A.

$$(2) \text{ 由复数 } z \text{ 满足 } |z+i| + |z-i| = 2,$$

可知复数 z 在复平面内对应点的轨迹为以 $A(0, -1), B(0, 1)$ 为两端点的线段,

而 $|z-1|$ 的几何意义为线段上的点到点 $(1, 0)$ 的距离,

$$\text{则 } |z-1| \text{ 的最大值是 } \sqrt{2}. \text{ 故选 B. } \left. \right]$$

多维变迁

$$1. ABD \quad \left[\text{分三种情况:} \right.$$

$$\text{① 当 } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \text{ 时, } z_A - z_B = z_D - z_C,$$

$$\text{则 } z_D = z_A - z_B + z_C = -5-2i+4-5i+2 = 1-7i;$$

$$\text{② 当 } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} \text{ 时, } z_A - z_B = z_C - z_D,$$

$$\text{则 } z_D = z_C - z_A + z_B = 2+5+2i-4+5i = 3+7i;$$

$$\text{③ 当 } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} \text{ 时, } z_C - z_A = z_B - z_D,$$

$$\text{则 } z_D = z_B - z_C + z_A = -4+5i-2-5-2i = -11+3i.$$

所以点 D 对应的复数为 $1-7i$ 或 $3+7i$ 或 $-11+3i$.

故选 ABD.]

$$2. 4 \quad \left[|z+2-2i| = 1, \text{ 复数 } z \text{ 对应的点的轨迹是以 } C(-2, 2) \right.$$

为圆心, 半径 $r=1$ 的圆,

而 $|z-3-2i| = |z-(3+2i)|$ 的几何意义是复数 z 对应的点与点 $A(3, 2)$ 的距离.

又 $|AC| = 5$, 点 $A(3, 2)$ 在圆 C 外, 所以 $|z-3-2i|$ 的最小值为 $|AC| - r = 5 - 1 = 4$.]

教材拓展 8

$$\text{典例 4} \quad BC \quad \left[\text{复数 } z = 1 - \sqrt{3}i \text{ 的三角形式为 } z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right), \text{ 故 A 错误; } \right.$$

$$\text{当 } r=1, \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } z = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$$

$$\text{因为 } i^{4k+1} + i^{4k+2} + i^{4k+3} + i^{4k+4} = 0, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{所以 } z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2024} = 0, \text{ 故 B 正确; } \left. \right]$$

$$\text{当 } r=2, \theta = \frac{\pi}{3} \text{ 时, } z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

$$z^3 = \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]^3 = 2^3 (\cos \pi + i \sin \pi) = -8, \text{ 故 C}$$

正确;

$$\text{当 } r=3, \theta = \frac{\pi}{4} \text{ 时, } z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

$$z^n = \left[3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n$$

$$= 3^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right),$$

$$\text{若 } z^n \text{ 为纯虚数, 则 } \begin{cases} \cos \frac{n\pi}{4} = 0, \\ \sin \frac{n\pi}{4} \neq 0, \end{cases} \text{ 则 } \frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ 所以 } n =$$

$$4k+2, k \in \mathbf{Z},$$

虽然 $n=4k+2, k \in \mathbf{Z}$ 是偶数, 但是偶数还有 $n=4k, k \in \mathbf{Z}$ 的形式的数,

所以“ n 为偶数”是“ z^n 为纯虚数”的必要不充分条件, 故 D 错误.

故选 BC.]

随堂·点对检测

$$1. A \quad \left[\text{由 } z = i^3 \cdot (2+i) = -i \cdot (2+i) = 1-2i, \text{ 得 } z \text{ 的实部为 } 1. \right.$$

故选 A.]

$$2. D \quad \left[\because (a^2-3a+2) + (a^2-4a+3)i \text{ 是纯虚数, } \right.$$

$$\therefore \begin{cases} a^2-3a+2 = (a-1)(a-2) = 0, \\ a^2-4a+3 = (a-1)(a-3) \neq 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } a=2.$$

故选 D.]

$$3. C \quad \left[\text{因为 } z_1 = 2+i, z_2 = 1-3i, \text{ 所以 } z_1 + z_2 = 2+i+1-3i = (2+1) + (1-3)i = 3-2i, \text{ 则 } |z_1 + z_2| = |3-2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}. \text{ 故选 C. } \right.]$$

$$4. (-\infty, -2) \quad \left[\text{由于 } (1+2i) - m(3-i) = (1-3m) + (2+m)i, \right.$$

故点 $(1-3m, 2+m)$ 位于第四象限,

$$\text{因此 } \begin{cases} 1-3m > 0, \\ 2+m < 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} m < \frac{1}{3}, \\ m < -2, \end{cases} \therefore m < -2,$$

即实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -2)$.]

第六章 数列

第 42 课时 数列的概念及其函数特性

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 序号 n

知识点 2 有限 无限 $>$ $<$

知识点 3 序号 n 数列的第 n 项 a_n

链教材·夯基固本

$$1. 5n-4 \quad \left[\text{由题图可知, } \right.$$

$$a_1 = 1 = 5 \times 1 - 4, a_2 = 6 = 5 \times 2 - 4, a_3 = 11 = 5 \times 3 - 4, a_4 = 16 = 5 \times 4 - 4 = 16, \cdots, \text{ 归纳得 } a_n = 5n - 4. \left. \right]$$

$$2. \begin{cases} 2, n=1, \\ 2n-1, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^* \end{cases} \quad \left[\text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = S_1 = 2. \right.$$

当 $n \geq 2$ 时,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 1 - [(n-1)^2 + 1] = 2n - 1.$$

显然当 $n=1$ 时, 不满足上式,

$$\text{故 } a_n = \begin{cases} 2, n=1, \\ 2n-1, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*. \end{cases} \left. \right]$$

$$3. \frac{n}{n+1} \quad \text{增} \quad \left[a_n = \frac{n}{n+1} \text{ 可以作为这个数列的一个通项公式. } \right.]$$

$$\begin{aligned} \text{由 } a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0. \end{aligned}$$

得 $a_{n+1} > a_n$, 因此数列 $\{a_n\}$ 为递增数列.]

$$4. \frac{1}{2} \quad [\text{由题意得 } a_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}. \text{ 因为 } n \text{ 为正整数, 所以}$$

$$2^n \geq 2, 0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2}, \text{ 所以 } a_n \geq \frac{1}{2}.]$$

$$5. A \quad [\text{由 } a_1 = -2, a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n} (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{可得 } a_2 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2},$$

$$a_3 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, a_4 = 1 - 3 = -2 = a_1,$$

$$a_5 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} = a_2, \dots,$$

即数列 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的数列,

则 $a_{2026} = a_{3 \times 675 + 1} = a_1 = -2$. 故选 A.]

考点深研·题型突破

考点一

$$\text{典例 1} \quad (1) a_n = \begin{cases} 4, n=1, \\ 4n-1, n \geq 2 \end{cases} \quad [\text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = S_1 = 2 \times$$

$$1^2 + 1 + 1 = 4,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 + n + 1 - [2(n-1)^2 + (n-1) + 1] = 4n - 1.$$

由于 $a_1 = 4$ 不满足上式,

$$\text{所以 } a_n = \begin{cases} 4, n=1, \\ 4n-1, n \geq 2. \end{cases}$$

$$(2) \text{解: 因为 } 2S_n = 3a_{n+1} - 3, \text{ 所以 } 2S_{n+1} = 3a_{n+2} - 3,$$

$$\text{两式相减, 得 } 2a_{n+1} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1},$$

$$\text{即 } 3a_{n+2} = 5a_{n+1},$$

$$\text{所以等比数列 } \{a_n\} \text{ 的公比 } q = \frac{5}{3},$$

$$\text{又因为 } 2S_1 = 3a_2 - 3 = 5a_1 - 3,$$

$$\text{所以 } a_1 = 1, \text{ 故 } a_n = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}.$$

$$(3) \text{解: (i) 证明: 当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = \frac{a_1}{2} + \frac{1}{a_1},$$

$$\text{所以 } a_1^2 = 2; \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{2} + \frac{1}{S_n - S_{n-1}}, \text{ 所以}$$

$$\frac{S_n + S_{n-1}}{2} = \frac{1}{S_n - S_{n-1}}, \text{ 所以 } S_n^2 - S_{n-1}^2 = 2, \text{ 故数列 } \{S_n^2\} \text{ 是以}$$

2 为首项, 2 为公差的等差数列.

$$(ii) \text{由 (i) 知, } S_n^2 = 2 + (n-1) \times 2 = 2n, \text{ 得}$$

$$T_n = 2n. \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_n = \frac{T_n}{T_{n-1}} = \frac{2n}{2(n-1)} = \frac{n}{n-1}.$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } b_1 = T_1 = 2, \text{ 不符合上式, 故 } b_n = \begin{cases} 2, n=1, \\ \frac{n}{n-1}, n \geq 2. \end{cases}$$

母题探究

$$\text{解: 当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = 3,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 + n - [2(n-1)^2 + (n-1)] = 4n - 1,$$

由于 $a_1 = 3$ 满足上式,

$$\text{所以 } a_n = 4n - 1 (n \in \mathbf{N}^*).$$

考点二

$$\text{典例 2} \quad (1) A \quad (2) C \quad [(1) \text{ 由已知得 } a_{n+1} - a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) =$$

$$\ln(n+1) - \ln n,$$

$$\text{所以 } a_n - a_{n-1} = \ln n - \ln(n-1),$$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = \ln(n-1) - \ln(n-2),$$

...

$$a_3 - a_2 = \ln 3 - \ln 2,$$

$$a_2 - a_1 = \ln 2 - \ln 1,$$

将上述 $n-1$ 个式子相加,

$$\text{整理得 } a_n - a_1 = \ln n - \ln 1 = \ln n,$$

$$\text{又因为 } a_1 = 0, \text{ 所以 } a_n = \ln n (n \geq 2).$$

当 $n=1$ 时, $a_1 = 0$, 满足 $a_n = \ln n$. 故选 A.

$$(2) \text{ 因为 } \frac{S_n}{a_n} = n^2, \text{ 所以 } S_{n+1} = (n+1)^2 a_{n+1},$$

$$\text{所以 } a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = (n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n,$$

$$\text{化简得 } (n^2 + 2n) a_{n+1} = n^2 a_n,$$

$$\text{即 } (n+2) a_{n+1} = n a_n,$$

$$\text{由 } a_1 = 1, \text{ 知 } a_n \neq 0, \text{ 所以 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2},$$

$$\text{累乘可得 } \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{n}{n+2} \times \frac{n-1}{n+1} \times \dots \times \frac{1}{3},$$

$$\text{即 } a_{n+1} = \frac{2a_1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)},$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{2}{n(n+1)} (n \geq 2),$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = 1 \text{ 也符合上式, 所以 } S_n = n^2 a_n = \frac{2n}{n+1} (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{所以 } S_{30} = \frac{2 \times 30}{30+1} = \frac{60}{31}.$$

故选 C.]

考点三

$$\text{考向 1 典例 3} \quad A \quad [\text{已知在数列 } \{a_n\} \text{ 中, } a_1 = 2, \text{ 且 } a_{n+1} =$$

$$\frac{1}{1-a_n}, n \in \mathbf{N}^*,$$

$$\text{则 } a_{n+2} = \frac{1}{1-a_{n+1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-a_n}} = 1 - \frac{1}{a_n},$$

$$\text{所以 } a_{n+3} = \frac{1}{1-a_{n+2}} = \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{a_n}\right)} = a_n,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 为周期数列, 周期为 3.

$$\text{又 } a_2 = \frac{1}{1-a_1} = -1, a_3 = \frac{1}{1-a_2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } a_{2025} = a_{675 \times 3} = a_3 = \frac{1}{2}.$$

故选 A.]

$$\text{考向 2 典例 4} \quad AD \quad [\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, 比较 } a_n \text{ 与 } a_{n-1} \text{ 的大小, 可得 } \{a_n\} \text{ 是否为递增数列.}]$$

$$\text{对于 A, 由 } a_n = 2n - 11, \text{ 得 } a_n - a_{n-1} = 2n - 11 - [2(n-1) - 11] = 2 > 0,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 故 A 正确;

$$\text{对于 B, 由 } a_n = -3n + 32, \text{ 得 } a_n - a_{n-1} = -3n + 32 - [-3(n-1) + 32] = -3 < 0,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 是递减数列, 故 B 错误;

对于 C, 由 $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$, 得 $a_n - a_{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
 $= -4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < 0$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是递减数列, 故 C 错误;

对于 D, 由 $a_n = 2 \cdot 3^n$, 得 $a_n - a_{n-1} = 2 \cdot 3^n - 2 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1} > 0$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 故 D 正确. 故选 AD.]

考向 3 典例 5 4 [根据题意, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n + \frac{4}{n}$,

设 $f(x) = x + \frac{4}{x} (x \geq 1)$,

由对勾函数的性质可知: $f(x)_{\min} = f(2)$, 即当 $x = 2$ 时,

$f(x) = x + \frac{4}{x}$ 取得最小值,

则当 $n = 2$ 时, $\{a_n\}$ 取得最小项, 其最小项的值为 $a_2 = 2 + \frac{4}{2} = 4$.]

多维变迁

1. **A** [根据题意, 函数 $f(x)$ 为在定义域 $[1, +\infty)$ 上的减函数, 当 $n \geq 1$ 且 $n \in \mathbf{Z}$ 时, 必有 $f(n) > f(n+1)$, 则数列 $\{a_n\}$ 为递减数列,

反之, 当 $f(x) = -\left(x - \frac{5}{4}\right)^2$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为递减数列, 但函数 $f(x)$ 在定义域上不是减函数,

故“函数 $f(x)$ 为减函数”是“数列 $\{a_n\}$ 为递减数列”的充分不必要条件. 故选 A.]

2. **B** [由题意可得 $a_2 = 2 - \frac{4}{a_1} = -2$, $a_3 = 2 - \frac{4}{a_2} = 4$, $a_4 = 2 - \frac{4}{a_3} = 1$, ...,

可知数列 $\{a_n\}$ 是最小正周期为 3 的周期数列,

且一个周期的和为 $a_1 + a_2 + a_3 = 3$,

则数列 $\{a_n\}$ 的前 2 025 项和为 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2\,025} = 675 \times (a_1 + a_2 + a_3) = 2\,025$.

故选 B.]

3. $\frac{9^8}{10^7}$ [由 $a_n = (n+1)\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$,

可得 $a_{n+1} = (n+2)\left(\frac{9}{10}\right)^n$, $a_{n-1} = n \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-2}$,

若 a_n 为最大项, 则有 $\begin{cases} a_n \geq a_{n-1}, \\ a_n \geq a_{n+1}, \end{cases}$

即 $\begin{cases} (n+1)\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \geq n \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-2}, \\ (n+1)\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \geq (n+2)\left(\frac{9}{10}\right)^n, \end{cases}$ 解得 $8 \leq n \leq 9$,

当 $n = 8$ 或 $n = 9$ 时, 数列取得最大项,

故数列 $\{a_n\}$ 的最大项的值为 $a_8 = a_9 = \frac{9^8}{10^7}$.]

教材拓展 9

典例 6 BCD [A 选项: 因为 $a_{n-2} = a_n - a_{n-1} (n \geq 3)$,

因此 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$= (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + (a_5 - a_4) + \cdots + (a_{n+2} - a_{n+1}) = a_{n+2} - a_2 = a_{n+2} - 1$,

因此 $S_{20} + 1 = a_{22}$, 因此 A 选项错误.

B 选项: 因为 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} = a_{2n}$, 因此 B 选项正确.

C 选项: 因为 $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{30} = a_1 + a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{30} - a_1 = a_3 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{30} - a_1 = \cdots = a_{31} - a_1 = a_{31} - 1$, 因此 C 选项正确.

D 选项: 因为 $a_{n-1} = a_n - a_{n-2} (n \geq 3)$, 因此 $a_{n-1}^2 = a_n a_{n-1} - a_{n-1} a_{n-2} (n \geq 3)$,

即 $T_n = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 = a_1^2 + (a_3 a_2 - a_1 a_2) + (a_4 a_3 - a_3 a_2) + \cdots + (a_{n+1} a_n - a_n a_{n-1}) = a_1^2 + a_{n+1} a_n - a_1 a_2 = a_n a_{n+1}$,

因为 $T_n = a_{2\,023} a_{2\,024}$, 因此 $n = 2\,023$, 因此 D 选项正确. 故选 BCD.]

随堂·对点检测

1. **C** [当 $n = 1$ 时, $S_1 = 4a_1 - 3$, $S_1 = 4S_1 - 3$, 得 $S_1 = 1$,

当 $n \geq 2$ 时, $S_n = 4(S_n - S_{n-1}) - 3$, $3S_n = 4S_{n-1} + 3$,

$S_n = \frac{4}{3} S_{n-1} + 1$,

$S_n + 3 = \frac{4}{3} (S_{n-1} + 3)$, 又 $S_1 + 3 = 4$,

所以 $\{S_n + 3\}$ 是首项为 4, 公比为 $\frac{4}{3}$ 的等比数列,

所以 $S_n + 3 = 4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, $S_n = 4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 3 = 3 \left[\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right]$.

故选 C.]

2. **D** [由 $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n^2 + n}$, 得 $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, ...,

$a_3 - a_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, $a_2 - a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, 将上述 $n-1$ 个式子相

加, 得 $a_n - a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$,

又因为 $a_1 = \frac{1}{2}$, 所以 $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, 所以 $a_{2\,025} = 1 - \frac{1}{2\,026} = \frac{2\,025}{2\,026}$, 故选 D.]

3. 7 [因为 $a_n = \frac{2n-2}{2n-15} = \frac{2n-15+13}{2n-15} = 1 + \frac{13}{2n-15}$,

当 $n \leq 7$, $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $2n-15 < 0$, $a_n = 1 + \frac{13}{2n-15}$ 为递减数列,

且 $1 > a_n = 1 + \frac{13}{2n-15} \geq a_7 = 1 + \frac{13}{-1} = -12$,

所以当 $n > 7$, $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $2n-15 > 0$, $a_n = 1 + \frac{13}{2n-15}$ 为递减数列,

且 $a_n = 1 + \frac{13}{2n-15} > 1$,

所以 a_n 取到最小值时 n 的值是 7.]

第 43 课时 等差数列及其前 n 项和

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) 同一个常数 (2) $2A = a + b$

知识点 2 (1) $a_1 + (n-1)d$ (2) $na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$

知识点 3 (1) $a_k + a_l = a_m + a_n \quad md$

链教材·夯基固本

1. -3 [设方程 $x^2+6x+1=0$ 的两根分别为 x_1 和 x_2 , 则 $x_1+x_2=-6$, 所以两根的等差中项为 -3 .]
2. 6 [由题意可得 $\begin{cases} a_1+3d+a_1+7d=20, \\ a_1+6d=12, \end{cases}$ 解得 $a_1=0, d=2$, 故 $a_4=a_1+3d=6$.]
3. 340 [$S_{17}=\frac{17}{2}(a_1+a_{17})=\frac{17}{2}(a_3+a_{15})=\frac{17}{2}\times 40=340$.]
4. 876 [法一: 由 $S_8=8a_1+\frac{8\times 7}{2}d=100$, $S_{16}=16a_1+\frac{16\times 15}{2}d=392$, 得 $a_1=2, d=3$, $\therefore S_{24}=24\times 2+\frac{24\times 23}{2}\times 3=876$.]
法二: $\because S_8, S_{16}-S_8, S_{24}-S_{16}$ 成等差数列, $\therefore 2(S_{16}-S_8)=S_8+(S_{24}-S_{16})$, 得 $S_{24}=3S_{16}-3S_8=876$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1)AC (2)24 [(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\begin{cases} a_5=a_1+4d=4, \\ S_3=3a_1+\frac{3\times 2}{2}d=-6, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1=-4, \\ d=2, \end{cases} \text{ 故 A 正确;}$$

$a_3=a_1+2d=-4+4=0$, 故 B 错误;

$$S_5=5a_1+\frac{5\times 4}{2}d=-20+20=0, \text{ 故 C 正确;}$$

因为 $S_2=2a_1+d=-8+2=-6, S_3=-6$, 所以 $S_2=S_3$, 故 D 错误.

故选 AC.

(2)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $a_4=a_1+3d$, 得 $5=-1+3d$, 所以 $d=2$, 则 $a_6=a_1+5d=9$, 故 $S_6=\frac{6\times (a_1+a_6)}{2}=24$.]

多维变迁

1. B [根据题意, 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由于 $S_3=15, S_{10}=120$, 则 $\begin{cases} 3a_1+\frac{3\times 2}{2}d=15, \\ 10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=120, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1=3, \\ d=2, \end{cases}$ 故 $a_7=a_1+6d=15$. 故选 B.]

2. $2n^2$ [由 $\sqrt{a_{n+1}}=\sqrt{a_n}+\sqrt{2}$ 得 $\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}=\sqrt{2}$, 而 $\sqrt{a_1}=\sqrt{2}$, 于是得数列 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是以 $\sqrt{2}$ 为首项, $\sqrt{2}$ 为公差的等差数列, 则有 $\sqrt{a_n}=\sqrt{a_1}+(n-1)d=\sqrt{2}+\sqrt{2}(n-1)=\sqrt{2}n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n^2$.]

考点二

- 典例 2 (1)BCD [对于 A, 当 $n\geq 1$ 时, $a_{n+1}-a_n=d\Rightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, A 错误; 对于 B, 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d$, 符合 $a_n=kn+b$ 的形式,

若 $a_n=kn+b$, 则 $a_{n+1}-a_n=k(n+1)+b-kn-b=k$ (常数), 即数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可以表示为 $a_n=kn+b\Rightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, B 正确;

对于 C, 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=$

$$\frac{dn^2}{2}+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n, \text{ 符合 } S_n=an^2+bn \text{ 的形式,}$$

若 $S_n=an^2+bn$, 当 $n\geq 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=an^2+bn-a(n-1)^2-b(n-1)=2an+b-a$,

当 $n=1$ 时, $a_1=a+b$ 符合上式, 故 $a_n=2an+b-a$, 即数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,

故数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和可以表示为 $S_n=an^2+bn$ 的形式 $\Leftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, C 正确;

对于 D, 由 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$, 可得 $a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}\Leftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, D 正确.]

(2)证明: ①③ $\Rightarrow$ ②.

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_2=3a_1$.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_2=3a_1=a_1+d$, 得 $d=2a_1$,

$$\text{所以 } S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n^2a_1.$$

因为数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 所以 $\sqrt{S_n}=n\sqrt{a_1}$,

$$\text{所以 } \sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=(n+1)\sqrt{a_1}-n\sqrt{a_1}=\sqrt{a_1} \text{ (常数),}$$

所以数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列.

①② $\Rightarrow$ ③.

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{则 } S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{1}{2}n^2d+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n.$$

因为数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列, 所以数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 的通项公式

是关于 n 的一次函数, 则 $a_1-\frac{d}{2}=0$, 即 $d=2a_1$,

$$\text{所以 } a_2=a_1+d=3a_1.$$

②③ $\Rightarrow$ ①.

已知数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列, $a_2=3a_1$, 所以 $S_1=a_1, S_2=a_1+a_2=4a_1$.

设数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 的公差为 $d, d>0$, 则 $\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=\sqrt{4a_1}-\sqrt{a_1}=d$,

得 $a_1=d^2$, 所以 $\sqrt{S_n}=\sqrt{S_1}+(n-1)d=nd$, 所以 $S_n=n^2d^2$,

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2d^2-(n-1)^2d^2=2d^2n-d^2 (n\geq 2)$, 当 $n=1$ 时也满足, 故 $a_n=2d^2n-d^2, n\in\mathbb{N}^*$ 是关于 n 的一次函数, 所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

考点三

- 考向 1 典例 3 (1)C (2)D [(1)在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2+a_8=2a_5=10$, 解得 $a_5=5$, 又 $a_4=4$, 故公差 $d=a_5-a_4=5-4=1$. 故选 C.

(2)法一(利用等差数列的基本量): 由 $S_9=1$, 根据等差数列的求和公式,

$$S_9=9a_1+\frac{9\times 8}{2}d=1\Rightarrow 9a_1+36d=1,$$

$$\text{又 } a_3 + a_7 = a_1 + 2d + a_1 + 6d = 2a_1 + 8d = \frac{2}{9}(9a_1 + 36d) = \frac{2}{9}.$$

故选 D.

法二(利用等差数列的性质):根据等差数列的性质, $a_1 + a_9 = a_3 + a_7$, 由 $S_9 = 1$, 根据等差数列的求和公式,

$$S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = \frac{9(a_3 + a_7)}{2} = 1, \text{ 故 } a_3 + a_7 = \frac{2}{9}.$$

故选 D.

法三(特殊值法):不妨取等差数列的公差 $d = 0$, 则 $S_9 = 1 = 9a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{9}$, 则 $a_3 + a_7 = 2a_1 = \frac{2}{9}$.

故选 D.]

考向 2 典例 4 (1)C (2)C [(1)根据题意, 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $S_{10}, S_{20} - S_{10}, S_{30} - S_{20}$ 成等差数列,

$$\text{则有 } S_{10} + (S_{30} - S_{20}) = 2(S_{20} - S_{10}), \text{ 即 } 20 + (S_{30} - 10) = 2(10 - 20),$$

$$\text{解得 } S_{30} = -30.$$

故选 C.

$$(2) S_n, T_n \text{ 分别是等差数列 } \{a_n\} \text{ 与 } \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和, 且 } \frac{S_n}{T_n} = \frac{3n+1}{2n-1} (n=1, 2, \dots),$$

$$\text{则 } \frac{a_5}{b_5} = \frac{2a_5}{2b_5} = \frac{a_1 + a_9}{b_1 + b_9} = \frac{\frac{9}{2}(a_1 + a_9)}{\frac{9}{2}(b_1 + b_9)} = \frac{S_9}{T_9} = \frac{3 \times 9 + 1}{2 \times 9 - 1} = \frac{28}{17}.$$

故选 C.]

考向 3 典例 5 解:法一:设公差为 d .

$$\text{由 } S_3 = S_{11},$$

$$\text{可得 } 3a_1 + \frac{3 \times 2}{2}d = 11a_1 + \frac{11 \times 10}{2}d,$$

$$\text{即 } d = -\frac{2}{13}a_1.$$

$$\text{从而 } S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n = -\frac{a_1}{13}(n-7)^2 + \frac{49}{13}a_1,$$

$$\text{因为 } a_1 > 0, \text{ 所以 } -\frac{a_1}{13} < 0.$$

故当 $n=7$ 时, S_n 最大.

法二:易知 $S_n = An^2 + Bn (A \neq 0)$ 是关于 n 的二次函数,

$$\text{由 } S_3 = S_{11}, \text{ 可知 } S_n = An^2 + Bn \text{ 的图象关于直线 } n = \frac{3+11}{2} = 7 \text{ 对称.}$$

$$\text{由法一可知 } A = -\frac{a_1}{13} < 0,$$

故当 $n=7$ 时, S_n 最大.

法三:设公差为 d .

$$\text{由法一可知 } d = -\frac{2}{13}a_1.$$

$$\text{要使 } S_n \text{ 最大, 则有 } \begin{cases} a_n \geq 0, \\ a_{n+1} \leq 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} a_1 + (n-1)\left(-\frac{2}{13}a_1\right) \geq 0, \\ a_1 + n\left(-\frac{2}{13}a_1\right) \leq 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } 6.5 \leq n \leq 7.5, \text{ 故当 } n=7 \text{ 时, } S_n \text{ 最大.}$$

法四:设公差为 d .

$$\text{由 } S_3 = S_{11}, \text{ 可得 } 2a_1 + 13d = 0,$$

$$\text{即 } (a_1 + 6d) + (a_1 + 7d) = 0, \text{ 故 } a_7 + a_8 = 0,$$

$$\text{又由 } a_1 > 0, S_3 = S_{11} \text{ 可知 } d < 0,$$

$$\text{所以 } a_7 > 0, a_8 < 0,$$

所以当 $n=7$ 时, S_n 最大.

随堂·点对检测

1. A [等差数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项为 $a, 3b, 2, 5b$,

$$\text{则 } \begin{cases} 3b + 5b = 2 \times 2, \\ a + 2 = 6b, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 1, \\ b = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\text{故等差数列 } \{a_n\} \text{ 的公差为 } \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } a_9 = 1 + 8 \times \frac{1}{2} = 5. \text{ 故选 A.}]$$

2. ABD [$a_n = a_1 + (n-1)d = dn + a_1 - d$.

由等差数列的性质, 得 $\{a_{2n-1}\}$ 是公差为 $2d$ 的等差数列, 故 A 正确.

$2a_n - 1 = 2dn + 2a_1 - 2d - 1$, 所以 $\{2a_n - 1\}$ 是公差为 $2d$ 的等差数列, 故 B 正确.

$\frac{a_n}{n} = \frac{dn + a_1 - d}{n} = d + \frac{a_1 - d}{n}$, 当 $a_1 - d > 0$ 时, $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是递减数列, 故 C 错误.

$a_n + 3nd = 4dn + a_1 - d$, 因为 $4d > 0$, 所以 $\{a_n + 3nd\}$ 是递增数列, 故 D 正确. 故选 ABD.]

3. D [等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 = 20, a_{10} = 35$,

$$\text{则 } d = \frac{a_{10} - a_5}{10 - 5} = 3,$$

$$\text{则 } a_{20} = a_{10} + 10d = 35 + 30 = 65.$$

故选 D.]

4. B [因为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 所以 $S_4, S_8 - S_4, S_{12} - S_8$ 成等差数列,

$$\text{即 } S_4 + S_{12} - S_8 = 2(S_8 - S_4), \text{ 解得 } S_{12} = 96.$$

故选 B.]

5. 30 或 6 [法一: 由 $a_{n+1} - a_n = -2 < 0$, 得 $a_{n+1} < a_n$, 所以 $\{a_n\}$ 是递减数列. 又由 $a_n = 10 + (n-1) \times (-2) = -2n + 12$, 可知当 $n < 6$ 时, $a_n > 0$; 当 $n = 6$ 时, $a_n = 0$; 当 $n > 6$ 时, $a_n < 0$. 所以 $S_1 < S_2 < \dots < S_5 = S_6 > S_7 > \dots$. 故当 $n = 5$ 或 6 时, S_n 最大.

$$\text{因为 } S_5 = \frac{5}{2} \times [10 + 10 + (5-1) \times (-2)] = 30, \text{ 所以 } S_n \text{ 的最大值为 } 30.$$

$$\text{法二: 因为 } S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n = -n^2 + 11n = -\left(n - \frac{11}{2}\right)^2 + \frac{121}{4}, \text{ 所以当 } n \text{ 取与 } \frac{11}{2} \text{ 最接近的整数, 即 } 5 \text{ 或 } 6 \text{ 时, } S_n \text{ 最大, 最大值为 } 30.]$$

第 44 课时 等比数列及其前 n 项和

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1)2 同一个 公比 (2)等比 $G \quad ab$

知识点 2 (1) $a_1 q^{n-1}$ (2) na_1

链教材·夯基固本

1. D [设 $\sqrt{3} + 1$ 与 $\sqrt{3} - 1$ 的等比中项为 S ,

$$\text{则有 } S^2 = (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) = 2,$$

解得 $S = \pm\sqrt{2}$,

即 $\sqrt{3}+1$ 与 $\sqrt{3}-1$ 的等比中项为 $\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$.

故选 D.]

$$2. \frac{1\ 023}{512} \quad [S_{10} = \frac{1 \times [1 - (\frac{1}{2})^{10}]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1\ 023}{512}.]$$

3. $3 \cdot 2^{n-1}$ 或 $2 \cdot 3^{n-1}$ [设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{由题意得} \begin{cases} a_1 q = 6, \\ 6a_1 + a_1 q^2 = 30, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} q=2, & \text{或} \begin{cases} q=3, \\ a_1=2, \end{cases} \end{cases}$$

故 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ 或 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.]

$$4. \frac{4}{3} \quad [\because a_4 a_5 a_6 = a_5^3 = 3, \therefore a_5 = \sqrt[3]{3},$$

$$\therefore \log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \log_3 a_8 + \log_3 a_9 = \log_3 (a_1 a_2 a_8 a_9) =$$

$$\log_3 a_5^4 = \log_3 3^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}.]$$

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 (1)D (2)2 [(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

由 $a_4^2 = a_6$, 得 $(a_1 q^3)^2 = a_1 q^5$, 即 $a_1 q = 1$,

又 $a_1 = \frac{1}{3}$, 故 $q = 3$, 所以 $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{3} + 1 + 3 + 9 = \frac{40}{3}$.

故选 D.

(2)法一: 设该等比数列为 $\{a_n\}$, S_n 是其前 n 项和, 则 $S_4 = 4$, $S_8 = 68$,

设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$,

当 $q = 1$ 时, $S_4 = 4a_1 = 4$, 即 $a_1 = 1$, 则 $S_8 = 8a_1 = 8 \neq 68$, 显然不成立, 舍去;

当 $q \neq 1$ 时, 则 $S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 4$, $S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = 68$,

两式相除, 得 $\frac{1-q^8}{1-q^4} = \frac{68}{4}$,

$$\text{即} \frac{(1-q^4)(1+q^4)}{1-q^4} = 17,$$

则 $1+q^4 = 17$, 所以 $q = 2$,

所以该等比数列公比为 2.

法二: 设该等比数列为 $\{a_n\}$, S_n 是其前 n 项和, 则 $S_4 = 4$, $S_8 = 68$,

设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$,

所以 $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4$,

$$S_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_1 q^4 + a_2 q^4 + a_3 q^4 + a_4 q^4$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(1+q^4) = 68,$$

所以 $4(1+q^4) = 68$, 则 $1+q^4 = 17$, 所以 $q = 2$,

所以该等比数列公比为 2.

法三: 设该等比数列为 $\{a_n\}$, S_n 是其前 n 项和, 则 $S_4 = 4$, $S_8 = 68$,

设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$,

$$\text{因为 } S_8 - S_4 = a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)q^4 = 68 - 4 = 64,$$

$$\text{又 } S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4,$$

$$\text{所以 } \frac{S_8 - S_4}{S_4} = q^4 = \frac{64}{4} = 16, \text{ 所以 } q = 2,$$

所以该等比数列公比为 2.]

考题探源

$$1. \text{解: 若 } q = 1, \text{ 则 } \frac{S_{10}}{S_5} = \frac{10a_1}{5a_1} = 2 \neq \frac{31}{32},$$

所以 $q \neq 1$.

当 $q \neq 1$ 时, 由 $\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{31}{32}$, 得

$$\frac{(-1)(1-q^{10})}{1-q} \cdot \frac{1-q}{(-1)(1-q^5)} = \frac{31}{32}.$$

整理, 得 $1+q^5 = \frac{31}{32}$,

$$\text{即 } q^5 = -\frac{1}{32}. \text{ 所以 } q = -\frac{1}{2}.$$

2. 证明: 当 $q = 1$ 时,

$$S_n = na_1,$$

$$S_{2n} - S_n = 2na_1 - na_1 = na_1,$$

$$S_{3n} - S_{2n} = 3na_1 - 2na_1 = na_1,$$

所以 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 成等比数列, 公比为 1.

当 $q \neq 1$ 时,

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q},$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q} - \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 q^n (1-q^n)}{1-q} = q^n S_n,$$

$$S_{3n} - S_{2n} = \frac{a_1(1-q^{3n})}{1-q} - \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q} = \frac{a_1 q^{2n} (1-q^n)}{1-q} = q^n (S_{2n} - S_n),$$

$$\text{所以 } \frac{S_{2n} - S_n}{S_n} = \frac{S_{3n} - S_{2n}}{S_{2n} - S_n} = q^n.$$

因为 q^n 为常数, 所以 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 成等比数列, 公比为 q^n .

多维变迁

1. C [法一(直接运用等比数列的通项公式与前 n 项和公式求解): 若该数列的公比 $q = 1$, 代入 $S_5 = 5S_3 - 4$ 中, 有 $5 = 5 \times$

$3 - 4$, 不成立, 所以 $q \neq 1$. 由 $\frac{1-q^5}{1-q} = 5 \times \frac{1-q^3}{1-q} - 4$, 化简得

$q^4 - 5q^2 + 4 = 0$, 所以 $q^2 = 1$ (舍) 或 $q^2 = 4$. 由于此数列各项均

为正数, 所以 $q = 2$, 所以 $S_4 = \frac{1-q^4}{1-q} = 15$. 故选 C.

法二(直接求和法): 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则由已知得 $1+q+q^2+q^3+q^4 = 5(1+q+q^2) - 4$, 整理得 $(1+q)(q^3 - 4q) = 0$. 由于此数列各项均为正数, 所以 $q = 2$, 所以 $S_4 = 1 + q + q^2 + q^3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$. 故选 C.]

2. ACD [设此人第 n 天走 a_n 里路,

则数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 , 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,

$$\text{因为 } S_6 = 378, \text{ 所以 } S_6 = \frac{a_1 \left(1 - \frac{1}{2^6}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 378,$$

解得 $a_1 = 192$.

对于 A, 由于 $a_2 = 192 \times \frac{1}{2} = 96$, 所以此人第二天走了九十六里路, 所以 A 正确;

对于 B, 由于 $a_3 = 192 \times \frac{1}{4} = 48, \frac{48}{378} > \frac{1}{8}$,

所以 B 不正确;

对于 C, 由于 $378 - 192 = 186, 192 - 186 = 6$,

所以此人第一天走的路程比后五天走的路程多六里, 所以 C 正确;

对于 D, $a_4 + a_5 + a_6 = 378 - 192 - 96 - 48 = 42$,

所以此人后三天共走了四十二里路,

所以 D 正确. 故选 ACD.]

考点二

典例 2 (1)BCD [对于 A, 当 $a = b = c = 0$ 时, $b^2 = ac$, 此时 a, b, c 不是等比数列, 故 A 错误;

对于 B, 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设其公差为 d , 则此时有 $\frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}} =$

$2^{a_{n+1} - a_n} = 2^d > 0$, 所以数列 $\{2^{a_n}\}$ 为等比数列, 故 B 正确;

对于 C, 若 $S_n = 3^n - 1$, 则 $a_1 = S_1 = 2$,

$a_n = S_n - S_{n-1} = 3^n - 1 - (3^{n-1} - 1) = 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 2$),

$a_1 = 2$ 显然满足 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$,

所以数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $3a_{n+1} = a_n + 2a_{n+2}$,

所以 $2(a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) = 0$,

而 $a_1 = 1, a_2 = 2$,

因此数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, 故 D

正确. 故选 BCD.]

(2)(i) 证明: 因为 $a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 2}$,

所以 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 2}{3a_n} = \frac{a_n}{3a_n} + \frac{2}{3a_n}$,

所以 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{1}{3}$,

所以 $1 - \frac{1}{a_{n+1}} = 1 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{1}{3}\right)$,

即 $1 - \frac{1}{a_{n+1}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{2}{3}$

$= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)$,

所以 $\frac{1 - \frac{1}{a_{n+1}}}{1 - \frac{1}{a_n}} = \frac{2}{3}$,

又因为 $1 - \frac{1}{a_1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$,

所以数列 $\left\{1 - \frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项, $\frac{2}{3}$ 为公比的等比数列.

(ii) 解: 由 (i) 知, $1 - \frac{1}{a_n} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$,

所以 $\frac{1}{a_n} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{3^n - 2^n}{3^n}$,

所以 $a_n = \frac{3^n}{3^n - 2^n}$.

考点三

典例 3 (1)C [法一: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q \neq 0$), 由题意易知 $q \neq 1$,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = -5, \\ \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 21 \times \frac{a_1(1-q^2)}{1-q}, \end{cases} \text{化简整理得} \begin{cases} q^2 = 4, \\ \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{3}. \end{cases} \text{所}$$

以 $S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{1}{3} \times (1-4^4) = -85$, 故选 C.

法二: 易知 $S_2, S_4 - S_2, S_6 - S_4, S_8 - S_6, \dots$ 为等比数列, 所

以 $(S_4 - S_2)^2 = S_2 \cdot (S_6 - S_4)$, 解得 $S_2 = -1$ 或 $S_2 = \frac{5}{4}$. 当

$S_2 = -1$ 时, 由 $(S_6 - S_4)^2 = (S_4 - S_2) \cdot (S_8 - S_6)$, 解得

$S_8 = -85$; 当 $S_2 = \frac{5}{4}$ 时, 结合 $S_4 = -5$ 得

$$\begin{cases} \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = -5, \\ \frac{a_1(1-q^2)}{1-q} = \frac{5}{4}, \end{cases} \text{化简可得 } q^2 = -5, \text{ 不成立, 舍去. 所以}$$

$S_8 = -85$, 故选 C.]

(2) 解: (i) $\because \{a_n\}$ 为正项等比数列, $\therefore a_2 a_4 + 2a_3 a_5 + a_4 a_6 =$

$a_3^2 + 2a_3 a_5 + a_5^2 =$

$(a_3 + a_5)^2 = 25$,

$\therefore a_n > 0, \therefore a_3 + a_5 > 0, \therefore a_3 + a_5 = 5$.

(ii) 根据等比数列的性质,

得 $a_5 a_6 = a_1 a_{10} = a_2 a_9 = a_3 a_8 = a_4 a_7 = 9$,

$\therefore a_1 a_2 \cdots a_9 a_{10} = (a_5 a_6)^5 = 9^5$,

$\therefore \log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_{10}$

$= \log_3 (a_1 a_2 \cdots a_9 a_{10}) = \log_3 9^5 = 10$.

多维变迁

1. C [在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6, a_7 + a_8$ 成

等比数列,

$\therefore a_1 + a_2 = 16, a_3 + a_4 = 24$,

$\therefore a_7 + a_8 = (a_3 + a_4) \cdot \left(\frac{a_3 + a_4}{a_1 + a_2}\right)^2 = 24 \times \left(\frac{24}{16}\right)^2 = 54$. 故

选 C.]

2. 2 [由题意可知 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = 3(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1})$,

又 $a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = q(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1})$,

所以 $(q+1)(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}) = 3(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1})$.

又 $q > 0, a_n > 0$, 所以 $q+1=3$, 即 $q=2$.]

随堂·对点检测

1. C [由 $a_3 = a_1 q^2 = 2, a_7 = a_1 q^6 = 8$, 得 $q^2 = 2$ (舍负).

又 $\because a_5 = a_3 q^2 > 0, \therefore a_5 = 4$. 故选 C.]

2. CD [对于 A, 数列的前三项为 2, 4, 6, 第二项不是第一和第三项的等比中项, 不成立;

对于 B, 数列的前三项为 1, 4, 9, 第二项不是第一和第三项的等比中项, 不成立;

对于 C, 因为 $\frac{3^{-n}}{3^{-(n-1)}} = \frac{1}{3}$ 为常数, 所以满足等比数列的定义, 故成立;

对于 D, 因为 $\frac{2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^{n-1}} = 2$ 为常数, 所以满足等比数列的定义,

故成立.

故选 CD.]

3. A [由等比数列 $\{a_n\}$, 且 $a_3 + a_5 = 12$ ①,

$a_2 \cdot a_6 = 32, a_3 < a_5$ ②,

可得, $a_2 \cdot a_6 = a_3 \cdot a_5 = 32$ ③,

联立 ① ② ③, 解得 $a_3 = 4, a_5 = 8$.

故选 A.]

4. $\frac{7}{3}$ [设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 易知 $q \neq -1$, 由等比数列前 n 项和的性质可知 $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6$ 仍成等比数列,
- $$\therefore \frac{S_6 - S_3}{S_3} = \frac{S_9 - S_6}{S_6 - S_3},$$
- 又由已知得 $S_6 = 3S_3$,
- $$\therefore S_9 - S_6 = 4S_3,$$
- $$\therefore S_9 = 7S_3, \therefore \frac{S_9}{S_6} = \frac{7}{3}.$$

* 第 45 课时 由数列的递推关系求
通项公式(进阶课)

类型一

- 考向 1 典例 1 B** [因为 $a_n = 4a_{n-1} + 3(n \geq 2)$,
所以 $a_n + 1 = 4(a_{n-1} + 1)(n \geq 2)$,
所以 $\{a_n + 1\}$ 是以 1 为首项, 4 为公比的等比数列,
则 $a_n + 1 = 4^{n-1}$,
所以 $a_n = 4^{n-1} - 1$, 所以 $a_{2026} = 4^{2025} - 1$.
故选 B.]
- 考向 2 典例 2** $a_n = 3^n - 2(n-1)$ [法一: 设 $a_{n+1} + p(n+1) + q = 3(a_n + pn + q)$, 即 $a_{n+1} = 3a_n + 2pn + 2q - p$,
与原式相比较, 由对应项系数相等得
- $$\begin{cases} 2p = 4, \\ 2q - p = -6, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} p = 2, \\ q = -2. \end{cases}$$
- 首项 $a_1 + 2 - 2 = 3$,
所以数列 $\{a_n + 2n - 2\}$ 是首项为 3, 公比为 3 的等比数列, 故
 $a_n + 2n - 2 = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$,
故 $a_n = 3^n - 2(n-1)$.
法二: 因为 $a_{n+1} = 3a_n + 4n - 6(n \in \mathbf{N}^*)$,
所以 $a_{n+1} + 2n = 3a_n + 4n - 6 + 2n$
 $= 3[a_n + 2(n-1)]$,
因为 $a_1 = 3$, 所以 $a_1 + 2 \times (1-1) = 3$,
所以 $\{a_n + 2(n-1)\}$ 是首项为 3, 公比为 3 的等比数列, 则
 $a_n + 2(n-1) = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$,
所以 $a_n = 3^n - 2(n-1)$.]

- 考向 3 典例 3 D** [法一: 在递推公式 $a_{n+1} = 2a_n + 3 \times 5^n$ 的两边同时除以 5^{n+1} ,

$$\text{得 } \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{2}{5} \times \frac{a_n}{5^n} + \frac{3}{5}, \textcircled{1}$$

$$\text{令 } b_n = \frac{a_n}{5^n}, \text{ 则 } \textcircled{1} \text{ 式变为 } b_{n+1} = \frac{2}{5}b_n + \frac{3}{5},$$

$$\text{即 } b_{n+1} - 1 = \frac{2}{5}(b_n - 1),$$

所以数列 $\{b_n - 1\}$ 是等比数列,

$$\text{其首项为 } b_1 - 1 = \frac{a_1}{5} - 1 = -\frac{3}{5}, \text{ 公比为 } \frac{2}{5},$$

$$\text{所以 } b_n - 1 = -\frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1},$$

$$\text{即 } b_n = 1 - \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1},$$

$$\text{所以 } \frac{a_n}{5^n} = 1 - \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 1 - \frac{3 \times 2^{n-1}}{5^n},$$

$$\text{所以 } a_n = 5^n - 3 \times 2^{n-1}.$$

法二: 设 $a_{n+1} + k \times 5^{n+1} = 2(a_n + k \times 5^n)$,

$$\text{则 } a_{n+1} = 2a_n - 3k \times 5^n,$$

$$\text{与 } a_{n+1} = 2a_n + 3 \times 5^n \text{ 比较可得 } k = -1,$$

$$\text{所以 } a_{n+1} - 5^{n+1} = 2(a_n - 5^n),$$

$$\text{所以数列 } \{a_n - 5^n\} \text{ 是首项为 } a_1 - 5 = -3,$$

$$\text{公比为 } 2 \text{ 的等比数列, 所以 } a_n - 5^n = -3 \times 2^{n-1},$$

$$\text{所以 } a_n = 5^n - 3 \times 2^{n-1}.$$

类型二

- 典例 4 AB** [因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{4+15a_n} (n \in \mathbf{N}^*)$,

$$\text{所以 } \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{4+15a_n}{a_n} = 15 + 4 \times \frac{1}{a_n},$$

$$\text{故 } \frac{1}{a_{n+1}} + 5 = 4 \left(\frac{1}{a_n} + 5 \right),$$

$$\text{又 } \frac{1}{a_1} + 5 = 6,$$

所以数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} + 5 \right\}$ 是首项为 6, 公比为 4 的等比数列,

$$\text{故 } \frac{1}{a_n} + 5 = 6 \times 4^{n-1}, \text{ 可得 } \frac{1}{a_n} = 6 \times 4^{n-1} - 5, \text{ 可得 } a_n$$

$$= \frac{1}{6 \times 4^{n-1} - 5},$$

故 $\{a_n\}$ 为递减数列,

$$\text{故 } \left\{ \frac{1}{a_n} \right\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } S_n = \frac{6 \times (1-4^n)}{1-4} - 5n = 2(4^n - 1) - 5n.$$

故正确的只有 AB.

故选 AB.]

类型三

- 典例 5** (1) 证明: 因为 $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$,
所以 $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3a_{n+1} - 6a_n = 3(a_{n+1} - 2a_n)$,
所以 $a_2 - 2a_1 = -1$,
故数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是以 -1 为首项, 3 为公比的等比数列.
由题意 $a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2a_{n+1} - 6a_n = 2(a_{n+1} - 3a_n)$,
所以 $a_2 - 3a_1 = -2$,
故数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ 是以 -2 为首项, 2 为公比的等比数列.
(2) 解: 由 (1) 得, $a_{n+1} - 2a_n = -3^{n-1}, a_{n+1} - 3a_n = -2^n$,
联立两式可得, $a_n = 2^n - 3^{n-1}$.
(3) 解: 因为 $a_n = 2^n - 3^{n-1}$, 所以 $S_n = 2 + 2^2 + \cdots + 2^n - (1 + 3 + \cdots + 3^{n-1})$

$$= \frac{2(1-2^n)}{1-2} - \frac{1-3^n}{1-3}$$

$$= 2^{n+1} - 2 - \frac{3^n - 1}{2}$$

$$= 2^{n+1} - \frac{3^n}{2} - \frac{3}{2}.$$

第 46 课时 数列求和

理法先行 · 题练固本

梳必备 · 破题有方

$$\text{知识点 1 } (1) na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

$$(2) \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$$

链教材 · 夯基固本

$$1. 2^{n+1} - 2 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \quad [S_n = (2 + 2^2 + \cdots + 2^n) + (1 + 2 + \cdots + n) = \frac{2(1-2^{n+1})}{1-2} + \frac{1}{2}n(n+1) = 2^{n+1} - 2 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.]$$

$$2. n(n+1) - \frac{3}{4}(1-5^{-n}) \quad [\text{原式} = (2+4+\cdots+2n) - 3(5^{-1} + 5^{-2} + \cdots + 5^{-n}) = \frac{(2+2n)n}{2} - 3 \times \frac{5^{-1}(1-5^{-n})}{1-5^{-1}} = n(n+1) - \frac{3}{4}(1-5^{-n}).]$$

$$3. 22 \times 2^{20} - 2 \quad [S_{20} = 4 \times 1 + 5 \times 2^1 + 6 \times 2^2 + \cdots + 23 \times 2^{19}, \\ 2S_{20} = 4 \times 2 + 5 \times 2^2 + 6 \times 2^3 + \cdots + 23 \times 2^{20}, \\ \text{两式相减, 得 } -S_{20} = 4 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{19} - 23 \times 2^{20} = 4 + \frac{2(1-2^{20})}{1-2} - 23 \times 2^{20} = -22 \times 2^{20} + 2, \\ \text{故 } S_{20} = 22 \times 2^{20} - 2.]$$

$$4. \frac{2}{2027} \quad [\text{由题意得 } a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \\ \text{故 } S_{2026} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2026} - \frac{1}{2027}\right) = \\ 1 - \frac{1}{2027} = \frac{2026}{2027}.]$$

考点深研 · 题型突破

考点一

$$\text{典例 1} \quad (1) \frac{2025\sqrt{3}}{2} \quad [\text{函数 } y = \sin \frac{\pi}{3}x \text{ 以 } 6 \text{ 为最小正周期,} \\ \text{又 } a_{6m+1} + a_{6m+2} + a_{6m+3} + a_{6m+4} + a_{6m+5} + a_{6m+6} = -3\sqrt{3}, m \\ \in \mathbf{N}^*, 2025 = 337 \times 6 + 3,$$

$$\text{所以 } S_{2025} = -3\sqrt{3} \times 337 + 2023 \sin \frac{2023\pi}{3} + 2024 \cdot$$

$$\sin \frac{2024\pi}{3} + 2025 \sin \frac{2025\pi}{3} = \frac{2025\sqrt{3}}{2}.]$$

$$(2) \text{解: (i) 数列 } \{a_n\} \text{ 满足: } a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2 (n \in \mathbf{N}^*), \\ \text{故 } \{a_n\} \text{ 是首项为 } 1, \text{ 公差为 } 2 \text{ 的等差数列,} \\ \text{由等差数列的通项公式可得 } a_n = 2n - 1. \\ \text{又 } b_1, b_2, b_3 - 1 \text{ 成等差数列, 故 } 2b_2 = b_1 + b_3 - 1, \\ \text{设 } \{b_n\} \text{ 的公比为 } q, \text{ 其中 } b_2 = 2, \text{ 则 } 4 = \frac{2}{q} + 2q - 1, \text{ 解得 } q = 2 \\ \text{或 } q = \frac{1}{2},$$

$$\text{当 } q = \frac{1}{2} \text{ 时, } b_1 = 4, \text{ 此时 } b_n = b_1 q^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}, \text{ 为递减数} \\ \text{列, 舍去;}$$

$$\text{当 } q = 2 \text{ 时, } b_1 = 1, \text{ 此时 } b_n = b_1 q^{n-1} = 2^{n-1}, \text{ 为递增数列, 满足} \\ \text{要求.}$$

$$\text{综上, } a_n = 2n - 1, b_n = 2^{n-1}.$$

$$(ii) \text{由 (i) 得 } c_n = a_n + b_n = 2n - 1 + 2^{n-1}, \\ \text{故 } T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n = (1 + 2^0) + (3 + 2^1) + (5 + 2^2) + \cdots + (2n - 1 + 2^{n-1}) \\ = (1 + 3 + \cdots + 2n - 1) + (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1}) \\ = \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} + \frac{2^0(1 - 2^n)}{1 - 2} = n^2 + 2^n - 1.$$

多维变迁

$$\text{解: (1) 由 } S_n = 2^n + \lambda,$$

$$\text{知当 } n = 1 \text{ 时, } a_1 = 2 + \lambda.$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时,}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2^n + \lambda - 2^{n-1} - \lambda = 2^{n-1}.$$

$$\text{因为数列 } \{a_n\} \text{ 为等比数列,}$$

$$\text{所以 } a_1 = 2 + \lambda \text{ 适合 } a_n = 2^{n-1},$$

$$\text{所以 } \lambda = -1, a_n = 2^{n-1}.$$

$$(2) \text{由 } a_n = 2^{n-1},$$

$$\text{则 } b_n = (-1)^n \log_2 a_{2n+1} = (-1)^n 2n,$$

$$\text{所以 } T_{2n} = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{2n} = (-2 + 4) + (-6 + 8) \\ + \cdots + (-4n + 2 + 4n) = 2n.$$

考点二

$$\text{典例 2 解: (1) 因为 } 4S_n = 3a_n + 4, \text{ ①}$$

$$\text{所以当 } n \geq 2 \text{ 时, } 4S_{n-1} = 3a_{n-1} + 4, \text{ ②}$$

$$\text{则当 } n \geq 2 \text{ 时, ① - ② 得 } 4a_n = 3a_n - 3a_{n-1},$$

$$\text{即 } a_n = -3a_{n-1}.$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, 由 } 4S_1 = 3a_1 + 4, \text{ 得 } 4a_1 = 3a_1 + 4, \text{ 所以 } a_1 = 4 \neq 0,$$

$$\text{所以数列 } \{a_n\} \text{ 是以 } 4 \text{ 为首项, } -3 \text{ 为公比的等比数列,}$$

$$\text{所以 } a_n = 4 \times (-3)^{n-1}.$$

$$(2) \text{因为 } b_n = (-1)^{n-1} na_n = (-1)^{n-1} n \times 4 \times (-3)^{n-1} \\ = 4n \cdot 3^{n-1},$$

$$\text{所以 } T_n = 4 \times 3^0 + 8 \times 3^1 + 12 \times 3^2 + \cdots + 4n \cdot 3^{n-1},$$

$$3T_n = 4 \times 3^1 + 8 \times 3^2 + 12 \times 3^3 + \cdots + 4n \cdot 3^n,$$

$$\text{两式相减得 } -2T_n = 4 + 4(3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}) - 4n \cdot 3^n$$

$$= 4 + 4 \times \frac{3(1 - 3^{n-1})}{1 - 3} - 4n \cdot 3^n$$

$$= -2 + (2 - 4n) \cdot 3^n,$$

$$\text{所以 } T_n = 1 + (2n - 1) \cdot 3^n.$$

考题探源

$$1. \text{解: 由 } a_{n+1} = 2S_n + 2 (n \in \mathbf{N}^*), \text{ 可得 } a_n = 2S_{n-1} + 2 (n \in \mathbf{N}^*, \\ n \geq 2), \text{ 两式相减可得 } a_{n+1} = 3a_n (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2), \text{ 又 } a_2 = \\ 2a_1 + 2, \text{ 数列 } \{a_n\} \text{ 是等比数列, 所以 } a_2 = 2a_1 + 2 = 3a_1, \text{ 则} \\ a_1 = 2, \text{ 故 } a_n = 2 \times 3^{n-1}.$$

$$2. \text{解: 由题意设等差数列 } \{a_n\} \text{ 的公差为 } d,$$

$$\text{因为 } S_4 = 4S_2, a_{2n} = 2a_n + 1, \text{ 所以}$$

$$\begin{cases} 4a_1 + \frac{4 \times (4-1)}{2}d = 4 \left[2a_1 + \frac{2 \times (2-1)}{2}d \right], \\ a_1 + (2n-1)d = 2[a_1 + (n-1)d] + 1, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 2a_1 - d = 0, \\ a_1 - d + 1 = 0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 2, \end{cases}$$

$$\text{所以 } a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 2(n-1) = 2n - 1 (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{又 } b_n = 3^{n-1},$$

$$\text{所以 } c_n = a_n b_n = (2n - 1) \cdot 3^{n-1},$$

$$\text{所以 } T_n = 1 \times 3^0 + 3 \times 3^1 + 5 \times 3^2 + \cdots + (2n - 1) \cdot 3^{n-1},$$

$$3T_n = 1 \times 3^1 + 3 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \cdots + (2n - 3) \cdot 3^{n-1} + (2n - 1) \cdot 3^n,$$

$$\text{两式相减得 } -2T_n = 1 + 2 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} - (2n - 1) \cdot 3^n$$

$$= 1 + 2(3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}) - (2n - 1) \cdot 3^n$$

$$= 1 + \frac{6(1 - 3^{n-1})}{1 - 3} - (2n - 1) \cdot 3^n$$

$$= 1 + 3(3^{n-1} - 1) - (2n - 1) \cdot 3^n$$

$$= 1 + 3^n - 3 - (2n - 1) \cdot 3^n$$

$$= -2 + (2 - 2n) \cdot 3^n,$$

$$\text{所以 } T_n = 1 + (n - 1) \cdot 3^n.$$

多维变迁

$$\text{解: (1) 证明: 因为 } S_n \text{ 为数列 } \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和, 且 } a_{n+1} = S_n + \\ n + 1, \text{ 所以 } S_n = a_{n+1} - n - 1,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = a_{n+1} - n - 1 - [a_n - (n - 1) - \\ 1] = a_{n+1} - a_n - 1,$$

所以 $a_{n+1}=2a_n+1$, 所以 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,
当 $n=1$ 时, $a_2=S_1+1+1=a_1+2=3$, 所以 $a_2+1=2(a_1+1)$,

所以对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$, 即

$$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2, \text{ 又 } a_1+1=2,$$

所以数列 $\{a_n+1\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列.

(2) 由 (1) 知, 数列 $\{a_n+1\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列,

所以 $a_n+1=2 \times 2^{n-1}=2^n$, 即 $a_n=2^n-1$,

$$\text{因为 } b_n=\frac{a_n}{2^{n-1}}=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\text{所以 } n \cdot (2-b_n)=n \cdot \left[2-\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right]=\frac{n}{2^{n-1}},$$

$$\text{所以 } T_n=\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-2}}+\frac{n}{2^{n-1}}, \text{ ①}$$

$$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}, \text{ ②}$$

$$\text{则 ①}-\text{② 得 } \frac{1}{2}T_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=$$

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{n}{2^n}=2-\frac{2}{2^n}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n},$$

$$\text{所以 } T_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}.$$

考点三

典例 3 (1) C [由 $f(4)=2$, 可得 $4^a=2$, 解得 $a=\frac{1}{2}$,

$$\text{则 } f(x)=\sqrt{x}.$$

$$\text{所以 } a_n=\frac{1}{f(n+1)+f(n)}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n},$$

$$\text{所以 } S_{2025}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2025}=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{2026}-\sqrt{2025})=\sqrt{2026}-1.]$$

(2) 解: (i) 当 $n=1$ 时,

$$\text{有 } \sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}=\frac{1}{4}a_2, \text{ 又 } a_1=1,$$

$$\text{所以 } a_2-4\sqrt{a_2}+4=0, \text{ 解得 } a_2=4.$$

(ii) 由 $\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}=1$, 得 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列,

$$\text{所以 } \sqrt{a_n}=1+n-1=n, \text{ 即 } a_n=n^2.$$

$$\text{(iii)} \frac{1}{a_n+\sqrt{a_n}}=\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

$$\text{所以 } S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

多维变迁

$$(1) \text{ 证明: 由 } a_{n+1}=\frac{3a_n}{1+2a_n} \text{ 取倒数可得, } \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1+2a_n}{3a_n}=$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a_n}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-1\right),$$

$$\text{又 } \frac{1}{a_1}-1=1 \neq 0,$$

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$ 是以 1 为首项, $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列.

(2) 解: 由于数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$ 是以 1 为首项, $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数

列, 则 $\frac{1}{a_n}-1=\frac{1}{3^{n-1}}$,

$$\text{可得 } a_n=\frac{3^{n-1}}{3^{n-1}+1} (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\therefore b_n=\frac{2a_n \cdot a_{n+1}}{3^n}=\frac{2 \cdot \frac{3^{n-1}}{3^{n-1}+1} \cdot \frac{3^n}{3^n+1}}{3^n}$$

$$=\frac{2 \cdot 3^{n-1}}{(3^{n-1}+1)(3^n+1)}=\frac{1}{3^{n-1}+1}-\frac{1}{3^n+1},$$

$$\therefore b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{3^{n-1}+1}-\frac{1}{3^n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3^n+1}=\frac{3^n-1}{2(3^n+1)}.$$

随堂·对点检测

1. D $[a_2=\frac{2}{a_1}=2, \frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{a_{n+2}a_{n+1}}{a_{n+1}a_n}=2, \text{ 所以数列 } \{a_{2n-1}\} \text{ 和}$

$\{a_{2n}\}$ 均为公比为 2 的等比数列. 所以 $S_{2026}=(a_1+a_3+\cdots+$

$$a_{2025})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2026})=\frac{1-2^{1013}}{1-2}+\frac{2 \times (1-2^{1013})}{1-2}=$$

$$3 \times 2^{1013}-3, \text{ 故选 D.}]$$

2. A [观察此数列可知, 当 n 为偶数时, $a_n=\frac{n^2}{2}$; 当 n 为奇数

$$\text{时, } a_n=\frac{n^2-1}{2}. \text{ 因为 } b_n=(-1)^n \cdot a_n$$

$$=\begin{cases} -\frac{n^2-1}{2}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{n^2}{2}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases} \text{ 所以数列 } \{b_n\} \text{ 的前 20 项和为 } (0+$$

$$2)+(-4+8)+(-12+18)+\cdots+\left(-\frac{19^2-1}{2}+\frac{20^2}{2}\right)=2+$$

$$4+6+\cdots+20=\frac{10 \times (2+20)}{2}=110.]$$

3. AC [由题可知: $a_2-a_1=2, a_3-a_2=3$, 则 $a_4-a_3=4, \cdots$,

$$a_n-a_{n-1}=n (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{所以 } a_n=a_{n-1}+n (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*),$$

由累加法得: $a_n=a_n-a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}+\cdots+a_2-a_1+$

$$a_1=n+n-1+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, 也满足上式, 所以 } a_n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

对于 A, 因为 $a_n-a_{n-1}=n$, 所以 $a_{n+1}=a_n+n+1$, 故 A 正确;

$$\text{对于 B, } a_{100}=\frac{100(100+1)}{2}=5050, \text{ 故 B 错误;}$$

$$\text{对于 C, } \frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

$$\text{由裂项相消可得 } S_n=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{对于 D, 令 } t=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{2n}{n+1}=\frac{n(n-1)(n+3)}{2(n+1)},$$

因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 即 $n \geq 1$, 所以 $t \geq 0$, 即 $a_n \geq S_n$, 故 D 错误. 故选 AC.]

$$4. \begin{cases} \frac{(1+n)n}{2}, x=1, \\ \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}, x \neq 1 \end{cases} \quad \left[\text{当 } x=1 \text{ 时, } 1+2x+\right.$$

$3x^2+\cdots+nx^{n-1}=1+2+3+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}$; 当 $x \neq 1$ 时,

记 $S_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$ ①, ① $\times x$ 得 $xS_n=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n$ ②, ①-② 得 $(1-x) \cdot S_n=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}-nx^n$

$$= \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n, \text{ 化简得 } S_n = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}.$$

综上, $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$

$$= \begin{cases} \frac{(1+n)n}{2}, x=1, \\ \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}, x \neq 1. \end{cases}$$

* 第 47 课时 数列的综合应用(进阶课)

类型一

典例 1 解: (1) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 设公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 设公比为 q ,

$$a_1=-1, b_1=1, a_2+b_2=2,$$

$$\text{得 } d+q=3. \text{ ①}$$

$$\text{由 } a_3+b_3=5, \text{ 得 } 2d+q^2=6, \text{ ②}$$

$$\text{联立 ①②, 解得 } \begin{cases} d=3, \\ q=0 \end{cases} \text{ (舍去), } \begin{cases} d=1, \\ q=2, \end{cases}$$

$$\text{因此 } T_5 = \frac{1-2^5}{1-2} = 31.$$

$$(2) \text{ 由 } b_1=1, T_3=21, \text{ 得 } q^2+q-20=0,$$

$$\text{解得 } q=-5 \text{ 或 } q=4,$$

由于数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 所以 $d>0$,

当 $q=4$ 时, 由 ① 得 $d=-1$ (舍去);

当 $q=-5$ 时, 由 ① 得 $d=8$,

$$\text{则 } S_n = n \times (-1) + \frac{n(n-1)}{2} \times 8 = 4n^2 - 5n.$$

类型二

典例 2 BD [由题意可知, 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设数列 $\{a_n\}$

的公差为 d , 由题意可得 $a_1=5, 30a_1+\frac{30 \times 29d}{2}=390$, 解得

$$d=\frac{16}{29}, \text{ 所以 } a_n=5+(n-1) \times \frac{16}{29} = \frac{16n+129}{29}.$$

因为 $b_n=2^{a_n}$, 所以 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}} = 2^{a_{n+1}-a_n} = 2^d$ (非零常数),

则数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, B 正确;

因为 $5d=5 \times \frac{16}{29} = \frac{80}{29} \neq 3, \frac{b_{10}}{b_5} = (2^d)^5 = 2^{5d} \neq 2^3$, 所以 $b_{10} \neq 8b_5$, A 错误;

$a_{30}=a_1+29d=5+16=21$, 所以 $a_1b_{30}=5 \times 2^{21} > 105$, C 错误;

$$a_4=a_1+3d=5+3 \times \frac{16}{29} = \frac{193}{29}, a_5=a_1+4d=5+4 \times \frac{16}{29} =$$

$$\frac{209}{29}, \text{ 所以 } \frac{a_3+a_5+a_7}{a_2+a_4+a_6} = \frac{3a_5}{3a_4} = \frac{a_5}{a_4} = \frac{209}{193}, \text{ D 正确. 故选 BD.]}$$

类型三

典例 3 解: (1) 根据题意, 点 $(n, a_n) (n \in \mathbf{N}^*)$ 都在函数 $f(x)=2x$ 的图象上,

则 $a_n=2n$, 易得数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公差的等差数列,

$$\text{则 } S_n = \frac{n(2+2n)}{2} = n(n+1),$$

$$\text{又 } S_n = (n+1) \log_{\frac{1}{2}} b_n, \text{ 所以 } b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\text{故 } a_n=2n, b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(2) **证明:** 根据题意, 由 (1) 的结论, 得 $c_n=b_n^2=\left(\frac{1}{4}\right)^n$,

$$\text{因为 } \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{1}{4}, c_1 = \frac{1}{4}, \text{ 所以 } \{c_n\} \text{ 是以 } \frac{1}{4} \text{ 为首项,}$$

$\frac{1}{4}$ 为公比的等比数列,

$$\text{所以 } T_n = \frac{\frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right].$$

因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 函数 $T_n = \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$ 是增函数,

所以当 $n=1$ 时, T_n 最小为 $\frac{1}{4}, T_n \geq \frac{1}{4}$,

又 $1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n < 1$, 所以 $T_n < \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{1}{4} \leq T_n < \frac{1}{3}$.

规范答题三

典例 (2) $a_1+2a_2x+\cdots+ma_mx^{m-1}$

第七章 立体几何与空间向量

第 48 课时 基本立体图形、简单几何体的表面积与体积

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) 平行 全等 平行 相似 平行且相等 一点 一点 平行四边形 三角形 梯形 (2) 直棱柱 斜棱柱 正棱柱 平行六面体 (4) 垂直 一点 一点 矩形 等腰三角形 等腰梯形 圆面 矩形 扇形 扇环

知识点 2 (1) 斜二测画法 (2) 垂直 分别平行于坐标轴 不变 一半

知识点 3 $2\pi rl$ πrl $\pi(r_1+r_2)l$

知识点 4 Sh $\frac{1}{3}Sh$ $4\pi R^2$ $\frac{4}{3}\pi R^3$

链教材·夯基固本

1. **C** [由于平面 $ABFEA' \parallel$ 平面 $DCGHD'$, 且 $AD, BC, FG, EH, A'D'$ 相互平行且相等, 所以剩下的几何体是五棱柱. 故选 C.]

2. **D** [由直观图的画法规则知, 角度、长度都有可能改变, 而线段的平行关系不变, 正方形的直观图是平行四边形. 故选 D.]

3. **B** [设圆锥的底面圆的半径为 r , 母线长为 l , 因为侧面展开图是一个半圆, 所以 $\pi l = 2\pi r$, 即 $l = 2r$, 所以 $\pi r^2 + \pi rl = \pi r^2 + \pi r \cdot 2r = 3\pi r^2 = 12\pi$, 解得 $r = 2(\text{cm})$.]

4.3 [设球的半径为 R , 由题意得 $\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2$, 解得 $R=3$.]

5. A [由常用结论 2 知, $S_{\triangle AOB} = 2\sqrt{2} \times S_{\triangle A'O'B'} = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 45^\circ = 4$. 故选 A.]

考点深研 · 题型突破

考点一

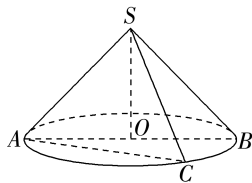
考向 1 典例 1 AD [由圆台定义知, 以直角梯形垂直于底边的腰所在直线为旋转轴, 其余三边旋转一周形成的面围成的旋转体是圆台, 故 A 正确;

底面是正多边形的棱锥, 不能保证顶点在底面上的射影为底面正多边形的中心, 故 B 错误;

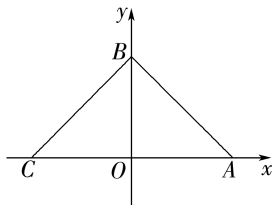
对于 C, 如图, 在圆锥 SO 中, 经过圆锥顶点的平面截圆锥所得截面一定是等腰三角形,

设截面为 $\triangle SAC$, 设 AB 为底面圆 O 的一条直径, 若 $\angle ASB$ 为钝角, 则当 $SA \perp SC$ 时, 截面三角形的面积最大, C 错误;

棱台是由平行于棱锥底面的平面截得的, 故棱台的各侧棱延长后必交于一点, 故 D 正确.]



考向 2 典例 2 D [根据斜二测画法还原图形, 可得如图:



则 $AO = A'O'$, $CO = C'O'$, $BO = 2B'O'$, $BO \perp AC$,

易知 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 故 A、C 错误;

由题意, 过 B' 作 $B'D' \perp A'C'$, 垂足为 D' , 如图,

则 $B'D' = B'O' \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BO =$

$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$,

$S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot A'C' \cdot B'D' = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$,

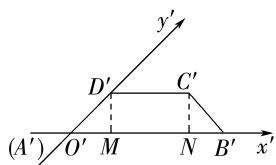
则 $S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{2} S_{\triangle A'B'C'}$, 故 B 错误;

$\triangle ABC$ 的周长 $AB + AC + BC = AC + \sqrt{AO^2 + BO^2} + \sqrt{CO^2 + BO^2} = 4 + 4\sqrt{2}$, 故 D 正确.

故选 D.]

多维变迁

BC [由题意可画出其直观图如下,



其中 $A'B' \parallel C'D'$, $A'B' = AB = 4$, $C'D' = CD = 2$, $A'D' = \frac{1}{2} AD = \sqrt{2}$, 故 A 错误, B 正确;

过点 D' , C' 分别作 $D'M \perp A'B'$, $C'N \perp A'B'$, 垂足分别为点 M, N ,

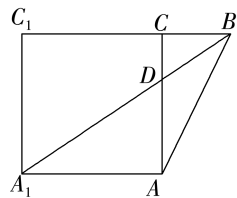
故 $A'M = D'M = C'N = A'D' \sin 45^\circ = 1$, $NB' = A'B' - C'D' - A'M = 1$,

故 $B'C' = \sqrt{2}$, 则四边形 $A'B'C'D'$ 为等腰梯形, 故 C 正确;

故四边形 $A'B'C'D'$ 的周长为 $4 + 2 + 2\sqrt{2} = 6 + 2\sqrt{2}$, 故 D 错误. 故选 BC.]

考向 3 典例 3 D [第 1 步 确定展开方式: 找路径两端点所在平面的公共棱、端点所在棱或所在的母线, 确定展开方式.

将平面 ABC 、平面 AA_1C_1C 沿 AC 翻折至同一平面, 如图所示.



第 2 步 确定最小值: 分别计算不同展开方式中两端点的连线长度, 其最小值为最短路径的长.

则当 A_1, B, D 三点共线时, $A_1D + DB$ 取最小值,

因为 $A_1C_1 = CC_1 = 4$, $BC = 2$, 且 $\angle ACB = \angle ACC_1 = 90^\circ$,

延展后, B, C, C_1 共线, 所以 $BC_1 = 2 + 4 = 6$, $A_1C_1 = 4$, $\angle A_1C_1B = 90^\circ$,

由勾股定理, 得 $A_1B = \sqrt{A_1C_1^2 + BC_1^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$.

故 $A_1D + DB$ 的最小值为 $2\sqrt{13}$. 故选 D.]

多维变迁

B [如图, 绳子的最短长度为侧面展开图中 AM 的长度.

因为圆台的上、下底面半径分别为

1 cm, 3 cm,

所以 $\frac{OB}{OB+AB} = \frac{1}{3}$,

母线长 $AB = 12$ cm, 代入可得

$OB = 6$ cm,

所以 $OA = 18$ cm, $OM = 12$ cm,

设 $\angle BOB' = \theta$,

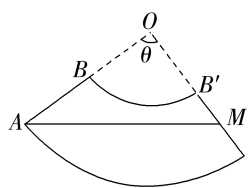
由 $2 \times 1 \times \pi = OB \cdot \theta$,

解得 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 所以 $AM = \sqrt{OA^2 + OM^2 - 2OA \cdot OM \cdot \cos \theta}$

$= \sqrt{18^2 + 12^2 - 2 \times 18 \times 12 \times \frac{1}{2}} = 6\sqrt{7}$ (cm),

即绳子的最短长度为 $6\sqrt{7}$ cm.

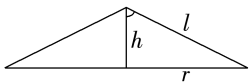
故选 B.]



考点二

考向 1 典例 4 (1)A (2)D [(1)根据题意, 如图所示为该组合体上半部分圆锥轴截面,

由于其母线长为 $2\sqrt{3}$ 米, 轴截面是面积为 $3\sqrt{3}$ 平方米的等腰钝角三角形,



则有 $\begin{cases} h^2 + r^2 = 12, \\ \frac{1}{2} \times 2r \times h = 3\sqrt{3}, \\ r > h, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} r = 3, \\ h = \sqrt{3}, \end{cases}$

则上半部分圆锥的侧面积 $S_1 = \pi r l = 6\sqrt{3}\pi$,

下半部分圆柱的侧面积 $S_2 = 2\pi r \times 2.5 = 15\pi$,

则该组合体的表面积 (不含底面) $S = S_1 + S_2 = (6\sqrt{3} + 15)\pi$.

故选 A.

(2) 设 $A_1B_1 = a$, 则 $AB = 2a$, 如图, 连接 AC, BD 交于点 O , 连接 A_1C_1, B_1D_1 交于点 O_1 , 连接 OO_1 , 由正四棱台的几何性质可知 O_1, O 分别是上、下底面的中心, 所以 $OO_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $OO_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 所以 OO_1 为正四棱台的高 h , 由题可知 $h = 2\sqrt{2}$. 过点 A_1 作 $A_1H \perp AO$ 交 AO 于点 H , 则 $h^2 + (AO - A_1O_1)^2 = AA_1^2$, 即 $h^2 + \left(\sqrt{2}a - \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = (2\sqrt{3})^2$, 解得 $a = 2\sqrt{2}$. 过点 A_1 作 $A_1H' \perp AB$ 交 AB 于点 H' , 则 A_1H' 为斜高, 此时 $A_1H' = \sqrt{12-2} = \sqrt{10}$, 所以正四棱台的表面积 $S = 4 \times \frac{(2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) \times \sqrt{10}}{2} + (2\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 = 40 + 24\sqrt{5}$. 故选 D.]

多题变通

B [由题意作出示意图如图所示.

则球的半径为 $OA = OB$, 由题意可得 $\angle OAB = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\triangle OAB$ 是等边三角形,

所以 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, 所以

$$\angle O_1OB = \frac{\pi}{6},$$

因为球 O 的表面积为 4π , 所以 $4\pi \times OA^2 = 4\pi$, 解得 $OA = 1$, 所以 $OB = AB = 1$,

$$\text{所以 } O_1B = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以圆台的侧面积为 } \pi\left(1 + \frac{1}{2}\right) \times 1 = \frac{3\pi}{2}.$$

故选 B.]

考向 2 典例 5 (1) $\frac{2}{3}$ 1 (2) **C** [(1) 设圆锥的底面半径为

r , 球的半径为 R ,

因为圆锥的轴截面为正三角形, 所以圆锥的高 $h = \sqrt{3}r$, 母线长 $l = 2r$, 由题可知, $h = 2R$, 所以球的半径 $R = \frac{\sqrt{3}}{2}r$,

$$\text{所以圆锥的体积为 } V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 \times \sqrt{3}r = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3,$$

$$\text{球的体积 } V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^3,$$

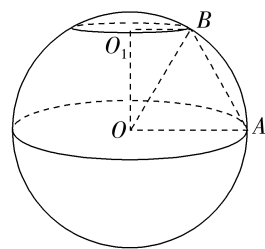
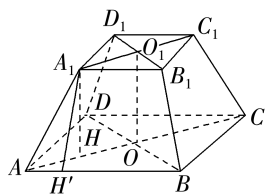
$$\text{所以 } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3}{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^3} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{圆锥的表面积 } S_1 = \pi rl + \pi r^2 = 3\pi r^2,$$

$$\text{球的表面积 } S_2 = 4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 = 3\pi r^2,$$

$$\text{所以 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi r^2}{3\pi r^2} = 1.$$

(2) 法一(补形法): 如图 1, 用一个完全相同的五面体 $HI-JLMN$ 与该五面体相嵌, 因为 $AD \parallel BE \parallel CF$, 且两两之间的距离为 1, $AD = 1, BE = 2, CF = 3$, 则形成的新组合体为一个



三棱柱, 且该三棱柱的直截面(与侧棱垂直的截面)为边长为 1 的等边三角形, 该截面的面积为 $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 侧棱长为 $1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1 = 4$, 所以该五面体的体积为 $V_{ABC-DEF} = \frac{1}{2}V_{ABC-HIJ} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

法二(补形法): 如图 2, 延长 AD 到点 G , 使 $DG = 2$, 延长 BE 到点 H , 使 $EH = 1$, 连接 AF, BF , 可得 $AG = BH = CF = 3$, 结合 $AG \parallel BH \parallel CF$, 可知多面体 $ABC-GHF$ 为三棱柱. 因为四边形 $ABED$ 与四边形 $HGDE$ 全等, 所以 $V_{F-ABED} = V_{F-HGDE} = \frac{1}{3}V_{ABC-GHF}$. 由 $AG \parallel BH \parallel CF$, 且它们两两之间的距离为 1, 得当三棱柱 $ABC-GHF$ 为正三棱柱时, 底面边长为 1, 高为 3, 此时 $V_{ABC-GHF} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 \times 3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. 根据棱柱的性质, 若

三棱柱 $ABC-GHF$ 为斜三棱柱, 则体积也是 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 所以

$$V_{F-ABED} = V_{F-HGDE} = \frac{1}{3}V_{ABC-GHF} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 所以该五面体的体积}$$

$$V = V_{ABC-GHF} - V_{F-HGDE} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

法三(分割法): 因为 AD, BE, CF 两两平行, 且两两之间的距离为 1, 过点 D 作与 AB, AC 平行的直线分别交 BE, CF 于点 P, Q (图略), 则该五面体可以分成一个侧棱长为 1 的三棱柱 $ABC-DPQ$ 和一个底面为梯形的四棱锥 $D-PQFE$, 其中三棱柱的体积等于棱长均为 1 的直三棱柱的体积, 四棱锥的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 底面是上底为 1, 下底为 2, 高为 1 的梯形, 故该五面体的

$$\text{体积为 } V = \left(\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 1 + \frac{1}{3} \times \left[\frac{1}{2} \times (1+2) \times 1\right] \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

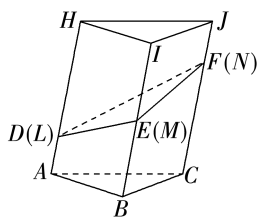


图 1

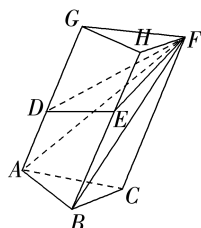


图 2

微点突破 9

典例 6 解: 法一(直接法): 如图 1, 取 BC 的中点 D , 连接 AD, PD , 过点 P 作 $PO \perp AD$ 于点 O ,

由题意可得 $BC \perp AD, BC \perp PD$.

因为 $AD \cap PD = D, AD, PD \subset$ 平面 PAD , 所以 $BC \perp$ 平面 PAD .

又 $BC \subset$ 平面 ABC , 所以平面 $PAD \perp$ 平面 ABC .

因为平面 $PAD \cap$ 平面 $ABC = AD$, $PO \perp AD, PO \subset$ 平面 PAD ,

所以 $PO \perp$ 平面 ABC ,

即 PO 为三棱锥 $P-ABC$ 的高.

因为 $AB = AC = 2, \angle BAC = 60^\circ$,

所以 $BC = 2, AD = \sqrt{3}$.

又 $PA = 1, \angle PAC = \angle PAB = 60^\circ$,

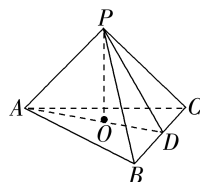


图 1

所以 $PB=PC=\sqrt{3}$, 所以 $PD=\sqrt{2}$,

所以 $AD^2=PA^2+PD^2$,

所以 $AP \perp PD$.

由 $PA \cdot PD=PO \cdot AD$,

得 $PO=\frac{PA \cdot PD}{AD}$,

所以 $V_{\text{三棱锥}P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot PO$

$=\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}BC \cdot AD \cdot \frac{PA \cdot PD}{AD}$

$=\frac{1}{6} \times 2 \times 1 \times \sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

法二(等积转换法):在 $\triangle PAB$ 中,由余弦定理,得 $PB^2=PA^2+AB^2-2PA \cdot AB \cdot \cos \angle PAB=1^2+2^2-2 \times 1 \times 2 \cos 60^\circ=3$.

所以 $AB^2=PA^2+PB^2$,

所以 $PA \perp PB$.

同理可得 $PA \perp PC$,故 $PA \perp$ 平面 PBC .

因为 $AB=AC=2$, $\angle BAC=60^\circ$,

所以 $\triangle ABC$ 为正三角形, $BC=2$.

如图 1,取 BC 的中点 D ,连接 PD ,则 $PD=\sqrt{PB^2-BD^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$.

所以 $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}BC \cdot PD=\sqrt{2}$,

所以 $V_{\text{三棱锥}A-PBC}=\frac{1}{3}S_{\triangle PBC} \cdot PA=\frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times 1=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

所以 $V_{\text{三棱锥}P-ABC}=V_{\text{三棱锥}A-PBC}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

法三(割补法):如图 2,分别取 AB , AC 的中点 M , N ,连接 PM , PN , MN ,则 $PA=AM=AN=1$,

由 $\angle PAB=\angle PAC=\angle BAC=60^\circ$,得 $PM=PN=MN=1$,

所以三棱锥 $P-AMN$ 是一个棱长为 1 的正四面体.

则 $V_{\text{三棱锥}P-AMN}=\frac{1}{3} \cdot S_{\triangle AMN} \cdot h=\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin 60^\circ \times$

$\sqrt{1-\left(\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{12}$,

所以 $V_{\text{三棱锥}P-ABC}=4V_{\text{三棱锥}P-AMN}=4 \times \frac{\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

随堂·对点检测

1. C [依题意,在 $\triangle ABC$ 中, $BC \perp AC$, $BC=2B'C'=4$, $AC=A'C'=3$,

所以 $AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

故选 C.]

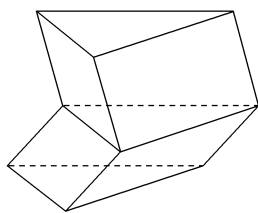
2. ABD [选项 A:圆柱的侧面展开图是一个矩形,A 正确;

选项 B:棱台的侧面一定是梯形,而不是平行四边形,故 B 正确.

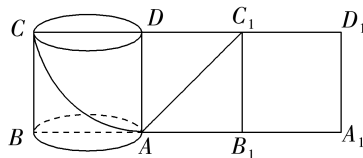
选项 C:有两个面互相平行,其余各面都是四边形的多面体不一定是棱柱,如图所示,故 C 错误;

选项 D:球体是旋转体的一种类型,D 正确.

故选 ABD.]



3. C [如图,在圆柱侧面展开图中,线段 AC_1 的长度即为所求.



在 $\text{Rt}\triangle AB_1C_1$ 中, $AB_1=\pi \cdot \frac{2}{\pi}=2(\text{cm})$, $B_1C_1=2 \text{ cm}$,所以 $AC_1=2$

$\sqrt{2} \text{ cm}$.

故选 C.]

4. CD [圆柱的侧面积为 $2\pi R \times 2R=4\pi R^2$,故 A 错误;圆锥的

母线长为 $\sqrt{R^2+(2R)^2}=\sqrt{5}R$,圆锥的侧面积为 $\pi R \times \sqrt{5}R=\sqrt{5}\pi R^2$,故 B 错误;球的表面积为 $4\pi R^2$,所以圆柱的侧面积与

球的表面积相等,故 C 正确;圆柱的体积为 $\pi R^2 \times 2R=2\pi R^3$,

圆锥的体积为 $\frac{1}{3} \times \pi R^2 \times 2R=\frac{2\pi}{3}R^3$,球的体积为 $\frac{4\pi}{3}R^3$,所以

圆柱、圆锥、球的体积之比为 $2\pi R^3 : \frac{2\pi}{3}R^3 : \frac{4\pi}{3}R^3=3:1:2$,故

D 正确.故选 CD.]

5. $\frac{2}{9}$ [因为在三棱锥 $P-ABC$ 中,线段 PC 上的点 M 满足

$PM=\frac{1}{3}PC$,线段 PB 上的点 N 满足 $PN=\frac{2}{3}PB$,所以

$S_{\triangle PMA}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAC}$,设 N 到平面 PAC 的距离为 d_1 , B 到平面

PAC 的距离为 d_2 ,则 $d_1=\frac{2}{3}d_2$,

则三棱锥 $P-AMN$ 的体积 $V_{\text{三棱锥}P-AMN}=V_{\text{三棱锥}N-APM}=$

$\frac{1}{3}S_{\triangle PAM} \cdot d_1=\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times S_{\triangle PAC} \times \frac{2}{3}d_2=\frac{2}{9}V_{\text{三棱锥}P-ABC}$.

故三棱锥 $P-AMN$ 和三棱锥 $P-ABC$ 的体积之比为 $\frac{2}{9}$.]

* 第 49 课时 与球有关的切、接问题(进阶课)

类型一

考向 1 典例 1 (1)C (2) $\frac{32\pi}{3}$ [(1)设球的半径为 r ,

所以球的体积为 $\frac{4}{3}\pi r^3=36\pi$,所以 $r=3$,

因为正方体的顶点都在球面上,正方体的棱长为 a ,所以 $3a^2=(2r)^2=36$,解得 $a=2\sqrt{3}$.

故选 C.

(2)第 1 步 补形:若为棱柱或圆柱,则无需补形;若棱锥中有侧棱垂直于底面,则补形为棱柱.

根据题意及正弦定理可得上、下底面三角形的外接圆的半径

为 $\frac{\sqrt{3}}{2\sin \frac{\pi}{3}}=1$,又 $AA_1=2\sqrt{3}$,

第 2 步 定外心、定球心:确定上、下底面的外心及外接球球心,连出直角三角形.

且其外接球的球心为上、下底面三角形外心连线的中点.

第 3 步 用勾股定理: $R^2=r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2$ (r 为底面外接圆半径, h

为柱体高, R 为外接球半径).

设外接球的半径为 R ,

则根据勾股定理可得 $1^2+(\sqrt{3})^2=R^2$,所以 $R=2$,

所以该三棱柱的外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi \times 8=\frac{32\pi}{3}$.]

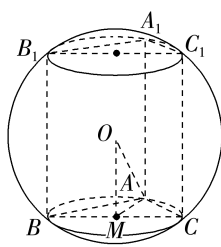
母题探究

$\frac{13}{2}$ [如图所示,过球心 O 作平面 ABC 的垂线,则垂足为 BC 的中点 M .

易得 $BC=5$, 又 $AM=\frac{1}{2}BC=\frac{5}{2}$,

$OM=\frac{1}{2}AA_1=6$, 所以球 O 的半径

$$R=OA=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+6^2}=\frac{13}{2}.$$



考向 2 典例 2 (1)A (2)B (3)BD

[(1)设圆锥的高为 h , 因为圆锥的体积为 3π , 所以 $\frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times$

$h=3\pi$, 解得 $h=1$,

设圆锥的外接球的半径为 R , 可得 $R^2=r^2+(R-h)^2$, 即 $R^2=3^2+(R-1)^2$, 解得 $R=5$, 所以外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=4\pi \times 5^2=100\pi$. 故选 A.

(2)第 1 步 将几何体放入长方体中:几何体的顶点作为长方体的顶点. 因为在三棱锥 $S-ABC$ 中, $SA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, $SA=AB=\sqrt{2}$, $BC=2$,

第 2 步 确定长方体的长、宽、高的长度.

所以三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的直径 $2R$ 即为长、宽、高分别为 $\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2$ 的长方体的体对角线长, 如图所示.

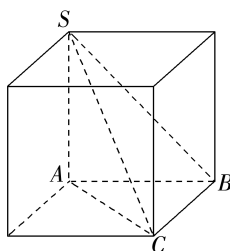
第 3 步 求长方体的外接球半径.

$$(2R)^2=a^2+b^2+c^2.$$

$$\text{所以 } (2R)^2=2+2+4=8,$$

所以三棱锥的外接球的表面积为

$$4\pi R^2=8\pi, \text{ 故选 B.}$$



(3)设该正四棱台外接球的球心为 O , 半径为 R , 则 $4\pi R^2=100\pi$, 解得 $R=5$. 设上底面正方形 $ABCD$ 的中心为 M , 下底面正方形 $EFGH$ 的中心为 N . 如图 1, 若球心在正四棱台的内部, 连接 OA, OE, AM, EN, OM, ON , 则 MN 为正四棱台的高, $OA=OE=5$, 可得 $AM=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2} \times \sqrt{(3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2}=3$,

同理 $NE=4$. 由勾股定理得 $OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$, $ON=\sqrt{OE^2-NE^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$, 可得正四棱台的高 $h=MN=4+3=7$, 正四棱台的体积 $V=\frac{1}{3} \times (18+32+$

$\sqrt{18 \times 32}) \times 7 = \frac{518}{3}$. 如图 2, 若球心在正四棱台的外部, 可得正

四棱台的高 $h=OM-ON=4-3=1$, 所以正四棱台的体积 $V=\frac{1}{3} \times (18+32+\sqrt{18 \times 32}) \times 1 = \frac{74}{3}$. 故选 BD.

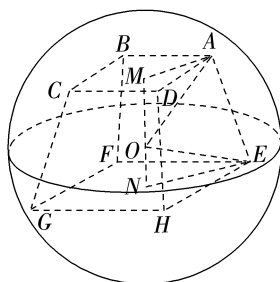


图1

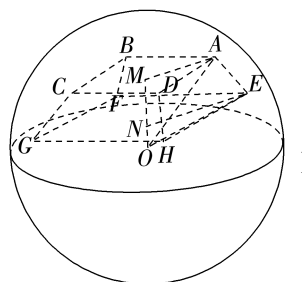


图2

母题探究

1. 8π [将三棱锥 $S-ABC$ 放入长方体中, 设长方体的长、宽、高分别为 a, b, c , 如图所示,

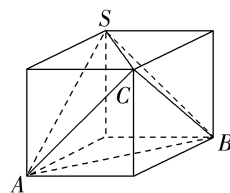
$$\begin{cases} a^2+b^2=5, \\ a^2+c^2=7, \\ b^2+c^2=4, \end{cases}$$

$$\text{所以 } a^2+b^2+c^2=8,$$

因为外接球 O 的直径即为长方体的体对角线,

$$\text{则球 } O \text{ 的半径为 } \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}=\sqrt{2},$$

$$\text{所以球 } O \text{ 的表面积为 } 4\pi \times (\sqrt{2})^2=8\pi.]$$



2. 3 [依题意, 得该正四棱锥底面对角线的长为 $3\sqrt{2} \times \sqrt{2}=6$,

$$\text{高为 } \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - \left(\frac{1}{2} \times 6\right)^2}=3,$$

因此底面中心到各顶点的距离均等于 3, 所以该正四棱锥的外接球的球心即为底面正方形的中心, 其外接球的半径为 3.]

类型二

典例 3 (1)D (2)B [(1)圆锥的侧面展开图是一个半径为

3, 圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的扇形,

$$\text{由题意得, 扇形的弧长 } l=3 \times \frac{2\pi}{3}=2\pi,$$

$$\text{所以该圆锥的底面圆的半径 } r=\frac{l}{2\pi}=1,$$

$$\text{所以该圆锥的高 } h=\sqrt{3^2-r^2}=2\sqrt{2}.$$

设该圆锥内的球的最大半径为 R ,

圆锥的轴截面如图所示,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2}=\frac{1}{2} \times$$

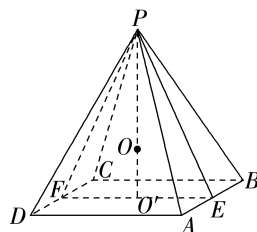
$$(3+3+2) \times R, \text{ 所以 } R=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以该球的体积 V 的最大值是

$$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi.$$

故选 D.

(2)作出示意图如图所示.



设正四棱锥内切球球心为 O , 底面正方形的中心为 O' ,

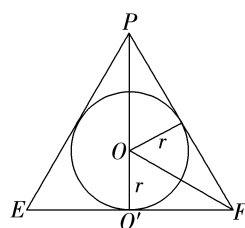
则 O 在 PO' 上, 设内切球半径为 r ,

取 AB 中点 E , CD 中点 F , 则正四棱锥 $P-ABCD$ 内切球半径即为 $\triangle PEF$ 的内切圆半径,

因为底面边长为 3, 所以 $EF=3$,

$$O'F=\frac{1}{2}EF=\frac{3}{2},$$

$$\text{因为高为 } \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ 即 } PO'=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$



则 $PE=PF=3$,

所以 $OF=OP=PO'-OO'=\frac{3\sqrt{3}}{2}-r$,

在 $\text{Rt}\triangle OO'F$ 中, $O'O^2+O'F^2=OF^2$,

即 $r^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-r\right)^2$, 解得 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以正四棱锥 $P-ABCD$ 内切球的体积为 $\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$. 故选 B.]

第 50 课时 空间点、直线、平面之间的位置关系

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1)不在一条直线上 两个点 过该点的公共直线

(2)一条直线 两条相交 两条平行

知识点 3 (1)平行 (2)相等或互补

链教材·夯基固本

1. D [对于 A, 三个不在同一条直线上的点确定一个平面, 故 A 错误. 对于 B, 直线和直线外一点, 确定一个平面, 故 B 错误. 对于 C, 因为圆的一条直径不能确定一个平面, 所以若圆心和圆上的两点在同一条直径上, 则无法确定一个平面, 故 C 错误. 对于 D, 两条平行直线确定一个平面, 梯形有一组对边平行, 另一组对边不平行, 故梯形可确定一个平面, 故 D 正确.]

2. D [$\because \alpha \parallel \beta, \therefore a$ 与 b 无公共点,
 $\therefore a$ 与 b 可能平行, 也可能是异面直线.]

3. (1) $AC=BD$ (2) $AC=BD$ 且 $AC \perp BD$

[(1)要使四边形 $EFGH$ 为菱形, 应有 $EF=EH$,

$\therefore EF \parallel \frac{1}{2}AC, EH \parallel \frac{1}{2}BD$,

$\therefore AC=BD$.

(2)要使四边形 $EFGH$ 为正方形,

应有 $EF=EH$ 且 $EF \perp EH$,

$\therefore EF \parallel \frac{1}{2}AC, EH \parallel \frac{1}{2}BD$,

$\therefore AC=BD$ 且 $AC \perp BD$.]

4. D [连接 BD (图略), 由于 $AA_1 \parallel DD_1$, 所以 $\angle DD_1B$ 即为直线 BD_1 与直线 AA_1 所成的角,

不妨设正方体的棱长为 a , 则 $BD = \sqrt{2}a, BD_1 = \sqrt{D_1D^2 + BD^2} = \sqrt{3}a$,

所以 $\cos \angle DD_1B = \frac{DD_1}{BD_1} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.]

5. C [与直线 BC_1 成异面直线的有 A_1B_1, AC, AA_1 , 共 3 条. 故选 C.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 证明: (1) 如图所示, 连接 B_1D_1 .

因为 EF 是 $\triangle D_1B_1C_1$ 的中位线,

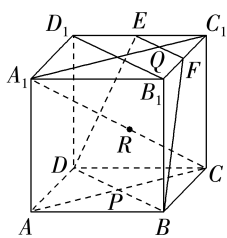
所以 $EF \parallel B_1D_1$.

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

$B_1D_1 \parallel BD$,

所以 $EF \parallel BD$, 所以 EF, BD 确定一个平面,

即 D, B, E, F 四点共面.



(2) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 连接 A_1C ,

设 A_1, C, C_1 确定的平面为 α , 设平面 $BDEF$ 为 β .

因为 $Q \in A_1C_1$, 所以 $Q \in \alpha$.

又 $Q \in EF$, 所以 $Q \in \beta$.

所以 Q 是 α 与 β 的公共点, 同理, P 是 α 与 β 的公共点.

所以 $\alpha \cap \beta = PQ$.

又 $A_1C \cap \beta = R$, 所以 $R \in A_1C, R \in \alpha$, 且 $R \in \beta$.

则 $R \in PQ$, 故 P, Q, R 三点共线.

(3) 因为 $EF \parallel BD$ 且 $EF < BD$, 所以 DE 与 BF 相交,

设交点为 M , 则由 $M \in DE, DE \subset \text{平面 } D_1DCC_1$ 得 $M \in \text{平面 } D_1DCC_1$,

同理, $M \in \text{平面 } B_1BCC_1$.

又平面 $D_1DCC_1 \cap \text{平面 } B_1BCC_1 = CC_1$,

所以 $M \in CC_1$.

所以 DE, BF, CC_1 三线交于一点.

考点二

典例 2 (1)ABD (2)CD [(1)对于 A, 因为 $M \in \alpha, M \in \beta, \alpha \cap \beta = l$, 由基本事实 3 可知 $M \in l$, A 正确;

对于 B, 若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, a \cap b = A$, 则 $A \in \alpha, A \in \beta$, 因为 $\alpha \cap \beta = l$, 所以 $A \in l$, B 正确;

对于 C, 若 $l \cap \alpha = A$, 则有 $l \not\subset \alpha, A \in l$, 但 $A \in \alpha$, C 错误;

对于 D, 有三个不共线的点在平面 α, β 中, 故 α, β 重合, D 正确. 故选 ABD.

(2) 因为点 A 在平面 CDD_1C_1 外, 点 M 在平面 CDD_1C_1 内, 直线 CC_1 在平面 CDD_1C_1 内, CC_1 不过点 M , 所以直线 AM 与 CC_1 是异面直线, 故 A 错误; 取 DD_1 的中点 E , 连接 AE (图略), 则 $BN \parallel AE$, 但 AE 与 AM 相交, 所以 AM 与 BN 不平行, 故 B 错误; 因为点 B_1 与直线 BN 都在平面 BCC_1B_1 内, 点 M 在平面 BCC_1B_1 外, BN 不过点 B_1 , 所以 BN 与 MB_1 是异面直线, 故 C 正确; 同理 D 正确. 故选 CD.]

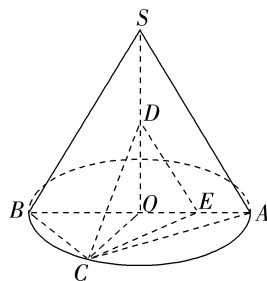
考点三

典例 3 (1)C (2)C [(1)取 OA 的中点 E , 连接 DE, CE ,

因为 D 为 SO 的中点, 所以 $DE \parallel SA$,

则直线 CD 与 AS 所成的角为 $\angle CDE$ (或其补角), 不妨设 $AB=2$,

又圆锥的轴截面 SAB 是正三角形, O 为底面圆的圆心, D 为 SO 的中点, 点 C 在底面圆的圆周上, 且 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,



则 $DE = \frac{1}{2} \times 2 = 1, CE = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, CD =$

$\sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$,

在 $\triangle CDE$ 中, 由余弦定理的推论, 得

$$\cos \angle CDE = \frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + 1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2 \times \frac{\sqrt{7}}{2} \times 1} = \frac{3\sqrt{7}}{14},$$

即直线 CD 与 AS 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{7}}{14}$.

故选 C.

(2) 法一: 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的一侧补上一个相同的长方体 $CDEF-C_1D_1E_1F_1$, 连接 DE_1, B_1E_1 . 易知 $AD_1 \parallel DE_1$, 则 $\angle B_1DE_1$ (或其补角) 为异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角.

因为在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=1, AA_1=\sqrt{3}$,

$$\text{所以 } DE_1 = \sqrt{DE^2 + EE_1^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

$$DB_1 = \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{5},$$

$$B_1E_1 = \sqrt{A_1B_1^2 + A_1E_1^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

在 $\triangle B_1DE_1$ 中, 由余弦定理的推论,

$$\text{得 } \cos \angle B_1DE_1 = \frac{2^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \times 2 \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

即异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

法二: 如图, 连接 BD_1 , 交 DB_1 于点 O , 取 AB 的中点 M , 连接 DM, OM . 易知 O 为 BD_1 的中点, 所以 $AD_1 \parallel OM$, 则 $\angle MOD$ (或其补角) 为异面直线 AD_1 与 DB_1 所成的角. 因为在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=1, AA_1=\sqrt{3}$,

$$\text{所以 } AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2} = 2,$$

$$DM = \sqrt{AD^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$DB_1 = \sqrt{AB^2 + AD^2 + BB_1^2} = \sqrt{5},$$

所以 $OM = \frac{1}{2}AD_1 = 1, OD = \frac{1}{2}DB_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 在 $\triangle DMO$ 中, 由余弦定理的推论,

$$\text{得 } \cos \angle MOD = \frac{1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2 \times 1 \times \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

即异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

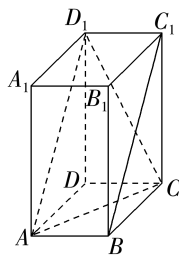
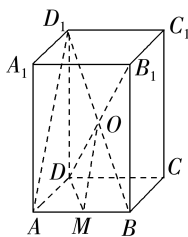
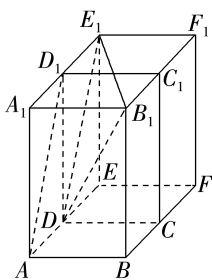
故选 C.]

多维变迁

1. D [如图所示, 连接 CD_1, AD_1 , 根据长方体的性质易知 $BC_1 \parallel AD_1$, 所以 $\angle D_1AC$ (或其补角) 为异面直线 AC 与 BC_1 所成的角, 不妨设 $AA_1=AD=2AB=2a$, 在 $\triangle D_1AC$ 中, $AD_1=2\sqrt{2}a, D_1C=AC=\sqrt{5}a$,

所以由余弦定理的推论, 得

$$\cos \angle D_1AC = \frac{AD_1^2 + AC^2 - CD_1^2}{2AD_1 \cdot AC}$$



$$= \frac{(2\sqrt{2}a)^2 + (\sqrt{5}a)^2 - (\sqrt{5}a)^2}{2 \times 2\sqrt{2}a \times \sqrt{5}a} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

所以异面直线 AC 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

故选 D.]

2. D [如图, 过点 M 作 AO 的平行线 ME 交 OC 于点 E , 连接 EN, ON, MO ,

则 $\angle NME$ (或其补角) 为直线 MN 与 AO 所成的角,

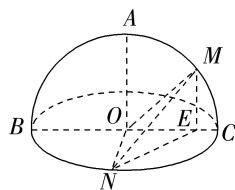
设球的半径为 2, 则 $AO=OM=ON=2$,

因为 M 为 $\widehat{AC}$ 的中点, 所以 $\angle MOE=45^\circ$,

又 $ME \parallel AO, AO$ 垂直于底面, 所以 ME 垂直于底面, $ME \perp OE, ME \perp EN$,

$$\text{则 } ME=OE=\frac{\sqrt{2}}{2}OM=\sqrt{2}, \text{ 所以 } EN=\sqrt{OE^2+ON^2}=\sqrt{6},$$

$$\text{所以 } \tan \angle NME = \frac{EN}{ME} = \sqrt{3}. \text{ 故选 D.}]$$

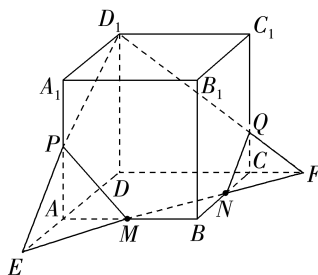


微点突破 10

典例 4 $\frac{7\sqrt{17}}{6}$ [在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 设直线 MN 与直线 DA, DC 分别交于 E, F ,

连接 D_1E, D_1F , 分别与 AA_1, CC_1 交于点 P, Q , 连接 PM, QN ,

则五边形 D_1PMNQ 是过 M, N, D_1 的正方体的截面 α ,



由 M 为 AB 中点, N 为 BC 中点,

得 $AM=BM=BN=CN=1, AE=AM=1, CF=CN=1$,

$$\text{所以 } \frac{AP}{DD_1} = \frac{AE}{ED} = \frac{1}{3}, \text{ 即 } AP = \frac{2}{3},$$

$$\text{同理 } CQ = \frac{2}{3}, D_1E = D_1F = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}, EF = 3EM = 3\sqrt{2},$$

$$PE = PM = QN = QF = \sqrt{1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3},$$

在等腰 $\triangle D_1EF$ 中,

$$\cos \angle D_1EF = \frac{\frac{1}{2}EF}{D_1E} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{13}},$$

$$\text{则 } \sin \angle D_1EF = \sqrt{1 - \cos^2 \angle D_1EF}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{13}}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{2\sqrt{13}},$$

$$S_{\triangle D_1EF} = \frac{1}{2}EF \cdot D_1E \cdot \sin \angle D_1EF = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{13} \times$$

$$\frac{\sqrt{34}}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{17}}{2},$$

$$S_{\triangle PEM} = \frac{1}{2} EM \cdot PE \cdot \sin \angle D_1 EF = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{13}}{3} \times \frac{\sqrt{34}}{2\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{17}}{6},$$

所以截面 α 的面积 $S = S_{\triangle D_1 EF} - 2S_{\triangle PEM} = \frac{3\sqrt{17}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{17}}{6} = \frac{7\sqrt{17}}{6}$.]

随堂·对点检测

1. C [对于 A, 由线面垂直的性质得:

垂直于同一个平面的两条直线平行, 故 A 正确;

对于 B, 由平面的基本性质得:

经过一条直线和这条直线外一点, 有且只有一个平面, 故 B 正确;

对于 C, 由等角定理得:

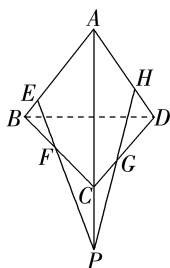
如果空间中两个角的两条边分别对应平行, 那么这两个角相等或互补, 故 C 错误;

对于 D, 如果两个不重合的平面有一个公共点, 则两个平面必交于一条直线, 且公共点在该直线上,

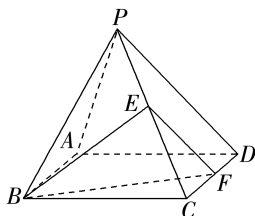
所以它们有且只有一条过该点的公共直线, 故 D 正确.

故选 C.]

2. A [如图, 因为 $EF \subset$ 平面 ABC , 而 $GH \subset$ 平面 ADC , 且 EF 和 GH 相交于点 P , 所以点 P 在两平面的交线上, 因为 AC 是两平面的交线, 所以点 P 必在直线 AC 上.]



3. C [取 CD 的中点 F , 连接 EF, BF, BE , 因为 E, F 分别是棱 PC, CD 的中点, 所以



$$EF \parallel PD, EF = \frac{1}{2} PD,$$

则 $\angle BEF$ (或其补角) 是异面直线 PD 与 BE 所成的角.

设 $AB = BC = 2$, 则 $PD = PA = 3AB = 6, CF = 1$,

$$\text{则 } EF = \frac{1}{2} PD = 3, BF = \sqrt{BC^2 + CF^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5},$$

$$\text{因为 } PB = PC = 6, BC = 2, \text{ 所以 } \cos \angle PCB = \frac{36 + 4 - 36}{2 \times 2 \times 6} =$$

$$\frac{1}{6}, \text{ 所以 } BE = \sqrt{BC^2 + CE^2 - 2BC \cdot CE \cos \angle PCB}$$

$$= \sqrt{4 + 9 - 2 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{6}}$$

$$= \sqrt{11},$$

$$\text{则 } \cos \angle BEF = \frac{BE^2 + EF^2 - BF^2}{2BE \cdot EF}$$

$$= \frac{11 + 9 - 5}{2 \times \sqrt{11} \times 3} = \frac{5\sqrt{11}}{22}.$$

故选 C.]

4. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ [如图, 过点 E 作圆柱的母线交下底面于点 F , 连接 AF ,

易知 F 为 $\widehat{AD}$ 的中点. 设正方形 $AB-$

CD 的边长为 2, 则 $EF = 2, AF = \sqrt{2}$,

$$\text{所以 } AE = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}.$$

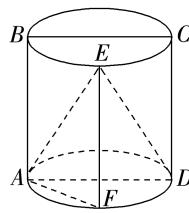
连接 ED , 则 $ED = \sqrt{6}$. 因为 $BC \parallel AD$,

所以 $\angle EAD$ (或其补角) 为异面直线

AE 与 BC 所成的角. 在 $\triangle EAD$ 中,

$$\cos \angle EAD = \frac{6 + 4 - 6}{2 \times 2 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}, \text{ 所以异面直线 } AE \text{ 与 } BC \text{ 所成角}$$

的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.]



第 51 课时 空间直线、平面的平行

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 此平面内 相交

知识点 2 相交直线 相交 交线

链教材·夯基固本

1. A [因为 F, G 分别为 BC, CD 的中点, 所以 $FG \parallel BD$, 因为 $EH \parallel$ 平面 CBD , 平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD, EH \subset$ 平面 ABD , 所以 $EH \parallel BD$, 由平行的传递性可知 $EH \parallel FG$. 故选 A.]

2. D [对于 A, 平面 α 内有无穷多条直线都与平面 β 平行, 并不能保证平面 α 内有两条相交直线与平面 β 平行, 这无穷多条直线可以是一组平行线, 故 A 错误; 对于 B, 直线 $a \parallel \alpha, a \parallel \beta$, 且直线 a 不在 α 内, 也不在 β 内, 当直线 a 平行于平面 α 与平面 β 的相交直线时满足上述条件, 但平面 α 与平面 β 不平行, 故 B 错误; 对于 C, 直线 $a \subset \alpha$, 直线 $b \subset \beta$, 且 $a \parallel \beta, b \parallel \alpha$, 当直线 $a \parallel b$ 时, 不能保证平面 α 与平面 β 平行, 故 C 错误; 对于 D, α 内的任何一条直线都与 β 平行, 则 α 内至少有两相交直线与平面 β 平行, 所以平面 α 与平面 β 平行, 故 D 正确.]

3. $\frac{27}{4}$ [因为 $\alpha \parallel \beta$, 平面 $PBD \cap \alpha = AC$,

平面 $PBD \cap \beta = BD$,

由平面与平面平行的性质定理, 得 $AC \parallel BD$,

$$\text{所以 } \frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD}, \text{ 即 } \frac{4}{9} = \frac{3}{PD}, \text{ 故 } PD = \frac{27}{4}.]$$

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 B [对于 A, 在如图 1 所示三棱柱中, 右侧面为 γ , 前面的平面为 α , 后面的侧面为 β , 满足 $\alpha \cap \gamma = m, \beta \cap \gamma = n$, 且 $m \parallel n$, 但 α, β 相交, A 错误; 对于 B, 如图 2, m, n 相交且都在 α, β 外, 设 m, n 确定的平面为 γ , 即 $m, n \subset \gamma$. 因为 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$, 故可得 $\gamma \parallel \alpha$, 同理 $\gamma \parallel \beta$, 故 $\alpha \parallel \beta$, B 正确; 对于 C, 若 $m \parallel n, n \subset \alpha$, 则 $m \subset \alpha$ 或 $m \parallel \alpha$, C 错误; 对于 D, 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$, 则 m, n 可能平行或相交或异面, D 错误.

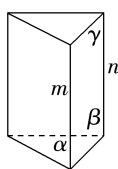


图 1

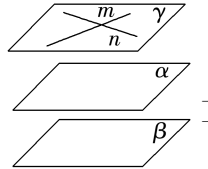


图 2

考点二

考向 1 典例 2 证明:法一(应用线面平行的判定定理):

第 1 步 平移连线:找特殊点并连线,长度一致构造平行四边形,一长一短构造三角形.

设 PA 的中点为 F ,连接 EF,FB (图略).

$\because E, F$ 分别为 PD, PA 的中点, $\therefore EF \parallel AD$, 且 $EF = \frac{1}{2}AD$.

又 $\because BC \parallel AD, BC = \frac{1}{2}AD, \therefore EF \parallel BC$, 且 $EF = BC, \therefore$ 四边形 $BCEF$ 为平行四边形,

第 2 步 证明线线平行.

$\therefore CE \parallel BF$.

第 3 步 证明线面平行:根据线面平行的判定定理,推出线面平行.

又 $\because BF \subset$ 平面 $PAB, CE \not\subset$ 平面 PAB ,

$\therefore CE \parallel$ 平面 PAB .

法二(应用面面平行的性质):第 1 步 平移平面:将平面平移到包含直线的平面中找平行线,构造新的平面.

取 AD 的中点 G ,连接 GE, GC (图略).

由题意知 $AG = BC$ 且 $AG \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCG$ 为平行四边形,

第 2 步 证明面面平行.

$GC \parallel AB$,

$AB \subset$ 平面 $PAB, GC \not\subset$ 平面 PAB ,

$GC \not\subset$ 平面 PAB

$GE \parallel PA$,

$PA \subset$ 平面 $PAB, GE \not\subset$ 平面 PAB ,

$GE \not\subset$ 平面 PAB

又 $\because GC \cap GE = G$, 且 $GC \subset$ 平面 $EGC, GE \subset$ 平面 EGC ,

$\therefore$ 平面 $EGC \parallel$ 平面 PAB .

第 3 步 证明线面平行.

$\because EC \subset$ 平面 EGC ,

$\therefore EC \parallel$ 平面 PAB .

考向 2 典例 3 证明:如图所示,连接 AC 交 BD 于点 O ,连接 OM .

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

所以 O 是 AC 的中点.

又 M 是 PC 的中点,所以 $PA \parallel OM$.

又 $OM \subset$ 平面 $BMD, PA \not\subset$ 平面 BMD ,

所以 $PA \parallel$ 平面 BMD .

因为 $PA \subset$ 平面 $PAHG$,

平面 $PAHG \cap$ 平面 $BMD = GH$,

所以 $PA \parallel GH$.

多维变迁

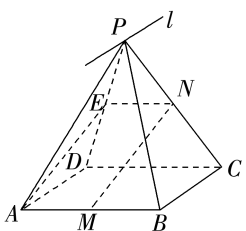
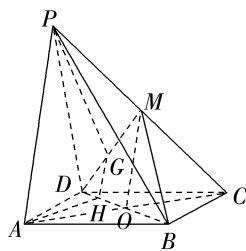
证明:(1)取 PD 的中点 E ,连接 AE, NE , 如图所示.

因为 $NE \parallel DC$, 且 $NE = \frac{1}{2}DC$,

$AM \parallel DC$, 且 $AM = \frac{1}{2}DC$,

所以 $NE \parallel AM$, 且 $NE = AM$,

所以四边形 $MNEA$ 是平行四边形,



所以 $MN \parallel AE$,

又 $AE \subset$ 平面 $PAD, MN \not\subset$ 平面 PAD ,

所以 $MN \parallel$ 平面 PAD .

(2)因为 $BC \parallel AD, BC \not\subset$ 平面 $PAD, AD \subset$ 平面 PAD ,

所以 $BC \parallel$ 平面 PAD , 又因为平面 $PBC \cap$ 平面 $PAD = l$,

所以 $l \parallel BC$.

考点三

典例 4 证明:(1) $\because E, F$ 分别为 B_1C_1, A_1B_1 的中点,

$\therefore EF \parallel A_1C_1$.

$\because A_1C_1 \subset$ 平面 $A_1C_1G, EF \not\subset$ 平面 A_1C_1G ,

$\therefore EF \parallel$ 平面 A_1C_1G .

又 F, G 分别为 A_1B_1, AB 的中点,

$\therefore A_1F = BG$,

又 $A_1F \parallel BG$,

$\therefore$ 四边形 A_1GBF 为平行四边形,

$\therefore BF \parallel A_1G$.

$\because A_1G \subset$ 平面 $A_1C_1G, BF \not\subset$ 平面 A_1C_1G ,

$\therefore BF \parallel$ 平面 A_1C_1G ,

又 $EF \cap BF = F, EF, BF \subset$ 平面 BEF ,

$\therefore$ 平面 $A_1C_1G \parallel$ 平面 BEF .

(2) $\because$ 平面 $ABC \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$, 平面 $A_1C_1G \cap$ 平面 $A_1B_1C_1 = A_1C_1$,

平面 A_1C_1G 与平面 ABC 有公共点 G , 经过点 G 的直线交 BC 于点 H , 则 $A_1C_1 \parallel GH$, 得 $GH \parallel AC$,

$\because G$ 为 AB 的中点,

$\therefore H$ 为 BC 的中点.

多维变迁

证明: $\because$ 圆台可以看做是由平行于圆锥底面的平面去截圆锥而得到,

$\therefore$ 圆台的母线也就是生成这个圆台的圆锥相应母线的一部分.

$\therefore$ 母线 AA_1 与母线 BB_1 的延长线必交于一点,

$\therefore A, A_1, B, B_1$ 四点共面.

$\because$ 圆 $O_1 \parallel$ 圆 O , 且平面 $ABB_1A_1 \cap$ 圆 $O_1 = A_1B_1$, 平面 $ABB_1A_1 \cap$ 圆 $O = AB$.

$\therefore A_1B_1 \parallel AB$.

考点四

典例 5 解:(1)证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, M, N, Q

分别为 BC, PA, PB 的中点, $\therefore NQ \parallel AB \parallel CD, MQ \parallel PC$,

又 $NQ \not\subset$ 平面 $PCD, CD \subset$ 平面 $PCD, MQ \not\subset$ 平面 $PCD, PC \subset$ 平面 PCD ,

$\therefore NQ \parallel$ 平面 $PCD, MQ \parallel$ 平面 PCD ,

又 $\because NQ \cap MQ = Q$, 且 $NQ, MQ \subset$ 平面 MNQ ,

$\therefore$ 平面 $MNQ \parallel$ 平面 PCD .

(2)在线段 PD 上存在点 E , 使得 $MN \parallel$ 平面 ACE , 且 $\frac{PE}{PD} =$

$\frac{1}{2}$. 理由如下:

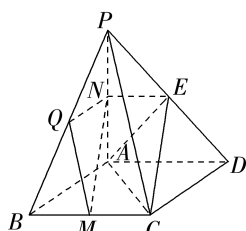
如图,取 PD 的中点 E , 连接 NE ,

CE, AC, AE ,

$\because N, E$ 分别是 AP, PD 的中点,

$\therefore NE \parallel AD, NE = \frac{1}{2}AD$,

易知 $BC \parallel AD, BC = AD$, 又 M 为 BC 的中点,



$$\therefore MC \parallel AD, MC = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore NE \parallel MC, NE = MC,$$

$\therefore$ 四边形 MCEN 是平行四边形,

$$\therefore MN \parallel CE,$$

又 $\because MN \not\subset$ 平面 ACE, $CE \subset$ 平面 ACE,

$$\therefore MN \parallel \text{平面 ACE},$$

故在线段 PD 上存在点 E, 使得 $MN \parallel$ 平面 ACE, 且 $\frac{PE}{PD} = \frac{1}{2}$.

随堂·对点检测

1. C [若 $m \parallel \alpha, m \parallel \beta$, 则 α 与 β 可能平行也可能相交, 所以 A 选项错误;

若 $m \parallel n, m \parallel \alpha, n \parallel \beta$, 则 α 与 β 可能平行也可能相交, 所以 B 选项错误;

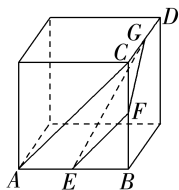
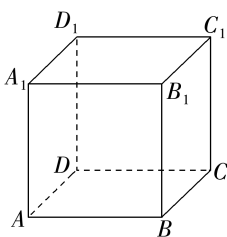
若 $m \parallel n, m \perp \alpha, n \perp \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$, 所以 C 选项正确;

如图, 因为 $AB \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $A_1D_1 \parallel$ 平面 BCC_1B_1 , 且 AB 与 A_1D_1 是异面直线,

但平面 $A_1B_1C_1D_1$ 与平面 BCC_1B_1 不平行, 所以 D 选项错误.

故选 C.]

2. A [如图, 把这三条线段放在正方体内,



可得 $AC \parallel EF, AC \not\subset$ 平面 EFG,

$EF \subset$ 平面 EFG,

故 $AC \parallel$ 平面 EFG.

故选 A.]

3. D [因为平面 $\alpha \parallel$ 平面 ABC, 所以 $AB \parallel$ 平面 α , 又平面 $\alpha \cap$ 平面 $PAB = A'B'$, $AB \subset$ 平面 PAB, 所以 $A'B' \parallel AB$, 同理可得 $AC \parallel A'C', BC \parallel B'C'$,

所以 $\angle ABC = \angle A'B'C', \angle BCA = \angle B'C'A'$,

所以 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

因为 $PA' : AA' = 2 : 3$, 所以 $PA' : PA = 2 : 5$,

所以 $A'B' : AB = 2 : 5$,

$$\text{所以 } \frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}.$$

故选 D.]

4. $\frac{1}{2}$ [连接 BD, 与 AC 交于点 O, 连接 DF 交 CE 于点 G, 连接 OG.

由于直线 $BF \parallel$ 平面 AEC,

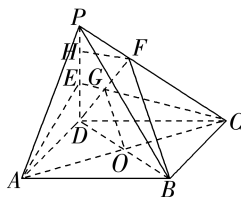
$BF \subset$ 平面 BDF,

平面 BDF $\cap$ 平面 AEC = OG,

则 $BF \parallel OG$,

由于 O 是 BD 的中点, 所以 $\frac{OB}{OD} =$

$$\frac{GF}{GD} = 1,$$



过 F 作 $FH \parallel CE$, 交 PD 于点 H,

$$\text{则 } \frac{ED}{EH} = \frac{GD}{GF} = 1,$$

$$\text{由于 } \frac{PE}{ED} = \frac{3}{2}, \text{ 所以 } \frac{PH}{HE} = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{PF}{FC} = \frac{PH}{HE} = \frac{1}{2}.$$

第 52 课时 空间直线、平面的垂直

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1)任意 (2)相交 $l \perp a \quad l \perp b$

$$a \cap b = O \quad a, b \subset \alpha \quad \text{平行} \quad a \perp a \quad b \perp a$$

(3)平面上的射影 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

知识点 2 (1)两个半平面 垂直于棱

$$(2) 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

知识点 3 (1)直二面角 (2)垂线 交线

链教材·夯基固本

1. C [由题意可知 $AD \perp BD, AD \perp CD, BD \cap CD = D, BD, CD \subset$ 平面 α , 所以 $AD \perp$ 平面 α ,

所以折痕 AD 所在直线与桌面 α 所成的角等于 90° . 故选 C.]

2. (1)外 (2)垂 [(1)易证 $\triangle POA \cong \triangle POB \cong \triangle POC$,

故 $OA = OB = OC$, O 是 $\triangle ABC$ 的外心.

(2)易知 $PA \perp$ 平面 PBC, 从而 $PA \perp BC$.

而 $PO \perp$ 平面 ABC, 所以 $PO \perp BC$,

从而 $BC \perp$ 平面 PAO, 所以 $BC \perp AO$.

同理 $AC \perp BO$,

所以 O 为 $\triangle ABC$ 的垂心.]

3. $\frac{5}{6}$ [如图所示, 取 AB 的中点 O, 连接 VO, CO,

因为 $VA = VB = AB = AC = BC = 2$,

所以 $VO \perp AB, CO \perp AB$,

所以 $\angle VOC$ 是二面角 V-AB-C 的平面角.

$$\text{又 } VO = CO = \sqrt{3}, VC = 1,$$

在 $\triangle VOC$ 中, 由余弦定理的推论, 得

$$\cos \angle VOC = \frac{VO^2 + CO^2 - VC^2}{2VO \cdot CO} = \frac{5}{6}.$$

4. D [$\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma \Rightarrow \alpha$ 与 β 相交或平行, 故 A 不正确;

因为 $\alpha \cap \beta = a, b \perp a, b \subset \beta$,

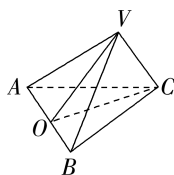
所以 β 可以绕交线 a 任意旋转, 所以不能得到 $\alpha \perp \beta$, 故 B 不正确;

$a \parallel \beta, a \parallel \alpha \Rightarrow \alpha$ 与 β 相交或平行, 故 C 不正确;

$a \perp \beta, a \parallel \alpha$, 过直线 a 作平面与平面 α 交于直线 b , 所以 $a \parallel b$,

又 $a \perp \beta$, 所以 $b \perp \beta$,

又 $b \subset \alpha$, 所以 $\alpha \perp \beta$, 故 D 正确.]



考点深研·题型突破

考点一

典例 1 C [对于 A, 若 $m \parallel \alpha, n \subset \alpha$, 则 $m \parallel n$ 或 m, n 异面, 故 A 错误;

对于 B, 若 $m \perp \alpha, m \perp \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$, 故 B 错误;

对于 C, 若 $m \parallel \alpha, m \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$, 故 C 正确;

对于 D, 若 $m \subset \alpha, \alpha \perp \beta$, 则 $m \parallel \beta$ 或 m 与 β 相交或 $m \subset \beta$, 故 D 错误.

故选 C.]

则“ $n \perp m$ ”不是“ $n \perp \alpha$ ”的充分条件；

若 $m \parallel \alpha, n \perp \alpha$, 则 $n \perp m$, 则“ $n \perp m$ ”是“ $n \perp \alpha$ ”的必要条件，所以“ $n \perp m$ ”是“ $n \perp \alpha$ ”的必要不充分条件。

故选 B.]

2. D [若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, l \perp m$, 则 $l \subset \beta$ 或 $l \parallel \beta$ 或 l 与 β 相交，A 错误；

若 $\alpha \cap \beta = m, l \subset \alpha, l \perp m$, 则 l 与 β 相交但不一定垂直，B 错误；

若 $\alpha \perp \beta, l \subset \alpha$, 则 $l \subset \beta$ 或 $l \parallel \beta$ 或 l 与 β 相交，C 错误；

若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, l \subset \alpha, l \perp m$, 则 $l \perp \beta$, 由面面垂直的性质定理可知 D 正确。

故选 D.]

3. B [因为 AB 是圆柱上底面的一条直径，所以 $AC \perp BC$ ，又 AD 垂直圆柱的底面，所以 $AD \perp BC$ ，

因为 $AC \cap AD = A, AC, AD \subset$ 平面 ACD，

所以 $BC \perp$ 平面 ACD，因为 $BC \subset$ 平面 BCD，

所以平面 BCD $\perp$ 平面 ACD，故选项 B.]

4. BD [选项 A，由题意知， BC_1 和 CC_1 是两条不同的直线，

由正方体的性质知， $CC_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ，

若 $BC_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ，则这与过一点有且只有一条直线与已知平面垂直相矛盾，故选项 A 错误；

选项 B，由正方体的性质知， $AB \parallel C_1D_1, AB = C_1D_1$ ，

所以四边形 ABC_1D_1 是平行四边形，

所以 $BC_1 \parallel AD_1$ ，

而 $AD_1 \subset$ 平面 $ACD_1, BC_1 \not\subset$ 平面 ACD_1 ，

所以 $BC_1 \parallel$ 平面 ACD_1 ，故选项 B 正确；

选项 C，连接 BD，因为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ ，

所以 $A_1C_1 \perp B_1D_1$ ，

由正方体的性质知， $BB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ，

因为 $A_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ，

所以 $BB_1 \perp A_1C_1$ ，

又 $B_1D_1 \cap BB_1 = B_1$ ，

所以 $A_1C_1 \perp$ 平面 BDD_1B_1 ，

而 $A_1C_1 \subset$ 平面 A_1C_1B ，所以平面 $A_1C_1B \perp$ 平面 BDD_1B_1 ，

若平面 $A_1C_1B \perp$ 平面 B_1D_1C ，则这与过同一条直线有且只有一个平面与已知平面垂直相矛盾，故选项 C 错误；

选项 D，因为正方形 BCC_1B_1 ，所以 $BC_1 \perp B_1C$ ，

由正方体的性质知， $CD \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，

因为 $BC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 ，所以 $CD \perp BC_1$ ，

又 $B_1C \cap CD = C, B_1C, CD \subset$ 平面 B_1CD ，所以 $BC_1 \perp$ 平面 B_1CD ，

而 $BC_1 \subset$ 平面 A_1C_1B ，所以平面 $A_1C_1B \perp$ 平面 B_1CD ，故选项 D 正确。

故选 BD.]

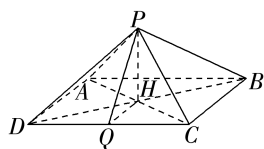
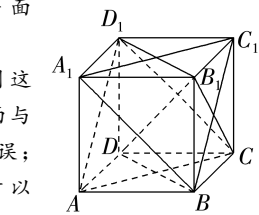
5. $\frac{4}{3}$ [连接 AC, BD 相交于点 H，则 H 为正方形 ABCD 的中心，

故 $PH \perp$ 底面 ABCD，

取 CD 的中点 Q，连接 HQ, PQ，

则 $HQ \perp CD, PQ \perp CD, HQ =$

$\frac{1}{2}AD = 1$ ，



故 $\angle PQH$ 为二面角 $P-CD-A$ 的平面角，

所以 $\angle PQH = \frac{\pi}{4}$ ，故 $PH = HQ = 1$ ，

所以该四棱锥的体积为 $\frac{1}{3} \times AB^2 \cdot PH = \frac{4}{3}$.]

第 53 课时 空间向量的运算及其应用

理法先行 · 题练固本

梳必备 · 破题有方

知识点 1 大小 方向 相同 相等 相反 相等 平行 重合 平行于同一个平面的向量

知识点 2 (1) $a = \lambda b$ (2) 存在唯一的有序实数对 (x, y) ，使 $p = xa + yb$

知识点 3 (1) $|a| |b| \cos \langle a, b \rangle$

链教材 · 夯基固本

1. $\frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB} + \frac{1}{4}\vec{OC}$ [$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} = \vec{OA} + \frac{3}{4}\vec{AN}$

$= \vec{OA} + \frac{3}{4}(\vec{ON} - \vec{OA})$

$= \vec{OA} + \frac{3}{4}\vec{ON} - \frac{3}{4}\vec{OA}$

$= \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{3}{4}(\frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC})$

$= \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB} + \frac{1}{4}\vec{OC}$.]

2. $\frac{10}{3}$ [因为 $a \perp b$ ，

所以 $a \cdot b = -8 - 2 + 3x = 0$ ，解得 $x = \frac{10}{3}$.]

3. 12 [因为 $|\vec{PA} + \vec{AB} + \vec{BC}|^2 = \vec{PA}^2 + \vec{AB}^2 + \vec{BC}^2 + 2\vec{PA} \cdot \vec{AB} + 2\vec{PA} \cdot \vec{BC} + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC}$

$= |\vec{PA}|^2 + |\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2 + 2|\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| \cos \langle \vec{AB}, \vec{BC} \rangle =$

$6^2 + 6^2 + 6^2 + 2 \times 6 \times 6 \times \frac{1}{2} = 144$ ，

所以 $|\vec{PA} + \vec{AB} + \vec{BC}| = 12$.]

4. 10 $\sqrt{85}$ [$\vec{AA'} \cdot \vec{AB} = |\vec{AA'}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos 60^\circ$

$= 5 \times 4 \times \frac{1}{2} = 10$ 。

因为 $\vec{AC'} = \vec{AC} + \vec{CC'} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'}$ ，

所以 $|\vec{AC'}|^2 = (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})^2 = |\vec{AB}|^2 + |\vec{AD}|^2 + |\vec{AA'}|^2 + 2(\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AB} \cdot \vec{AA'} + \vec{AD} \cdot \vec{AA'})$

$= 16 + 9 + 25 + 2 \times (0 + 4 \times 5 \times \frac{1}{2} + 3 \times 5 \times \frac{1}{2}) = 85$ ，

所以 $|\vec{AC'}| = \sqrt{85}$ ，

即 AC' 的长为 $\sqrt{85}$.]

5. C [$\because n_1 \neq \lambda n_2$ ，且 $n_1 \cdot n_2 = -23 \neq 0$ ， $\therefore \alpha, \beta$ 相交但不垂直。]

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 (1) ABD (2) A [(1) 对于选项 A，对于空间四个点

$P, A, B, C, \vec{PC} = \frac{1}{4}\vec{PA} + \frac{3}{4}\vec{PB}$ ，

由共线向量定理可知 A, B, C 三点共线，故选项 A 正确；

对于选项 B, $\vec{b} + \vec{c}$ 与 $\vec{b} - \vec{c}$ 不共线, 且 $\vec{a}$ 不能用 $\vec{b} + \vec{c}$ 和 $\vec{b} - \vec{c}$ 表示, 即 $\vec{b} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{c}, \vec{a}$ 不共面, 故选项 B 正确;

对于选项 C, 由 A, B, C 三点不共线, 对空间任意一点 O, 若 $\vec{OP} = \frac{3}{4}\vec{OA} + \frac{1}{8}\vec{OB} + \frac{1}{8}\vec{OC}$,

因为 $\frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$, 由空间向量基本定理的推论可得 P, A, B, C 四点共面, 故选项 C 错误;

对于选项 D, 若 P, A, B, C 为空间四点, 且有 $\vec{PA} = \lambda\vec{PB} + \mu\vec{PC}$ ($\vec{PB}, \vec{PC}$ 不共线),

当 $\lambda + \mu = 1$ 时, 即 $\mu = 1 - \lambda$, 可得 $\vec{PA} - \vec{PC} = \lambda(\vec{PB} - \vec{PC})$, 即 $\vec{CA} = \lambda\vec{CB}$,

由共线向量定理可得 A, B, C 三点共线, 反之也成立, 即 $\lambda + \mu = 1$ 是 A, B, C 三点共线的充要条件, 故选项 D 正确.

故选 ABD.

(2) 因为 $EC = 2PE$, 所以 $\vec{PE} = \frac{1}{3}\vec{PC}$,

所以 $\vec{DE} = \vec{AE} - \vec{AD} = \vec{AP} + \vec{PE} - \vec{AD} = \vec{AP} + \frac{1}{3}\vec{PC} - \vec{AD}$

$= \vec{AP} + \frac{1}{3}(\vec{AC} - \vec{AP}) - \vec{AD}$

$= \frac{2}{3}\vec{AP} + \frac{1}{3}\vec{AC} - \vec{AD}$

$= \frac{2}{3}\vec{AP} + \frac{1}{3}\vec{AC} - (\vec{AC} + \vec{CD})$

$= \frac{2}{3}\vec{AP} - \frac{2}{3}\vec{AC} - \vec{CD}$

$= \frac{2}{3}\vec{AP} - \frac{2}{3}\vec{AC} + \vec{AB}$,

又 $\vec{DE} = x\vec{AB} + y\vec{AC} + z\vec{AP}$,

所以 $\begin{cases} x=1, \\ y=-\frac{2}{3}, \\ z=\frac{2}{3}, \end{cases}$ 则 $x+y+z=1$. 故选 A.]

多维变迁

1. A [由点 A(2, 3, 5), B(1, 1, 2), C(0, a, b),

得 $\vec{AB} = (-1, -2, -3)$, $\vec{BC} = (-1, a-1, b-2)$,

由于 A, B, C 三点共线, 所以 $\vec{AB} \parallel \vec{BC}$,

所以 $a-1 = -2, b-2 = -3$, 解得 $a = -1, b = -1$, 故 $a+b = -2$.

故选 A.]

2. D [因为 $\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2 - \vec{e}_3, 3\vec{e}_1 + \vec{e}_3$ 共面,

所以存在有序数对 (x, y) 使得 $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = x(\vec{e}_2 - \vec{e}_3) + y(3\vec{e}_1 + \vec{e}_3)$, $\vec{e}_3 = 3y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2 + (yt-x)\vec{e}_3$,

所以 $\begin{cases} 1=3y, \\ 1=x, \\ yt-x=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=\frac{1}{3}, \\ t=3. \end{cases}$ 故选 D.]

考点二

典例 2 解: 设 $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AC} = \vec{b}, \vec{AD} = \vec{c}$.

(1) 由题意得, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle = 60^\circ$.

$\vec{EF} = \frac{1}{2}\vec{BD} = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}, \vec{BA} = -\vec{a}$,

所以 $\vec{EF} \cdot \vec{BA} = \left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) \cdot (-\vec{a})$

$= -\frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}^2 = -\frac{1}{2} \times \left(1 \times 1 \times \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$.

(2) 证明: $\vec{EG} = \vec{AG} - \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD} - \vec{AB}) =$

$\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})$,

所以 $\vec{EG} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a}^2) = \frac{1}{2} \times$

$\left(1 \times 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 \times \frac{1}{2} - 1\right) = 0$. 故 $\vec{EG} \perp \vec{AB}$.

母题探究

1. 解: 由本例(2)知, $\vec{EG} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$,

$|\vec{EG}|^2 = \frac{1}{4}\vec{a}^2 + \frac{1}{4}\vec{b}^2 + \frac{1}{4}\vec{c}^2 - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{c} \cdot$

$\vec{a} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \left(1 \times 1 \times \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times \left(1 \times 1 \times \frac{1}{2}\right) -$

$\frac{1}{2} \times \left(1 \times 1 \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, 即 $|\vec{EG}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 解: $\vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}, \vec{CE} = \vec{CA} + \vec{AE} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$, 所以 $\vec{AG} \cdot$

$\vec{CE} = \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \cdot \left(-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = -\frac{1}{2}\vec{b}^2 + \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} \cdot$

$\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{2}$, 又 $|\vec{AG}| = \frac{\sqrt{3}}{2}, |\vec{CE}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\cos \langle \vec{AG}, \vec{CE} \rangle = \frac{\vec{AG} \cdot \vec{CE}}{|\vec{AG}| |\vec{CE}|} = -\frac{2}{3}$.

多维变迁

ABD [设 $\vec{b} = (x, y, z)$, 因为 $\vec{a} = (1, 2, 3)$, 所以 $\vec{a} + 2\vec{b} =$

$(-3, 0, 5) = (1, 2, 3) + 2(x, y, z) = (1+2x, 2+2y, 3+2z)$,

即 $1+2x = -3, 2+2y = 0, 3+2z = 5$, 解得 $\vec{b} = (-2, -1, 1)$,

则 $|\vec{b}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$, A 正确;

因为 $\vec{a} \parallel \vec{c}$, 所以 $\vec{a} = \lambda\vec{c}$, 即 $\begin{cases} 1=2\lambda, \\ 2=4\lambda, \\ 3=m\lambda, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \lambda=\frac{1}{2}, \\ m=6. \end{cases}$ B 正确;

因为 $2\vec{b} + \vec{c} = (-2, 2, 8), \vec{a} \cdot (2\vec{b} + \vec{c}) = -2 \times 1 + 2 \times 2 + 8 \times 3 = 26 \neq 0$, 所以 C 错误;

$\cos \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{-2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{56}} = -\frac{\sqrt{21}}{42}$, D 正确.

故选 ABD.]

考点三

典例 3 BD [法一: 对于 A, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,

$AA_1 \perp$ 平面 ABC,

又 $AD \subset$ 平面 ABC, 则 $AA_1 \perp AD$,

则 $\vec{A_1A} \cdot \vec{AD} = 0$,

因为 $\triangle ABC$ 是正三角形, D 为 BC

的中点, 所以 $AD \perp BC$, 所以 $\vec{DC} \cdot$

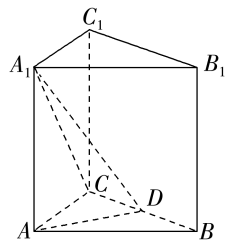
$\vec{AD} = 0$.

又 $\vec{A_1C} = \vec{A_1A} + \vec{AD} + \vec{DC}$,

所以 $\vec{A_1C} \cdot \vec{AD} = (\vec{A_1A} + \vec{AD} + \vec{DC}) \cdot \vec{AD} = \vec{A_1A} \cdot \vec{AD} +$

$\vec{AD}^2 + \vec{DC} \cdot \vec{AD} = \vec{AD}^2 \neq 0$,

则 $AD \perp A_1C$ 不成立, 故 A 错误;



对于 B, 因为在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 ABC ,

又 $BC \subset$ 平面 ABC , 则 $AA_1 \perp BC$,

因为 $\triangle ABC$ 是正三角形, D 为 BC 中点, 则 $AD \perp BC$,

又 $AA_1 \cap AD = A$, $AA_1, AD \subset$ 平面 AA_1D , $BC \not\subset$ 平面 AA_1D ,

所以 $BC \perp$ 平面 AA_1D , 又 $BC \parallel B_1C_1$, 所以 $B_1C_1 \perp$ 平面 AA_1D , 故 B 正确;

对于 C, 因为在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $A_1B_1 \parallel AB$,

假设 $AD \parallel A_1B_1$, 则 $AD \parallel AB$, 这与 $AD \cap AB = A$ 矛盾,

所以 $AD \parallel A_1B_1$ 不成立, 故 C 错误;

对于 D, 因为在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CC_1 \parallel AA_1$,

又 $AA_1 \subset$ 平面 AA_1D , $CC_1 \not\subset$ 平面 AA_1D , 所以 $CC_1 \parallel$ 平面 AA_1D , 故 D 正确.

故选 BD.

法二: 如图, 建立空间直角坐标系, 设该正三棱柱的底边为 2, 高为 $h, h > 0$,

则 $D(0, 0, 0), A(\sqrt{3}, 0, 0), A_1(\sqrt{3},$

$0, h), C(0, -1, 0), C_1(0, -1, h),$

$B(0, 1, 0), B_1(0, 1, h),$

对于 A, $\overrightarrow{AD} = (-\sqrt{3}, 0, 0), \overrightarrow{A_1C} =$

$(-\sqrt{3}, -1, -h),$

则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A_1C} = (-\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) +$

$0 = 3 \neq 0,$

则 $AD \perp A_1C$ 不成立, 故 A 错误;

对于 B, $D, \overrightarrow{B_1C_1} = (0, -2, 0), \overrightarrow{CC_1} = (0, 0, h), \overrightarrow{AA_1} = (0, 0,$

$h), \overrightarrow{AD} = (-\sqrt{3}, 0, 0),$

设平面 AA_1D 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z),$

则 $\begin{cases} \overrightarrow{AA_1} \cdot \mathbf{n} = hz = 0, \\ \overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n} = -\sqrt{3}x = 0, \end{cases}$ 得 $x = z = 0$, 令 $y = 1$, 则 $\mathbf{n} = (0, 1,$

$0)$ 为平面 AA_1D 的一个法向量,

所以 $\overrightarrow{B_1C_1} = (0, -2, 0) = -2\mathbf{n}, \overrightarrow{CC_1} \cdot \mathbf{n} = 0,$

则 $B_1C_1 \perp$ 平面 $AA_1D, CC_1 \parallel$ 平面 AA_1D , 故 BD 正确;

对于 C, $\overrightarrow{AD} = (-\sqrt{3}, 0, 0), \overrightarrow{A_1B_1} = (-\sqrt{3}, 1, 0),$

则 $\frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} \neq \frac{0}{1}$, 显然 $AD \parallel A_1B_1$ 不成立, 故 C 错误. 故选 BD.]

随堂·对点检测

1. BD [$\because \mathbf{a} = (-2, 1, 2), \therefore |\mathbf{a}| = \sqrt{4+1+4} = 3$, A 错误;

若 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2 - \frac{1}{2} + 2m = 0$, 解得 $m = \frac{5}{4}$, B 正确;

若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则 $\frac{-2}{1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{m}$, 解得 $m = -1$, C 错误;

若 $m = 1$, 则 $\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{-2 - \frac{1}{2} + 2}{3 \times \frac{3}{2}} = -\frac{1}{9}$, D

正确.

故选 BD.]

2. A [由题意得, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$.

若 G 与 M, N 共线, 则存在实数 λ , 使得 $\overrightarrow{OG} = \lambda \overrightarrow{ON} + (1-\lambda) \cdot$

$\overrightarrow{OM} = \frac{\lambda}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{2(1-\lambda)}{3}\overrightarrow{OA}$.

又 $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{x}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{x}{4}\overrightarrow{OC},$

所以 $\begin{cases} \frac{2(1-\lambda)}{3} = \frac{1}{3}, \\ \frac{\lambda}{2} = \frac{x}{4}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \lambda = \frac{1}{2}, \\ x = 1. \end{cases}$ 故选 A.]

3. 证明: 以 B 为坐标原点, BA, BC, BB_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $B(0, 0, 0),$

$D(0, 2, 2), B_1(0, 0, 4), E(0, 0, 3), F(0, 1, 4).$

设 $BA = a$, 则 $A(a, 0, 0), G(\frac{a}{2}, 1,$

$4), A_1(a, 0, 4).$

(1) 因为 $\overrightarrow{BA} = (a, 0, 0), \overrightarrow{BD} = (0,$

$2, 2), \overrightarrow{B_1D} = (0, 2, -2)$, 所以 $\overrightarrow{B_1D}$

$\cdot \overrightarrow{BA} = 0, \overrightarrow{B_1D} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. 所以

$\overrightarrow{B_1D} \perp \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B_1D} \perp \overrightarrow{BD}$, 即 $B_1D \perp$

$BA, B_1D \perp BD$. 又 $BA \cap BD = B,$

$BA, BD \subset$ 平面 $ABD, B_1D \not\subset$ 平面

ABD , 所以 $B_1D \perp$ 平面 ABD .

因为 $B_1D \subset$ 平面 A_1B_1D , 所以平面 $A_1B_1D \perp$ 平面 ABD .

(2) 因为 $\overrightarrow{EG} = (\frac{a}{2}, 1, 1), \overrightarrow{EF} = (0, 1, 1), \overrightarrow{B_1D} = (0, 2, -2),$

所以 $\overrightarrow{B_1D} \cdot \overrightarrow{EG} = 0, \overrightarrow{B_1D} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$.

所以 $B_1D \perp EG, B_1D \perp EF$.

因为 $EG \cap EF = E, EG, EF \subset$ 平面 $EGF, B_1D \not\subset$ 平面 EGF ,

所以 $B_1D \perp$ 平面 EGF .

由(1)知, $B_1D \perp$ 平面 ABD , 所以平面 $EGF \parallel$ 平面 ABD .

第 54 课时 向量法求空间角(一)

理法先行·题练固本

链教材·夯基固本

1. A [如图, 建立空间直角坐标系. 设

$BC = CA = CC_1 = 1$, 则 $A(1, 0, 1),$

$B(0, 1, 1), D_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), F_1(\frac{1}{2}, 0,$

$0)$, 所以 $\overrightarrow{BD_1} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1),$

$\overrightarrow{AF_1} = (-\frac{1}{2}, 0, -1),$

所以 $|\cos \langle \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{AF_1} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{AF_1}|}{|\overrightarrow{BD_1}| |\overrightarrow{AF_1}|}$

$= \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} \times \sqrt{\frac{1}{4} + 1}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$. 故选 A.]

2. A [设直线 l 与平面 α 所成的角为 θ ,

则 $\sin \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{1}{2}$, 所以直线 l 与平面 α 所成的角为

30° . 故选 A.]

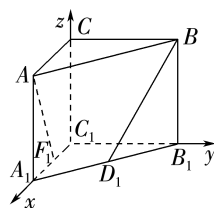
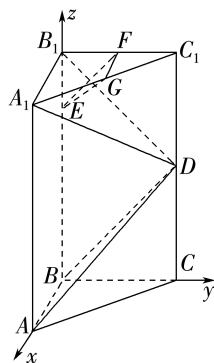
考点深研·题型突破

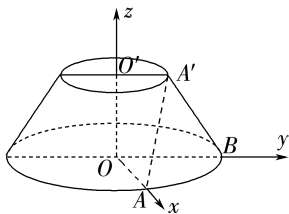
考点一

典例 1 (1)A (2)D [(1)设圆台经过点 A' 的母线为 $A'B$,

$\because O'A' \perp OA, \therefore OA \perp OB$, 以 O 为原点, OA, OB, OO' 所在直

线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示.





则 $O(0,0,0), A(2,0,0), A'(0,1,1), O'(0,0,1)$, 可得 $\overrightarrow{AA'} = (-2, 1, 1), |\overrightarrow{AA'}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$,
 $\therefore \overrightarrow{OO'} = (0, 0, 1)$,

$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{OO'} \rangle = \frac{\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{OO'}}{|\overrightarrow{AA'}| |\overrightarrow{OO'}|} = \frac{0+0+1}{\sqrt{6} \times 1} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 即直线

AA' 与 OO' 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

故选 A.

(2) 法一: 连接 BD, AF 交于点 O , 连接 OC ,

易知 OC, OD, OA 两两垂直,

如图, 建立空间直角坐标系

$Oxyz$,

则 $B(0, -\sqrt{2}, 0), C(\sqrt{2}, 0, 0)$,

$A(0, 0, \sqrt{2}), D(0, \sqrt{2}, 0), F(0,$

$0, -\sqrt{2}),$

所以 $N(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), M(0, \frac{\sqrt{2}}{2},$

$\frac{\sqrt{2}}{2})$,

$\overrightarrow{BN} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), \overrightarrow{FM} = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}),$

所以 $|\cos \langle \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{FM} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{FM}|}{|\overrightarrow{BN}| |\overrightarrow{FM}|} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{6}$,

即直线 BN 和 FM 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{6}$.

法二: 由题意, 可得 $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$,

连接 BD (图略), 由正八面体 $ABCDEF$ 的棱长都是 2, 且各个面都是等边三角形, 易知四边形 $BCDE$ 为正方形,

在 $\triangle ABD$ 中, 由 $AB = AD = 2, BD = 2\sqrt{2}$, 可得 $AB^2 + AD^2 = BD^2$, 所以 $AB \perp AD$,

所以 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{BN} = (-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) =$

$-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}^2 = -\frac{1}{4} \times$

$2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2^2 = -\frac{1}{2} - 1 + 4 = \frac{5}{2},$

$|\overrightarrow{BN}| = \sqrt{(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{4} \times 2^2 - 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2^2} = \sqrt{3},$

$|\overrightarrow{FM}| = \sqrt{(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{\frac{1}{4} \times 2^2 + 0 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$\text{所以 } |\cos \langle \overrightarrow{FM}, \overrightarrow{BN} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{BN}|}{|\overrightarrow{FM}| |\overrightarrow{BN}|} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{5} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{6},$$

即直线 BN 和 FM 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{6}$.

多维变通

1. B [如图, 以 B 为原点, BA, BC, BB_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系,

则 $B(0, 0, 0), A(2, 0, 0), C(0, 2\sqrt{2}, 0)$.

设 $A_1(2, 0, z), z > 0$,

则 $\overrightarrow{BA} = (2, 0, 0), \overrightarrow{CA_1} = (2, -2\sqrt{2}, z)$,

所以 $|\cos \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA_1} \rangle| = \frac{4}{2\sqrt{12+z^2}}$

$$= \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

解得 $z = 2$, 故 $AA_1 = 2$. 故选 B.]

2. A [取 BC 的中点 F , 连接 AF , 则由题意可得 $AF \perp BC$, $AF \perp AD$, 且 $BF = 1, AF = \sqrt{3}$,

以 A 为坐标原点, AF, AD, AA_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0, 0, 0), B(\sqrt{3}, -1, 0)$,

$B_1(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1), C(\sqrt{3}, 1,$

$0), \therefore \overrightarrow{BB_1} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1),$

$\overrightarrow{AC} = (\sqrt{3}, 1, 0),$

$\therefore |\cos \langle \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{AC} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BB_1}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{4},$

$\therefore$ 直线 AC 与直线 BB_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

故选 A.]

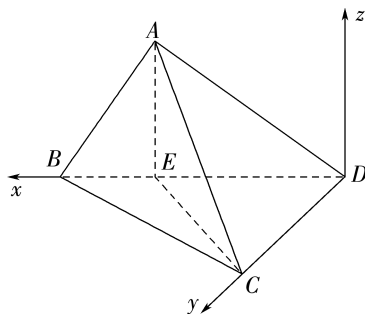
考点二

典例 2 解: (1) 证明: 由 $AE \perp CE, AE \perp DE, CE \cap DE = E$, $DE, CE \subset$ 平面 DCE , 可得 $AE \perp$ 平面 DCE , 又 $CD \subset$ 平面 DCE , 所以 $AE \perp CD$,

又 $AD \perp CD, AD \cap AE = A$, 且 $AD, AE \subset$ 平面 ABD , 故有 $CD \perp$ 平面 ABD ,

因为 $AB \subset$ 平面 ABD , 所以 $CD \perp AB$.

(2) 由 (1) 知 BD, CD, AE 两两垂直. 以 D 为坐标原点, BD, CD 所在直线分别为 x 轴、 y 轴, 过点 D 且平行于 AE 的直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图.



可得 $B(3,0,0), C(0,2\sqrt{3},0), D(0,0,0), A(2,0,\sqrt{2})$, 则 $\overrightarrow{AD}=(-2,0,-\sqrt{2}), \overrightarrow{AB}=(1,0,-\sqrt{2}), \overrightarrow{BC}=(-3,2\sqrt{3},0)$. 设平面 ABC 的法向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n} = x - \sqrt{2}z = 0, \\ \overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{n} = -3x + 2\sqrt{3}y = 0, \end{cases}$$

得 $x=\sqrt{2}z, 2y=\sqrt{3}x$, 取 $x=2$, 所以 $\mathbf{n}=(2,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 为平面 ABC 的一个法向量,

设直线 AD 与平面 ABC 所成角为 θ ,

$$\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AD}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{AD}| |\mathbf{n}|} = \frac{6}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 因此直线}$$

AD 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

多维变迁

(1) 证明: 过 A_1 作 $A_1D \perp CC_1$, 垂足为 D ,

$\because A_1C \perp$ 平面 $ABC, BC \subset$ 平面 $ABC, \therefore A_1C \perp BC$,

又 $\angle ACB = 90^\circ, \therefore AC \perp BC$,

$\because A_1C, AC \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 且 $A_1C \cap AC = C, \therefore BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,

$\therefore A_1D \subset$ 平面 $ACC_1A_1, \therefore BC \perp A_1D$,

又 $CC_1, BC \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 且 $CC_1 \cap BC = C$,

$\therefore A_1D \perp$ 平面 $BCC_1B_1, \therefore A_1D = 1$.

由已知条件易证 $\triangle CA_1C_1$ 是直角三角形, 又 $CC_1 = AA_1 = 2, A_1D = 1$,

$\therefore D$ 为 CC_1 的中点, 又 $A_1D \perp CC_1$,

$\therefore A_1C = A_1C_1$,

又在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC = A_1C_1$,

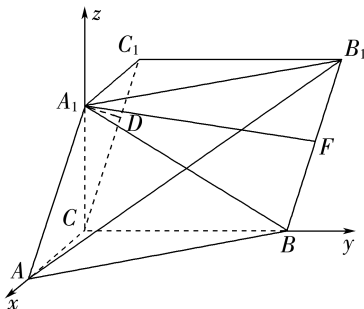
$\therefore A_1C = AC$.

(2) 解: 连接 A_1B , 由 (1) 易证 $A_1B = A_1B_1$, 故取 BB_1 的中点 F , 连接 A_1F ,

$\because AA_1$ 与 BB_1 的距离为 2, $\therefore A_1F = 2$,

又 $A_1D = 1$ 且 $A_1C = AC$,

$\therefore A_1C = A_1C_1 = AC = \sqrt{2}, AB = A_1B_1 = \sqrt{5}, BC = \sqrt{3}$.



建立空间直角坐标系 $Cxyz$ 如图所示,

则 $C(0,0,0), A(\sqrt{2},0,0), B(0,\sqrt{3},0), B_1(-\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2}), C_1(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$,

$\therefore \overrightarrow{CB}=(0,\sqrt{3},0), \overrightarrow{CC_1}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2}), \overrightarrow{AB_1}=(-2\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2})$,

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CC_1} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} \sqrt{3}y = 0, \\ -\sqrt{2}x + \sqrt{2}z = 0, \end{cases} \quad \text{取 } x = 1, \text{ 则 } y = 0,$$

$z = 1$,

$\therefore$ 平面 BCC_1B_1 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(1,0,1)$.

设 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角为 θ ,

$$\sin \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AB_1} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB_1}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{AB_1}|} = \frac{\sqrt{13}}{13}.$$

$\therefore AB_1$ 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

随堂·对点检测

1. C [因为 $\mathbf{s}_1=(1,0,1), \mathbf{s}_2=(-1,2,-2)$, 所以 $\cos \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle =$

$$\frac{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1| |\mathbf{s}_2|} = \frac{-1-2}{\sqrt{2} \times 3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ 又两直线所成角的取值范围为}$$

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ 所以 } l_1 \text{ 和 } l_2 \text{ 所成角的余弦值为 } \frac{\sqrt{2}}{2}.]$$

2. C [因为 $P(0,0,1), A(0,\sqrt{3},0), B(1,\sqrt{3},0), C(2,0,0)$,

故 $\overrightarrow{PA}=(0,\sqrt{3},-1), \overrightarrow{PB}=(1,\sqrt{3},-1), \overrightarrow{PC}=(2,0,-1)$,

设平面 PAB 的法向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \perp \overrightarrow{PA}, \\ \mathbf{n} \perp \overrightarrow{PB}, \end{cases} \quad \text{则} \quad \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PA} = \sqrt{3}y - z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PB} = x + \sqrt{3}y - z = 0, \end{cases}$$

令 $y=1$, 则 $x=0, z=\sqrt{3}$,

故 $\mathbf{n}=(0,1,\sqrt{3})$ 为平面 PAB 的一个法向量,

设 PC 与平面 PAB 所成的角为 θ ,

$$\sin \theta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PC}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{PC}|} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{10}. \text{ 故选 C.}]$$

3. B [如图, 以 D 为坐标原点,

DA, DC, DD_1 所在直线分别

为 x, y, z 轴建立空间直角坐

标系,

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$

中, $AB = BC = 3, BB_1 = 2$,

$$\overrightarrow{DM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{A_1N} = \frac{1}{3} \overrightarrow{A_1C_1},$$

则 $A_1(3,0,2), M(2,2,0), B(3,3,0), N(2,1,2)$, 所以

$$\overrightarrow{A_1M}=(-1,2,-2), \overrightarrow{BN}=(-1,-2,2),$$

设异面直线 A_1M 和 BN 所成的角为 θ ,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\overrightarrow{A_1M} \cdot \overrightarrow{BN}|}{|\overrightarrow{A_1M}| |\overrightarrow{BN}|} \\ &= \frac{|(-1,2,-2) \cdot (-1,-2,2)|}{\sqrt{1+4+4} \times \sqrt{1+4+4}} = \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

故选 B.]

4. $\frac{1}{2}$ [建立空间直角坐标系如图, 设 $AB=2$,

则 $M(2,2,1), N(1,2,2), B(2,2,$

$0), A'(2,0,2), C(0,2,0)$,

则 $\overrightarrow{MN}=(-1,0,1), \overrightarrow{BA'}=(0,-2,$

$2), \overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$.

设平面 $A'BCD'$ 的法向量为 $\mathbf{n}=(x,$

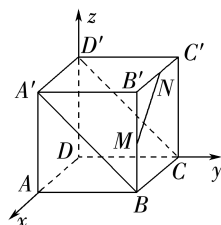
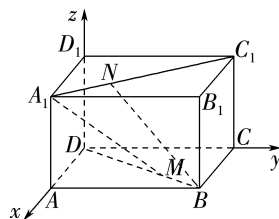
$y,z)$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA'} \cdot \mathbf{n} = -2y + 2z = 0, \\ \overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{n} = -2x = 0, \end{cases}$$

令 $z=1$, 则 $y=1, x=0$, 所以平面 $A'BCD'$ 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(0,1,1)$,

所以 MN 与平面 $A'BCD'$ 所成角的正弦值为 $|\cos \langle \overrightarrow{MN},$

$$\mathbf{n} \rangle| = \left| \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2}.]$$



梳必备·破题有方

知识点 夹角 $\frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|}$

链教材·夯基固本

$\frac{\pi}{3}$ [以 C 为原点,建立如图所示的空间直角坐标系 $Cxyz$.

易得平面 ABC 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (0, 0, 1)$.

设平面 BCP 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$,

$\overrightarrow{CB} = (0, 2, 0), \overrightarrow{CP} = (2, 0, 2\sqrt{3})$,

所以 $\begin{cases} \overrightarrow{CB} \cdot \mathbf{n}_2 = 2y = 0, \\ \overrightarrow{CP} \cdot \mathbf{n}_2 = 2x + 2\sqrt{3}z = 0, \end{cases}$

取 $x = \sqrt{3}$, 则 $z = -1, y = 0$,

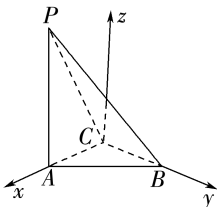
故 $\mathbf{n}_2 = (\sqrt{3}, 0, -1)$,

所以 $\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{-1}{1 \times 2} = -\frac{1}{2}$,

所以 $\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{2\pi}{3}$.

由图可知所求二面角为锐二面角,

所以二面角 A-BC-P 的平面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$.]



考点深研·题型突破

考点一

典例 1 解:(1)证明:由平面 ABEF $\perp$ 平面 ABCD,平面 ABEF $\cap$ 平面 ABCD = AB, $AF \perp AB$, 得 $AF \perp$ 平面 ABCD, 以 A 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系 $Axyz$.

设 $AB = a, BC = b, BE = c$,

则 $B(a, 0, 0), C(a, b, 0), E(a, 0, c), D(0, 2b, 0), F(0, 0, 2c), \overrightarrow{EC} =$

$(0, b, -c), \overrightarrow{FD} = (0, 2b, -2c)$,

故 $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FD}, \therefore EC \parallel FD$,

$\therefore C, D, E, F$ 四点共面.

(2) $\because AB = 2, BC = BE = 1$, 故 $C(2, 1, 0), E(2, 0, 1), D(0, 2, 0)$,

设平面 ADE 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

由 $\overrightarrow{AE} = (2, 0, 1), \overrightarrow{AD} = (0, 2, 0)$,

得 $\begin{cases} 2x_1 + z_1 = 0, \\ 2y_1 = 0, \end{cases}$ 取 $x_1 = 1$, 可得 $z_1 = -2$,

$\therefore \mathbf{m} = (1, 0, -2)$ 为平面 ADE 的一个法向量.

设平面 CDE 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

由 $\overrightarrow{CD} = (-2, 1, 0), \overrightarrow{CE} = (0, -1, 1)$,

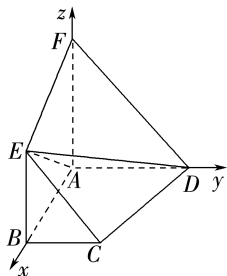
得 $\begin{cases} -2x_2 + y_2 = 0, \\ -y_2 + z_2 = 0, \end{cases}$ 取 $x_2 = 1$, 可得 $y_2 = 2, z_2 = 2$,

$\therefore \mathbf{n} = (1, 2, 2)$ 为平面 CDE 的一个法向量.

设平面 ADE 与平面 CDE 的夹角为 θ ,

$\therefore \cos \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{|1 - 4|}{\sqrt{5} \times 3} = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

即平面 ADE 与平面 CDE 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.



多维变迁

(1)证明:在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,

$\because A_1B_1 = 1, AB = AC = 2, \therefore A_1C_1 = 1, BC = 2B_1C_1$.

$\because D$ 为 BC 的中点, $\therefore B_1C_1 = BD, B_1C_1 \parallel BD$,

$\therefore$ 四边形 BDC_1B_1 为平行四边形, 故 $B_1B \parallel C_1D$.

$\because AC \perp C_1D, \therefore AC \perp B_1B$.

$\because AA_1 \perp$ 底面 $ABC, AC \subset$ 底面 ABC ,

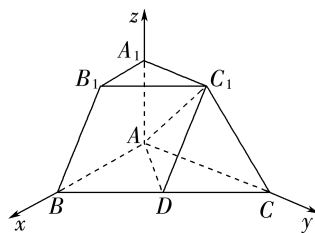
$\therefore AA_1 \perp AC$.

$\because AA_1, BB_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1, AA_1, BB_1 为相交直线,

$\therefore AC \perp$ 平面 ABB_1A_1 ,

$\because AB \subset$ 平面 $ABB_1A_1, \therefore AC \perp AB$.

(2)解:以 A 为原点,以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(0, 0, 0), B(2, 0, 0), C(0, 2, 0), B_1(1, 0, \sqrt{2}), C_1(0, 1, \sqrt{2}), D(1, 1, 0)$.

$\therefore \overrightarrow{BC} = (-2, 2, 0), \overrightarrow{BB_1} = (-1, 0, \sqrt{2}), \overrightarrow{AC_1} = (0, 1, \sqrt{2}), \overrightarrow{AD} = (1, 1, 0)$.

设 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$ 是平面 BCC_1B_1 的法向量,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \overrightarrow{BB_1} \cdot \mathbf{m} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -2x_1 + 2y_1 = 0, \\ -x_1 + \sqrt{2}z_1 = 0, \end{cases}$

令 $x_1 = \sqrt{2}$, 则 $y_1 = \sqrt{2}, z_1 = 1$, 故 $\mathbf{m} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$.

设 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$ 是平面 ADC_1 的法向量, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{AC_1} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} x_2 + y_2 = 0, \\ y_2 + \sqrt{2}z_2 = 0, \end{cases}$

令 $x_2 = \sqrt{2}$, 则 $y_2 = -\sqrt{2}, z_2 = 1$, 故 $\mathbf{n} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$.

设平面 BCC_1B_1 与平面 ADC_1 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{1}{5}$.

$\therefore$ 平面 BCC_1B_1 与平面 ADC_1 夹角的余弦值为 $\frac{1}{5}$.

考点二

典例 2 (1)证明:由 $AB = 8, AD = 5\sqrt{3}, AE = \frac{2}{5}AD, AF =$

$\frac{1}{2}AB$,

得 $AE = 2\sqrt{3}, AF = 4$.

又 $\angle BAD = 30^\circ$, 在 $\triangle AEF$ 中, 由余弦定理得

$EF = \sqrt{AE^2 + AF^2 - 2AE \cdot AF \cos \angle BAD}$

$= \sqrt{16 + 12 - 2 \times 4 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$.

所以 $AE^2 + EF^2 = AF^2$,

则 $AE \perp EF$,

即 $EF \perp AD$,

所以 $EF \perp PE, EF \perp DE$,

又 $PE \cap DE = E, PE, DE \subset$ 平面 PDE ,

所以 $EF \perp$ 平面 PDE ,

又 $PD \subset$ 平面 PDE , 故 $EF \perp PD$.

(2) 解: 连接 CE , 由 $\angle ADC = 90^\circ$, $ED = 3\sqrt{3}$, $CD = 3$,

则 $CE^2 = ED^2 + CD^2 = 36$,

在 $\triangle PEC$ 中, $PC = 4\sqrt{3}$, $PE = 2\sqrt{3}$, $EC = 6$,

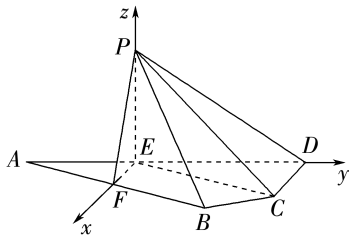
得 $EC^2 + PE^2 = PC^2$,

所以 $PE \perp EC$, 由 (1) 知 $PE \perp EF$,

又 $EC \cap EF = E$, $EC, EF \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PE \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $ED \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PE \perp ED$, 则 PE, EF, ED 两两垂直, 建立如图所示空间直角坐标系 $Exyz$,



则 $E(0,0,0), P(0,0,2\sqrt{3}), D(0,3\sqrt{3},0)$,

$C(3,3\sqrt{3},0), F(2,0,0), A(0,-2\sqrt{3},0)$,

由 F 是 AB 的中点, 得 $B(4,2\sqrt{3},0)$,

所以 $\overrightarrow{PC} = (3, 3\sqrt{3}, -2\sqrt{3}), \overrightarrow{PD} = (0, 3\sqrt{3}, -2\sqrt{3}), \overrightarrow{PB} =$

$(4, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}), \overrightarrow{PF} = (2, 0, -2\sqrt{3})$,

设平面 PCD 和平面 PBF 的法向量分别为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1,$

$z_1), \mathbf{m} = (x_2, y_2, z_2)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 3x_1 + 3\sqrt{3}y_1 - 2\sqrt{3}z_1 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 3\sqrt{3}y_1 - 2\sqrt{3}z_1 = 0, \end{cases}$

$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PB} = 4x_2 + 2\sqrt{3}y_2 - 2\sqrt{3}z_2 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PF} = 2x_2 - 2\sqrt{3}z_2 = 0, \end{cases}$

令 $y_1 = 2$, 得 $x_1 = 0, z_1 = 3$, 令 $x_2 = \sqrt{3}$, 得 $y_2 = -1, z_2 = 1$,

所以 $\mathbf{n} = (0, 2, 3)$ 为平面 PCD 的一个法向量, $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, -1,$

$1)$ 为平面 PBF 的一个法向量,

所以 $|\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{13}} = \frac{\sqrt{65}}{65}$,

设平面 PCD 和平面 PBF 所成角为 θ ,

则 $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{8\sqrt{65}}{65}$,

即平面 PCD 与平面 PBF 所成的二面角的正弦值为 $\frac{8\sqrt{65}}{65}$.

母题探究

解: 由本例 (2) 知, 平面 PBF 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, -1, 1)$.

假设在线段 PD 上存在点 M ,

使二面角 $M-FB-P$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$,

设 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PD} (0 < \lambda < 1)$,

则 $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FP} + \overrightarrow{PM} = (-2, 0, 2\sqrt{3}) + (0, 3\sqrt{3}\lambda, -2\sqrt{3}\lambda) = (-2,$

$3\sqrt{3}\lambda, 2\sqrt{3}(1-\lambda))$,

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PM} = (-4, -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}) + (0, 3\sqrt{3}\lambda, -2\sqrt{3}\lambda) =$

$(-4, 3\sqrt{3}\lambda - 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}(1-\lambda))$.

设平面 MFB 的法向量为 $\mathbf{v} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{FM} \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \overrightarrow{BM} \cdot \mathbf{v} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} -2x + 3\sqrt{3}\lambda y + 2\sqrt{3}(1-\lambda)z = 0, \\ -4x + (3\sqrt{3}\lambda - 2\sqrt{3})y + 2\sqrt{3}(1-\lambda)z = 0, \end{cases}$$

两式相减, 得 $x + \sqrt{3}y = 0$,

取 $x = \sqrt{3}$, 得 $y = -1, z = \frac{2+3\lambda}{2(1-\lambda)}$,

即 $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, -1, \frac{2+3\lambda}{2(1-\lambda)})$.

由题意 $|\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{v} \rangle| = \frac{|4 + \frac{2+3\lambda}{2(1-\lambda)}|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{4 + \frac{(2+3\lambda)^2}{4(1-\lambda)^2}}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$. 可设

$t = \frac{2+3\lambda}{2(1-\lambda)}$, 则 $t > 0$, 整理得 $8t^2 - 26t - 7 = 0$,

解得 $t = \frac{7}{2}$ 或 $t = -\frac{1}{4}$ (舍去),

所以 $\lambda = \frac{1}{2}$, 假设成立.

所以在线段 PD 上存在点 M , 使二面角 $M-FB-P$ 的余弦值为

$\frac{3\sqrt{13}}{13}$, 点 M 是 PD 的中点.

微点突破 11

典例 3 解: 由题意知 DC, AD, AP 两两垂直, 以 D 为原点,

AD, DC 所在直线分别为 x 轴、 y 轴, 过点 D 且平行于 AP 的

直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系. 设 $AD = p$,

$DC = q, p > 0, q > 0$,

满足 $p^2 + q^2 = AC^2 = 4$.

则 $A(p, 0, 0), P(p, 0, 2), C(0, q, 0)$,

$D(0, 0, 0)$.

设平面 APC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1,$

$y_1, z_1)$,

因为 $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 2), \overrightarrow{AC} = (-p, q,$

$0)$,

所以 $\begin{cases} \overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{m} = 2z_1 = 0, \\ \overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{m} = -px_1 + qy_1 = 0, \end{cases}$

取 $\mathbf{m} = (q, p, 0)$ 为平面

APC 的一个法向量.

设平面 DPC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

因为 $\overrightarrow{DP} = (p, 0, 2), \overrightarrow{DC} = (0, q, 0)$,

所以 $\begin{cases} \overrightarrow{DP} \cdot \mathbf{n} = px_2 + 2z_2 = 0, \\ \overrightarrow{DC} \cdot \mathbf{n} = qy_2 = 0, \end{cases}$

取 $\mathbf{n} = (2, 0, -p)$ 为平面

DPC 的一个法向量.

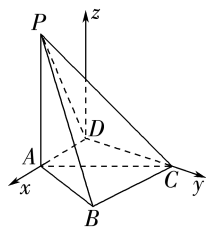
所以 $|\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|}$

$$= \frac{2q}{\sqrt{p^2 + q^2} \cdot \sqrt{p^2 + 4}}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{42}}{7}\right)^2},$$

又因为 $p^2 + q^2 = 4$, 所以 $\frac{q}{\sqrt{p^2 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$,

解得 $p = \sqrt{3}$ (负值舍去), 即 $AD = \sqrt{3}$.



1. $\frac{\sqrt{7}}{7}$ [因为正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为 2, 取

BC 的中点 O , 连接 AO , 则 $AO \perp$ 平面 BB_1C_1C .

取 B_1C_1 的中点 H , 连接 OH , 则易得 AO, BO, OH 两两垂直.

以 O 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0, 0, \sqrt{3}), B(1, 0, 0), A_1(0,$

$2, \sqrt{3}), C_1(-1, 2, 0)$,

所以 $\overrightarrow{AB} = (1, 0, -\sqrt{3}), \overrightarrow{AA_1} =$

$(0, 2, 0), \overrightarrow{BC_1} = (-2, 2, 0)$,

$\overrightarrow{BA_1} = (-1, 2, \sqrt{3})$.

设平面 AA_1B 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AB} = x_1 - \sqrt{3}z_1 = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AA_1} = 2y_1 = 0, \end{cases}$ 令 $z_1 = 1$, 得 $\mathbf{n}_1 = (\sqrt{3}, 0, 1)$ 为平

面 AA_1B 的一个法向量.

同理可得平面 A_1BC_1 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, -1)$.

设平面 AA_1B 与平面 A_1BC_1 的夹角为 θ ,

则 $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{2}{2 \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$,

即平面 AA_1B 与平面 A_1BC_1 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

2. (1) 证明: 翻折前, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = DE = BD = 2$,

所以 $DE \parallel BC$, 且 $AD = 4, BC = \frac{3}{2}DE = 3$,

因为 $\angle ABC = 90^\circ$, 所以 $\angle ADE = 90^\circ$, 即 $DE \perp AB$,

翻折后, $DE \perp AD, DE \perp BD$,

在 $\triangle BCD$ 中, $\angle CBD = 90^\circ, BD = 2, BC = 3$, 所以 $CD =$

$\sqrt{BC^2 + BD^2} = \sqrt{13}$,

在 $\triangle ACD$ 中, $AD = 4, CD = \sqrt{13}, AC = \sqrt{29}$, 所以 $AD^2 + CD^2 = AC^2$, 即 $AD \perp CD$,

又 $CD \cap DE = D, CD, DE \subset$ 平面 $BCED$,

所以 $AD \perp$ 平面 $BCED$.

(2) 解: 因为 $AD \perp$ 平面 $BCED, DE \perp BD$,

所以 DB, DE, DA 两两垂直,

故以 D 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0, 0, 4), C(2, 3, 0), D(0,$

$0, 0), E(0, 2, 0)$, 所以 $\overrightarrow{AC} = (2,$

$3, -4), \overrightarrow{AE} = (0, 2, -4), \overrightarrow{DA} = (0,$

$0, 4), \overrightarrow{DC} = (2, 3, 0)$,

设平面 ACE 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1,$

$y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 2x_1 + 3y_1 - 4z_1 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AE} = 2y_1 - 4z_1 = 0, \end{cases}$

取 $z_1 = 1$, 可得 $\mathbf{m} = (-1, 2, 1)$ 为平面 ACE 的一个法向量,

设平面 ACD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DA} = 4z_2 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DC} = 2x_2 + 3y_2 = 0, \end{cases}$

取 $z_2 = 0$, 可得 $\mathbf{n} = (-3, 2, 0)$ 为平面 ACD 的一个法向量,

所以 $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{5}{\sqrt{6} \times \sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{78}}{78}$, 所以

取 $x_2 = 3$, 可得 $\mathbf{n} = (3, -2, 0)$ 为平面 ACD 的一个法向量,

设平面 ACE 与平面 ACD 的夹角为 θ ,

则 $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{|-3-4|}{\sqrt{6} \times \sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{78}}{78}$, 所以

平面 ACE 与平面 ACD 夹角的余弦值为 $\frac{7\sqrt{78}}{78}$.

第 56 课时 空间距离及立体几何中的探索性问题

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 2 $\frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$

链教材·夯基固本

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ [因为 $\overrightarrow{PA} = (-2, 0, -1)$, 且 $\mathbf{n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 为 l 的一

个单位方向向量,

故点 P 到 l 的距离为

$$d = \sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2 - (\overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n})^2} = \sqrt{5 - \left(-\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. $\frac{2\sqrt{5}}{15}$ [由题意, 得 $\overrightarrow{AM} = (-2, 0, 3), \overrightarrow{AB} = (-3, -2, 1),$

$\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 2)$,

设平面 ABC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

由题意可得 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} -3x - 2y + z = 0, \\ -x + 2z = 0, \end{cases}$

不妨令 $x = 2$, 则 $z = 1, y = -\frac{5}{2}$,

$\therefore \mathbf{n} = \left(2, -\frac{5}{2}, 1\right)$.

$\therefore$ 点 M 到平面 α 的距离为 $\left| \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right| = \frac{|-4+3|}{\sqrt{2^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}.$

3. B [如图, 以 D 为原点, 建立空间直角坐标系,

则 $A(2, 0, 0), C(0, 2, 0), E(2, 1,$

$2), M(1, 0, 0), N(0, 2, 1)$,

所以 $\overrightarrow{ME} = (1, 1, 2), \overrightarrow{MN} =$

$(-1, 2, 1), \overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0)$,

设平面 EMN 的法向量为 $\mathbf{m} =$

(x, y, z) ,

则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{ME} = x + y + 2z = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{MN} = -x + 2y + z = 0, \end{cases}$

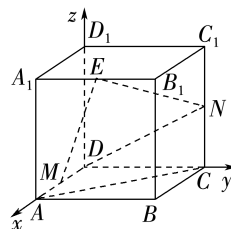
令 $x = 1$, 可得 $\mathbf{m} = (1, 1, -1)$ 为平面 EMN 的一个法向量, 所

以 $\overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{m} = 0$,

即 $\overrightarrow{AC} \perp \mathbf{m}$,

又 $AC \not\subset$ 平面 EMN ,

所以 $AC \parallel$ 平面 EMN .



故点 A 到平面 EMN 的距离即为直线 AC 到平面 EMN 的距离,

又 $\overrightarrow{MA} = (1, 0, 0)$, 所以点 A 到平面 EMN 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

即直线 AC 与平面 EMN 之间的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.]

考点深研·题型突破

考点一

考向 1 典例 1 B [法一(向量法):由题意知 $A_1(0, 0, 3)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 2, 0)$, $\overrightarrow{A_1C} = (1, 2, -3)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{A_1C}$ 方向上的单位向量为 $\boldsymbol{\mu} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$, 所以点 B 到直线 A_1C 的距离为 $\sqrt{|\overrightarrow{BC}|^2 - (\overrightarrow{BC} \cdot \boldsymbol{\mu})^2} = \sqrt{4 - \frac{8}{7}} = \frac{2\sqrt{35}}{7}$. 故选 B.

法二(几何法):连接 AC , A_1B (图略), 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由 $AB = 1$, $BC = 2$, 得 $AC = \sqrt{5}$, 在 $\text{Rt}\triangle A_1AC$ 中, $A_1C = \sqrt{AC^2 + A_1A^2} = \sqrt{14}$, 在 $\text{Rt}\triangle A_1AB$ 中,

$$A_1B = \sqrt{A_1A^2 + AB^2} = \sqrt{10},$$

$$\text{则 } A_1B^2 + BC^2 = A_1C^2,$$

在 $\text{Rt}\triangle A_1BC$ 中, 设边 A_1C 上的高为 h ,

$$\text{由 } A_1B \times BC = A_1C \times h \text{ 得 } h = \frac{\sqrt{10} \times 2}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{35}}{7}. \text{ 故选 B.}]$$

考向 2 典例 2 C [建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $D(0, 0, 0)$, $A(1, -1, 0)$, $B(1, 0,$

$0)$, $C(0, 1, 0)$, $C_1(0, 1, 2)$, $E\left(1, -1, \frac{1}{2}\right)$,

$-1, \frac{1}{2})$,

所以 $\overrightarrow{DC_1} = (0, 1, 2)$, $\overrightarrow{DE} = (1, -1,$

$\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{DB} = (1, 0, 0)$,

设平面 EDC_1 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DE} = x - y + \frac{1}{2}z = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DC_1} = y + 2z = 0, \end{cases} \text{ 取 } z = 1, \text{ 则 } x = -\frac{5}{2}, y = -2,$$

所以 $\mathbf{m} = \left(-\frac{5}{2}, -2, 1\right)$ 为平面 EDC_1 的一个法向量,

$$\text{所以点 } B \text{ 到平面 } EDC_1 \text{ 的距离 } d = \frac{|\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DB}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{\frac{5}{2}}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

故选 C.]

多维变迁

1. D [以 D 为坐标原点, DA 所在直线为 x 轴, DC 所在直线为 y 轴, DD_1 所在直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $G(2, \lambda, 2)$, $D_1(0, 0, 2)$, $E(2, 0, 1)$, $F(2, 2, 1)$,

所以 $\overrightarrow{ED_1} = (-2, 0, 1)$, $\overrightarrow{EF} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{EG} = (0, \lambda, 1)$.

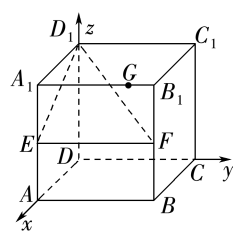
设平面 D_1EF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{ED_1} = -2x + z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 2y = 0, \end{cases}$$

取 $x = 1$, 得 $\mathbf{n} = (1, 0, 2)$ 为平面 D_1EF 的一个法向量,

所以点 G 到平面 D_1EF 的距离

$$d = \frac{|\overrightarrow{EG} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.]$$



2. 解:以 D_1 为坐标原点, 分别以

D_1A_1 , D_1C_1 , D_1D 所在直线为

x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

则 $A(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 1)$, $C(0, 1,$

$1)$, $C_1(0, 1, 0)$, $E\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$,

$F\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$,

$$\therefore \overrightarrow{AB} = (0, 1, 0), \overrightarrow{AC_1} = (-1,$$

$$1, -1), \overrightarrow{AE} = \left(0, \frac{1}{2}, -1\right), \overrightarrow{EC_1} = \left(-1, \frac{1}{2}, 0\right), \overrightarrow{FC} =$$

$$\left(-1, \frac{1}{2}, 0\right), \overrightarrow{AF} = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right),$$

$$(1) \text{ 取 } \mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = (0, 1, 0), \mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AC_1}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}(-1, 1, -1),$$

$a^2 = 1$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则点 B 到直线 AC_1 的距离为

$$\sqrt{a^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(2) $\because \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EC_1} = (-1, \frac{1}{2}, 0)$, 且 F, C, E, C_1 四点不共

线, $\therefore FC \parallel EC_1$, 而 $FC \not\subset$ 平面 AEC_1 , $EC_1 \subset$ 平面 AEC_1 ,

$\therefore FC \parallel$ 平面 AEC_1 ,

则点 F 到平面 AEC_1 的距离就是直线 FC 到平面 AEC_1 的距离.

设平面 AEC_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}y - z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EC_1} = -x + \frac{1}{2}y = 0, \end{cases} \text{ 取 } y = 2, \text{ 得}$$

$\mathbf{n} = (1, 2, 1)$ 为平面 AEC_1 的一个法向量,

$$\text{又 } \overrightarrow{AF} = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right),$$

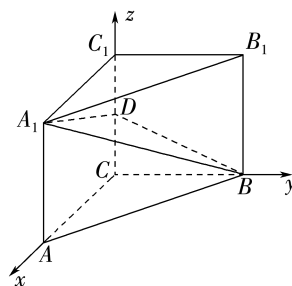
$$\therefore \text{直线 } FC \text{ 到平面 } AEC_1 \text{ 的距离为 } \frac{|\overrightarrow{AF} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

考点二

典例 3 解:(1) 因为 $CC_1 \perp$ 平面 ABC , $CA, CB \subset$ 平面 ABC , $\angle ACB = 90^\circ$, 则 $CC_1 \perp CA$, $CC_1 \perp CB$, $CA \perp CB$,

以 C 为坐标原点, 以 CA, CB, CC_1 所在的直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

如图所示,



因为 $AA_1=AC=BC=2$, 则 $A(2,0,0), B(0,2,0), A_1(2,0,2), D(0,0,1)$,

则 $\overrightarrow{DA_1}=(2,0,1), \overrightarrow{DB}=(0,2,-1)$.

易知平面 ABC 的一个法向量为 $\overrightarrow{m}=\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$,

设平面 A_1BD 的法向量为 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{DA_1}=0, \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{DB}=0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2x+z=0, \\ 2y-z=0, \end{cases} \text{ 令 } y=1,$$

故 $\overrightarrow{n}=(-1,1,2)$ 为平面 A_1BD 的一个法向量,

则 $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{m}=4, |\overrightarrow{n}|=\sqrt{6}, |\overrightarrow{m}|=2$,

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{m} \rangle = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{n}| |\overrightarrow{m}|} = \frac{4}{2 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

因为平面 A_1BD 与平面 ABC 的夹角为锐角,

所以平面 A_1BD 与平面 ABC 夹角的余弦值为 $|\cos \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{m} \rangle| =$

$$\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(2) 假设存在点 P , 设 $\overrightarrow{CP}=\lambda \overrightarrow{CD}=(0,0,\lambda), \lambda \in [0,1], \overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}=(0,-2,0)+(0,0,\lambda)=(0,-2,\lambda)$,

设 BP 与平面 A_1BD 所成的角为 $\theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

由(1)知, 平面 A_1BD 的一个法向量为 $\overrightarrow{n}=(-1,1,2)$,

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{BP}=2\lambda-2, |\overrightarrow{n}|=\sqrt{6}, |\overrightarrow{BP}|=\sqrt{4+\lambda^2},$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{BP} \rangle = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{n}| |\overrightarrow{BP}|}$$

$$= \frac{2\lambda-2}{\sqrt{6} \times \sqrt{4+\lambda^2}},$$

$$\text{所以 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{BP} \rangle| = \left| \frac{2\lambda-2}{\sqrt{6} \times \sqrt{4+\lambda^2}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{6}, \text{ 所以 } 7\lambda^2 -$$

$$16\lambda+4=0, \text{ 解得 } \lambda=\frac{2}{7} \text{ 或 } \lambda=2(\text{舍}).$$

所以在线段 CD 上存在一点 P , 使 BP 与平面 A_1BD 所成角

$$\text{的正弦值为 } \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\text{此时 } CP=\frac{2}{7}.$$

多维变迁

(1) 证明: 因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD=AB$,

$BC \perp AB, BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BC \perp$ 平面 PAB ,

又 $PB \subset$ 平面 PAB , 所以 $BC \perp PB$.

(2) 解: 假设存在满足条件的点 E , 在 $\triangle PAB$ 中, 因为 $PA=2, PB=\sqrt{3}, AB=1$,

所以 $PA^2=AB^2+PB^2$, 所以 $PB \perp AB$.

以 B 为坐标原点, 以 BA, BC, BP

所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立

如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(-1,0,0), B(0,0,0), C(0,2,$

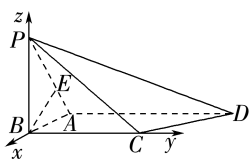
$0), D(-1,3,0), P(0,0,\sqrt{3})$,

所以 $\overrightarrow{CD}=(-1,1,0), \overrightarrow{PC}=(0,2,-\sqrt{3})$.

设平面 PCD 的法向量为 $\overrightarrow{m}=(x,y,z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{CD}=-x+y=0, \\ \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{PC}=2y-\sqrt{3}z=0, \end{cases} \text{ 取 } z=2,$$

$$\text{则 } \overrightarrow{m}=(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2).$$



因为点 B 与点 E 到平面 PCD 的距离相等, 且点 B 与点 E 在平面 PCD 的同侧,

所以 $BE \parallel$ 平面 PCD , 因为点 E 在棱 PA 上, 所以 $\overrightarrow{AE}=\lambda \overrightarrow{AP}$, 其中 $0 \leq \lambda \leq 1$,

因为 $\overrightarrow{AP}=(1,0,\sqrt{3})$, 所以 $\overrightarrow{AE}=(\lambda,0,\sqrt{3}\lambda)$, 又 $\overrightarrow{BA}=(-1,0,0)$, 所以 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=(\lambda-1,0,\sqrt{3}\lambda)$.

因为 $BE \parallel$ 平面 $PCD, \overrightarrow{m}=(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2)$ 为平面 PCD 的一个法向量,

$$\text{所以 } \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{m}=0, \text{ 即 } \sqrt{3}(\lambda-1)+2\sqrt{3}\lambda=0,$$

$$\text{解得 } \lambda=\frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BE}=\left(-\frac{2}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$\text{所以 } BE=|\overrightarrow{BE}|=\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

教材拓展 11

典例 4 A [如图, 以 A 为原点, 建立空间直角坐标系,

则 $B(3,0,0), C(3,3,0), D(0,3,0)$,

$P(0,0,6), G(1,0,4)$.

所以 $\overrightarrow{DG}=(1,-3,4), \overrightarrow{PC}=(3,3,-6)$,

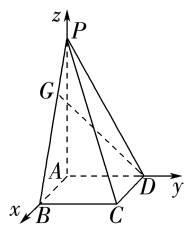
$\overrightarrow{DC}=(3,0,0)$,

设 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$ 为直线 PC 和 DG 的公垂线的方向向量,

$$\text{则有 } \begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{DG}=x-3y+4z=0, \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{PC}=3x+3y-6z=0, \end{cases} \text{ 可取 } \overrightarrow{n}=(1,3,2),$$

所以异面直线 PC 和 DG 的距离为

$$\frac{|\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}.$$



随堂·点对检测

1. B [建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $D_1(0,0,0), A(1,0,1), B(1,1,1)$,

$O(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), C_1(0,1,0), \overrightarrow{D_1A}=(1,$

$0,1), \overrightarrow{AB}=(0,1,0), \overrightarrow{OC_1}$

$$=(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0).$$

设平面 ABC_1D_1 的法向量为 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$,

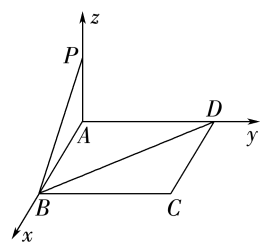
$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{D_1A}=x+z=0, \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB}=y=0, \end{cases} \text{ 令 } x=1, \text{ 得 } \overrightarrow{n}=(1,0,-1) \text{ 为平面 } ABC_1D_1 \text{ 的一个法向量, 故点 } O \text{ 到平面 } ABC_1D_1 \text{ 的距离为 } d=$$

$$\frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{OC_1}|}{|\overrightarrow{n}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

2. A [如图, 分别以 AB, AD, AP 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系,

则 $P(0,0,1), B(3,0,0), D(0,4,0)$,

则 $\overrightarrow{BP}=(-3,0,1), \overrightarrow{BD}=(-3,4,0)$.



法一:点 P 到直线 BD 的距离

$$d = \sqrt{|\overrightarrow{BP}|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BD}|} \right)^2}$$

$$= \sqrt{10 - \left(\frac{9}{5} \right)^2} = \frac{13}{5},$$

所以点 P 到直线 BD 的距离为 $\frac{13}{5}$.

法二: $\cos \langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BD} \rangle = \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BP}| |\overrightarrow{BD}|} = \frac{9}{\sqrt{10} \times 5} = \frac{9\sqrt{10}}{50}$, 所以

$\sin \langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BD} \rangle = \frac{13\sqrt{10}}{50}$, 所以点 P 到直线 BD 的距离为

$$|\overrightarrow{BP}| \sin \langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BD} \rangle = \sqrt{10} \times \frac{13\sqrt{10}}{50} = \frac{13}{5}.$$

3. (1) 证明: 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $BB_1 \perp$ 平面 ABC , 所以 $BB_1 \perp BC, BB_1 \perp BA$.

因为 $BA \perp BC, BA \cap BB_1 = B, BA, BB_1 \subset$ 平面 BAA_1B_1 , 所以 $BC \perp$ 平面 BAA_1B_1 , 又 $AB_1 \subset$ 平面 BAA_1B_1 , 所以 $BC \perp AB_1$.

因为 $BB_1 \perp BA, BA = BB_1$, 所以四边形 BAA_1B_1 为正方形, 所以 $AB_1 \perp A_1B$.

因为 $A_1B \cap BC = B, A_1B, BC \subset$ 平面 A_1BC , 所以 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BC .

(2) 解: 由(1)知, 直线 BA, BB_1, BC 两两垂直, 以 B 为原点, 直线 BA, BB_1, BC 分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.

因为 $BA = BC = BB_1 = 2$,

则 $B(0, 0, 0), A_1(2, 2, 0), B_1(0,$

$2, 0), C(0, 0, 2)$.

设 $M(0, 0, t) (0 \leq t \leq 2)$, 则 $\overrightarrow{MC} = (0, 0, 2-t), \overrightarrow{A_1B_1} = (-2, 0, 0), \overrightarrow{B_1C} = (0, -2, 2)$.

设平面 A_1B_1C 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = -2x = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{B_1C} = -2y + 2z = 0, \end{cases} \quad \text{取 } y = 1, \text{ 得 } \mathbf{n} = (0, 1, 1) \text{ 为平面}$$

A_1B_1C 的一个法向量,

所以点 M 到平面 A_1B_1C 的距离等于 $\frac{|\overrightarrow{MC} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|2-t|}{\sqrt{2}}$, 所

以 $\frac{|2-t|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $t = 1$ 或 $t = 3$ (舍去), 所以当点 M 为棱

BC 的中点时, 点 M 到平面 A_1B_1C 的距离等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

规范答题四

典例 (1) $EB \parallel$ 平面 $CD'F$ $A'E \parallel$ 平面 $CD'F$ 平面 $BA'E \parallel$ 平面 $CD'F$ $A'B \subset$ 平面 $BA'E$ 平面 $BA'E \parallel$ 平面 $CD'F$ $A'B \subset$ 平面 $BA'E$ (2) $\angle A'EB$ OM, OC, OD' 两两垂直

$$(1, 1, 0) \quad \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (1, 0, 0) \quad \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

第八章 解析几何

第 57 课时 直线的方程

理法先行 · 题练固本

梳必备 · 破题有方

知识点 2 (1) 向上 (2) 0° (3) $\{\alpha | 0^\circ \leq \alpha < 180^\circ\}$

知识点 3 (1) 正切值 $\tan \alpha$

知识点 4 $y = kx + b$ $y - y_0 = k(x - x_0)$ $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

链教材 · 夯基固本

1. D [因为 $\mathbf{v} = (3, 1)$, 故直线的斜率 $k = \frac{1}{3}$.]

2. B [由题意得直线 AB 的斜率 $k = \frac{\sqrt{3} - 0}{3 - 2} = \sqrt{3}$, 设直线 AB

的倾斜角为 α , 则 $\tan \alpha = \sqrt{3}$.

$\because 0^\circ \leq \alpha < 180^\circ, \therefore \alpha = 60^\circ$. 故选 B.]

3. -3 [因为 A, B, C 三点共线, 所以 $k_{AB} = k_{AC}$,

$$\text{所以 } \frac{7-5}{4-3} = \frac{x-5}{-1-3}, \text{ 所以 } x = -3.]$$

4. B [因为 $k > 0$, 故 A, C 不正确;

当 $x = -1$ 时, $y = 0$, 直线过点 $(-1, 0)$, 故选 B.]

5. $3x - 2y = 0$ 或 $x + y - 5 = 0$ [当截距为 0 时, 直线方程为 $3x - 2y = 0$;

当截距不为 0 时, 设直线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$, 则 $\frac{2}{a} + \frac{3}{a} = 1$,

解得 $a = 5$, 直线方程为 $x + y - 5 = 0$. 所以所求直线方程为 $3x - 2y = 0$ 或 $x + y - 5 = 0$.]

6. D [由题图知, 直线 l_1 的倾斜角 α_1 是钝角, 故 $k_1 < 0$, 直线 l_2 与 l_3 的倾斜角 α_2 与 α_3 均为锐角, 且 $\alpha_2 > \alpha_3$, 所以 $0 < k_3 < k_2$, 因此 $k_1 < k_3 < k_2$. 故选 D.]

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 (1) ACD (2) $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [1, +\infty)$ [(1) 直线 $x \sin \alpha + y + 2 = 0$ 的斜率 $k = -\sin \alpha \in [-1, 1]$, 所以其倾斜角的取值范围是 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$, A 正确;

由三点共线可得 AB 的斜率等于 BC 的斜率, 即 $\frac{3-12}{1+2} =$

$$\frac{m-3}{4-1} \Rightarrow m = -6, \text{ B 错误;}$$

$$\text{由 } -\frac{1}{m} = \tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}, \text{ 得 } m = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ C 正确;}$$

直线 l 的方向向量为 $(-1, \sqrt{3})$, 则斜率 $k = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$, D

正确.

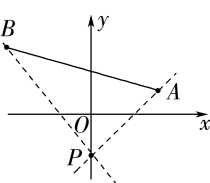
故选 ACD.

(2) 设点 $P(0, -2)$, 依题意 $k_{PA} = \frac{-2-1}{0-3} = 1, k_{PB} = \frac{-2-4}{0-(-2\sqrt{3})} = -\sqrt{3}$,

因为直线 l 与线段 AB 有交点, 设直线 l 的斜率为 k ,

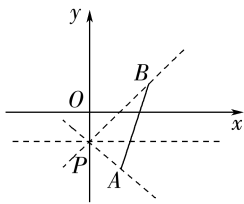
由图知 $k \leq -\sqrt{3}$ 或 $k \geq 1$, 由图可知

直线 l 的斜率的取值范围是 $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [1, +\infty)$.]



母题探究

1. 解: 如图,



$$\therefore A(1, -2), B(2, 1), P(0, -1),$$

$$\therefore k_{PA} = \frac{-2 - (-1)}{1 - 0} = -1, k_{PB} = \frac{-1 - 1}{0 - 2} = 1,$$

则使直线 l 与线段 AB 有公共点的直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $[-1, 1]$.

2. 解: 由题意可知直线 l 的倾斜角介于直线 PA 与 PB 的倾斜角之间. 又直线 PB 的倾斜角是 120° , 直线 PA 的倾斜角是 45° ,

所以 α 的取值范围是 $45^\circ \leq \alpha \leq 120^\circ$.

考点二

典例 2 (1) ABD (2) ABC [(1) 对于 $x - \sqrt{3}y + 3 = 0$, 令 $y = 0$, 得 $x = -3$, 所以直线在 x 轴上的截距为 -3 , A 正确;

由直线的截距式方程可得, 过点 $A(2, 0), B(0, 3)$ 可得直线方程为 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, B 正确;

两点式适用于不垂直于 x 轴和 y 轴的直线, C 错误;

因为直线 $y = x - 3$ 的斜率为 1,

所以其倾斜角等于 45° , 于是直线 l 的倾斜角等于 90° , 则其斜率不存在,

又直线 l 过点 $(2, 4)$, 所以直线 l 的方程为 $x = 2$, D 正确. 故选 ABD.

(2) 当直线经过原点时, 斜率 $k = \frac{2-0}{1-0} = 2$, 所求的直线方程为 $y = 2x$, 即 $2x - y = 0$;

当直线不过原点时, 设所求的直线方程为 $x \pm y = k$, 把点 $A(1, 2)$ 代入可得 $1 - 2 = k$, 或 $1 + 2 = k$,

求得 $k = -1$ 或 $k = 3$, 故所求的直线方程为 $x - y + 1 = 0$, 或 $x + y - 3 = 0$.

综上, 所求的直线方程为 $2x - y = 0, x - y + 1 = 0$ 或 $x + y - 3 = 0$.

故选 ABC.]

考点三

典例 3 (1) 证明: 直线 l 的方程可化为

$$k(x+2) + (1-y) = 0,$$

$$\text{令 } \begin{cases} x+2=0, \\ 1-y=0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=-2, \\ y=1. \end{cases}$$

$\therefore$ 无论 k 取何值, 直线 l 总经过定点 $(-2, 1)$.

(2) 解: 由方程知, 当 $k \neq 0$ 时, 直线在 x 轴上的截距为 $-\frac{1+2k}{k}$, 在 y 轴上的截距为 $1+2k$, 且过定点 $(-2, 1)$,

要使直线不经过第四象限, 则

$$\begin{cases} -\frac{1+2k}{k} \leq -2, \\ 1+2k \geq 1, \end{cases} \text{ 解得 } k \geq 0.$$

当 $k = 0$ 时, 直线 l 的方程为 $y = 1$, 符合题意,

故 k 的取值范围是 $[0, +\infty)$.

(3) 解: 由题意可知 $k \neq 0$, 再由直线 l 的方程,

$$\text{得 } A\left(-\frac{1+2k}{k}, 0\right), B(0, 1+2k).$$

$$\text{依题意得 } \begin{cases} -\frac{1+2k}{k} < 0, \\ 1+2k > 0, \end{cases}$$

解得 $k > 0$.

$$\therefore S = \frac{1}{2} |OA| |OB|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{1+2k}{k} \right| |1+2k|$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(1+2k)^2}{k} = \frac{1}{2} \left(4k + \frac{1}{k} + 4 \right)$$

$$\geq \frac{1}{2} \times \left(2\sqrt{4k \times \frac{1}{k}} + 4 \right) = 4,$$

等号成立的条件是 $k > 0$, 且 $4k = \frac{1}{k}$,

$$\text{即 } k = \frac{1}{2},$$

$$\therefore S_{\min} = 4,$$

此时直线 l 的方程为 $x - 2y + 4 = 0$.

随堂·点对检测

1. B [设直线的倾斜角为 α ,

直线 $x - \sqrt{3}y + 1 = 0$ 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\text{则 } \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \alpha \in [0, \pi),$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

故选 B.]

2. D [将直线 l 绕点 O 顺时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后, 恰与 y 轴重合,

则直线 l 的倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$, 其斜率为 $-\sqrt{3}$,

又直线过原点,

则直线 l 的方程为 $y = -\sqrt{3}x$.

故选 D.]

3. C [要使直线 $y = (k-1)x + 2k + 1$ 经过第一、二、四象限,

$$\text{则 } \begin{cases} k-1 < 0, \\ 2k+1 > 0, \end{cases} \text{ 解得 } -\frac{1}{2} < k < 1,$$

因此, “直线 $y = (k-1)x + 2k + 1$ 经过第一、二、四象限”是

“ $-\frac{1}{2} < k < 1$ ”的充要条件.]

4. $5x - 2y - 5 = 0$ [设 $C(x, y), M(0, m), N(n, 0)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{x+5}{2} = 0, \\ \frac{y-2}{2} = m, \end{cases} \text{ 且 } \begin{cases} \frac{x+7}{2} = n, \\ \frac{y+3}{2} = 0, \end{cases}$$

解得 $x = -5, y = -3, m = -\frac{5}{2}, n = 1$, 即 $C(-5, -3)$,

$M\left(0, -\frac{5}{2}\right), N(1, 0)$, 所以 MN 所在直线的方程为 $\frac{y + \frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{x}{1}$

$\frac{x}{1}$, 即 $5x - 2y - 5 = 0$.]

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 $k_1 = k_2$ 且 $b_1 \neq b_2$ $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, 且 $A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0$ (或 $B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0$) $k_1 \cdot k_2 = -1$ $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ $k_1 \neq k_2$ $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$

知识点 3 (1) $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $\sqrt{x^2 + y^2}$

$$(2) \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (3) \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

链教材·夯基固本

1. B [由 $A(-1, 1), B(2, -1), C(1, 4)$ 可得 $k_{AB} = \frac{-1-1}{2+1} = -\frac{2}{3}, k_{BC} = \frac{4+1}{1-2} = -5, k_{AC} = \frac{4-1}{1+1} = \frac{3}{2}$, 从而 $k_{AB} \cdot k_{AC} = -1$, 即 $AB \perp AC, A$ 为直角.]

2. A [经过直线 $2x - 2y - 1 = 0$ 与直线 $6x - 4y + 1 = 0$ 的交点的直线 l 的方程可设为 $2x - 2y - 1 + \lambda(6x - 4y + 1) = 0$, 将原点 $O(0, 0)$ 代入, 得 $-1 + \lambda = 0$, 解得 $\lambda = 1$, 所以直线 l 的方程为 $4x - 3y = 0$. 故选 A.]

3. $\pm\sqrt{10}$ [直线方程化为 $3x - y + 6 = 0$, $d = \frac{|3m - 6 + 6|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = 3$, 解得 $m = \pm\sqrt{10}$.]

4. B [直线 $3x - 4y + 5 = 0$ 的斜率是 $\frac{3}{4}$,

与 x 轴的交点为 $(-\frac{5}{3}, 0)$,

因此它关于 x 轴对称的直线方程是

$$y = -\frac{3}{4}\left(x + \frac{5}{3}\right), \text{即 } 3x + 4y + 5 = 0.$$

故选 B.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 ACD [直线 $l_1: x + (1+a)y = 2+a$ 与 $l_2: 2ax + 4y = -16$,

A 中, 当 $a = 1$ 时, 直线 $l_1: x + 2y = 3$ 与 $l_2: x + 2y = -8$, 可得两条直线的斜率相同, 在 y 轴上的截距不同, 则两条直线平行, 所以 A 正确;

B 中, 当 $a = -2$ 时, 直线 $l_1: x - y = 0$ 与 $l_2: x - y = 4$, 则这两条直线不重合, 所以 B 错误;

C 中, 当 $a = -\frac{2}{3}$ 时, 直线 $l_1: x + \frac{1}{3}y = \frac{4}{3}$ 与 $l_2: -\frac{1}{3}x + y = -4$, 则 $-\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 = 0$, 可得两条直线垂直, 所以 C 正确;

D 中, 若 $a = 0$ 时, 直线 $l_1: x + y = 2$ 与 $l_2: y = -4$, 联立 $\begin{cases} y = -4, \\ x + y = 2, \end{cases}$ 可得 $x = 6, y = -4$,

即两条直线的交点为 $(6, -4)$, 所以 D 正确.

故选 ACD.]

多维变迁

1. A [若直线 $mx + (2m-1)y + 3 = 0$ 与直线 $3x + my = 0$ 垂直, 则 $3m + m(2m-1) = 0$, 即 $2m^2 + 2m = 0$, 解得 $m = -1$ 或 $m = 0$.

故选 A.]

2. D [若直线 $l_1: (m-2)x + 3y + 3 = 0$ 与直线 $l_2: 2x + (m-1)y + 2 = 0$ 平行,

则 $(m-2)(m-1) = 3 \times 2 = 6$, 整理可得 $m^2 - 3m - 4 = 0$, 解得 $m = 4$ 或 $m = -1$,

若 $m = -1$, 直线 $l_1: x - y - 1 = 0$ 与直线 $l_2: x - y + 1 = 0$ 平行, 符合题意;

若 $m = 4$, 直线 $l_1: 2x + 3y + 3 = 0$ 与直线 $l_2: 2x + 3y + 2 = 0$ 平行, 符合题意.

综上所述, $m = 4$ 或 $m = -1$.

故选 D.]

考点二

典例 2 (1) A (2) D (3) A [(1) 由题意, 联立 $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0, \\ x + y - 5 = 0, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x = 3, \\ y = 2, \end{cases}$ 故 $P(3, 2)$.

则点 P 到直线 $l: x + 2y + 3 = 0$ 的距离 $d = \frac{|3 + 4 + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} =$

$2\sqrt{5}$, 故选 A.

(2) 由题意可得 $2a - (-1) \times (-3) = 0$, 即 $a = \frac{3}{2}$,

则 $l_2: \frac{3}{2}y - x + 2 = 0$, 即 $2x - 3y - 4 = 0$,

所以两平行直线间的距离为 $\frac{|2 - (-4)|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$.

故选 D.

(3) 直线 l 的方程可整理为 $\lambda(3x + y - 4) + x + y - 2 = 0$,

令 $\begin{cases} 3x + y - 4 = 0, \\ x + y - 2 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases}$

所以直线 l 恒过点 $A(1, 1)$,

由题意得当 PA 垂直于直线 l 时, 点 P 到直线 l 的距离最大,

$$|PA| = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{13},$$

$$k_{PA} = \frac{-1-1}{-2-1} = \frac{2}{3},$$

所以直线 $l: y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 1)$, 整理得 $3x + 2y - 5 = 0$.

故选 A.]

母题探究

1. 解: 法一: 设与直线 $x + 2y + 3 = 0$ 平行的直线方程为 $x + 2y + m = 0 (m \neq 3)$,

由例(1)的解析知 $P(3, 2)$,

所以 $3 + 2 \times 2 + m = 0$, 解得 $m = -7$,

所以所求直线方程为 $x + 2y - 7 = 0$.

法二: 设所求直线方程为 $2x - y - 4 + \lambda(x + y - 5) = 0$,

即 $(\lambda + 2)x + (\lambda - 1)y - 4 - 5\lambda = 0$,

又该直线与 $x + 2y + 3 = 0$ 平行,

故 $(\lambda + 2) \cdot 2 - (\lambda - 1) = 0$, 解得 $\lambda = -5$,

故所求直线方程为 $(-5 + 2)x + (-5 - 1)y - 4 + 25 = 0$, 即 $x + 2y - 7 = 0$.

2. 解: 设与直线 $x + 2y + 3 = 0$ 垂直的直线的方程为 $2x - y + m = 0$, 由例(1)的解析知 $P(3, 2)$, 则 $3 \times 2 - 2 + m = 0$, 得 $m = -4$,

所以所求直线方程为 $2x - y - 4 = 0$.

考点三

考向 1 典例 3 C [法一: 因为直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 关于点 $(1, -1)$ 对称的直线斜率不变,

故设对称后的直线方程 l 为 $2x + 3y + c = 0 (c \neq -6)$,

又 $\because$ 点 $(1, -1)$ 到两直线的距离相等,

$$\therefore \frac{|2-3+c|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{|2-3-6|}{\sqrt{2^2+3^2}},$$

化简得 $|c-1|=7$,

即 $c=-6$ 或 $c=8$,

$\therefore l$ 的方程为 $2x+3y-6=0$ (舍)或 $2x+3y+8=0$,

即直线 $2x+3y-6=0$ 关于点 $(1, -1)$ 对称的直线方程是 $2x+3y+8=0$.

故选C.

法二:在直线 $2x+3y-6=0$ 上任选两点,比如 $A(0, 2), B(3, 0)$,

则点 A, B 关于点 $(1, -1)$ 对称的点 A', B' 在所求直线上.

$\because AA'$ 的中点为点 $(1, -1)$,

$\therefore$ 点 $A'(2, -4)$,

同理可得 $B'(-1, -2)$,

由两点式得直线 $A'B'$ 的方程为 $2x+3y+8=0$.

故选C.]

考向2 典例4 (1)C (2) $9x-46y+102=0$

[(1)设 $P(-1, 3)$ 关于直线 $x-y=0$ 的对称点为 $Q(a, b)$,

$$\text{由对称关系可得} \begin{cases} \frac{b-3}{a+1} \times 1 = -1, \\ \frac{a-1}{2} - \frac{b+3}{2} = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=3, \\ b=-1. \end{cases}$$

$\therefore Q(3, -1)$.

则点 $Q(3, -1)$ 到直线 $3x+y-2=0$ 的距离 $d=$

$$\frac{|3 \times 3 - 1 - 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

故选C.

(2)在直线 m 上取一点,如 $M(2, 0)$,则 $M(2, 0)$ 关于直线 l 的对称点 M' 必在直线 m' 上.

设对称点为 $M'(a, b)$,

$$\text{则} \begin{cases} 2 \times \frac{a+2}{2} - 3 \times \frac{b+0}{2} + 1 = 0, \\ \frac{b-0}{a-2} \times \frac{2}{3} = -1, \end{cases}$$

$$\text{解得} M'\left(\frac{6}{13}, \frac{30}{13}\right).$$

设直线 m 与直线 l 的交点为 N ,

由 $\begin{cases} 2x-3y+1=0, \\ 3x-2y-6=0, \end{cases}$ 得 $N(4, 3)$.又 m' 经过点 $N(4, 3)$,所以由

两点式得直线 m' 的方程为 $9x-46y+102=0$.]

多维变迁

解:(1)设 $A'(x, y)$,由已知条件得

$$\begin{cases} \frac{y+2}{x+1} \times \frac{2}{3} = -1, \\ 2 \times \frac{x-1}{2} - 3 \times \frac{y-2}{2} + 1 = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = -\frac{33}{13}, \\ y = \frac{4}{13}. \end{cases} \text{所以} A'\left(-\frac{33}{13}, \frac{4}{13}\right).$$

(2)法一:在 $l: 2x-3y+1=0$ 上任取两点,

如 $P(1, 1), Q(4, 3)$,则 P, Q 关于点 $A(-1, -2)$ 的对称点 P', Q' 均在直线 l' 上,

易得 $P'(-3, -5), Q'(-6, -7)$,

所以 l' 的方程为 $2x-3y-9=0$.

法二:因为 $l \parallel l'$,

所以设 l' 的方程为 $2x-3y+C=0(C \neq 1)$.

因为点 $A(-1, -2)$ 到两直线 l, l' 的距离相等,

所以由点到直线的距离公式,

$$\text{得} \frac{|-2+6+C|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{|-2+6+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}},$$

解得 $C=-9(C=1$ 舍去),

所以 l' 的方程为 $2x-3y-9=0$.

随堂·对点检测

1. B [因为直线 $mx+3y+m-1=0$ 与直线 $x+(m+2)y+2m-2=0$ 平行,

所以 $1 \times 3 = m(m+2)$,解得 $m=1$ 或 $m=-3$.

当 $m=-3$ 时,两条直线分别为 $3x-3y+4=0, x-y-8=0$,两条直线平行;

当 $m=1$ 时,两条直线分别为 $x+3y=0, x+3y=0$,两条直线重合,舍去.

故选B.]

2. A [$k_{AB} = \frac{2-1}{-1-2} = -\frac{1}{3}$,所以直线 AB 的方程为 $y-2 = -\frac{1}{3}(x+1)$,即 $x+3y-5=0$,

$\therefore$ 点 C 到直线 AB 的距离 $d = \frac{7}{\sqrt{10}}$,

又 $|AB| = \sqrt{10}$, $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{\sqrt{10}} \times \sqrt{10} = \frac{7}{2}$.

故选A.]

3. B [设点 $A(1, 2)$ 关于直线 $x+y-2=0$ 的对称点 B 的坐标为 (a, b) ,

$$\text{则有} \begin{cases} \frac{b-2}{a-1} = 1, \\ \frac{a+1}{2} + \frac{b+2}{2} - 2 = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=0, \\ b=1, \end{cases} \text{故} B(0, 1). \text{故选B.}]$$

4. -9 [由 $\begin{cases} y=2x, \\ x+y=3, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$

所以点 $(1, 2)$ 满足方程 $mx+2y+5=0$,

即 $m \times 1 + 2 \times 2 + 5 = 0$,所以 $m=-9$.]

第59课时 圆的方程

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点1 定点 定长 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$ ($a,$

$$b) \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) \quad \frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$$

知识点2 (1) $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$

(2) $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$ (3) $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$

链教材·夯基固本

1. $\left(-1, \frac{1}{2}\right) \quad \frac{\sqrt{7}}{2}$ [将圆的方程化为标准方程 $(x+1)^2 +$

$$\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{4},$$

则圆心坐标为 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$,半径 $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$.]

2. $(x-2)^2+y^2=10$ [设圆心 C 的坐标为 $(a,0)$, 半径为 r , 则圆 C 的标准方程为 $(x-a)^2+y^2=r^2$,

$$\begin{cases} (-1-a)^2+1^2=r^2, \\ (1-a)^2+3^2=r^2, \end{cases}$$

解得 $a=2, r^2=10$, 所以圆 C 的标准方程为 $(x-2)^2+y^2=10$.]

3. $[1,2) \cup (2,+\infty)$ [将 $(0,0)$ 代入方程, 则 $0^2+0^2-a \cdot 0+a-1 \geq 0$, 得 $a \geq 1$.

$$\text{圆的方程可化为 } x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}-a+1,$$

$$\therefore \frac{a^2}{4}-a+1>0, \therefore a \neq 2,$$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $[1,2) \cup (2,+\infty)$.]

4. $(x-5)^2+(y-6)^2=10$ [法一: 由题意得所求圆的圆心为线段 P_1P_2 的中点 $\left(\frac{4+6}{2}, \frac{3+9}{2}\right)$, 即 $(5,6)$,

$$\text{半径为 } \frac{|P_1P_2|}{2}=\frac{\sqrt{(6-4)^2+(3-9)^2}}{2}=\sqrt{10},$$

所以所求圆的标准方程为 $(x-5)^2+(y-6)^2=10$.

法二: 由圆的“直径式”方程知, 圆的方程为 $(x-4)(x-6)+(y-9)(y-3)=0$, 化为标准方程得 $(x-5)^2+(y-6)^2=10$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1)A (2) $(x-1)^2+(y+1)^2=5$

[(1) 由已知得圆 C 的半径为 2, 故圆 C 的方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$,

即 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$, 故 A 正确.

故选 A.

(2) 法一: 设 $\odot M$ 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,

$$\begin{cases} 2a+b-1=0, \\ (3-a)^2+b^2=r^2, \\ a^2+(1-b)^2=r^2, \end{cases} \text{解得 } \begin{cases} a=1, \\ b=-1, \\ r^2=5, \end{cases}$$

$\therefore \odot M$ 的方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=5$.

法二: 设 $\odot M$ 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 (D^2+E^2-4F>0)$,

$$\text{则 } M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right),$$

$$\begin{cases} 2 \cdot \left(-\frac{D}{2}\right) + \left(-\frac{E}{2}\right) - 1 = 0, \\ 9 + 3D + F = 0, \\ 1 + E + F = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} D=-2, \\ E=2, \\ F=-3, \end{cases}$$

$\therefore \odot M$ 的方程为 $x^2+y^2-2x+2y-3=0$,

$$\text{即 } (x-1)^2+(y+1)^2=5.$$

法三: 设 $A(3,0), B(0,1), \odot M$ 的半径为 r ,

$$\text{则 } k_{AB}=\frac{1-0}{0-3}=-\frac{1}{3}, AB \text{ 的中点坐标为 } \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\therefore AB \text{ 的垂直平分线方程为 } y-\frac{1}{2}=3\left(x-\frac{3}{2}\right),$$

$$\text{即 } 3x-y-4=0.$$

$$\text{联立 } \begin{cases} 3x-y-4=0, \\ 2x+y-1=0, \end{cases} \text{解得 } \begin{cases} x=1, \\ y=-1, \end{cases}$$

$$\therefore M(1, -1),$$

$$\therefore r^2=|MA|^2=(3-1)^2+[0-(-1)]^2=5,$$

$$\therefore \odot M \text{ 的方程为 } (x-1)^2+(y+1)^2=5.]$$

多维变迁

1. C [将圆 $C: x^2+y^2-6x+4y+12=0$ 化成标准方程, 可得 $(x-3)^2+(y+2)^2=1$,

所以圆 C 的圆心坐标为 $(3, -2)$, 故选 C.]

2. $(x-1)^2+(y-1)^2=5$ [由题易知, 圆 O 的半径为 $|OA|=\sqrt{(0+1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$, 圆心 C 在 AB 的垂直平分线上,

又 AB 的斜率 $k=\frac{2+1}{-1-2}=-1$, 则直线 OC 的方程为 $y=x$,

设 $C(a, a) (a \neq 0)$, 所以 $|CA|=\sqrt{(a+1)^2+(a-2)^2}=\sqrt{5}$, 解得 $a=1$, 所以圆 C 的标准方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=5$.]

考点二

典例 2 (1)B [因为圆 $C: (x-1)^2+(y-1)^2=1$,

所以圆心 $C(1, 1)$, 半径 $r=1$,

因为点 M 是圆 C 上的动点, 所以 $|MC|=1$,

又 AM 与圆 C 相切, 且 $|AM|=2$,

$$\text{则 } |AC|=\sqrt{|MC|^2+|AM|^2}=\sqrt{5},$$

设 $A(x, y)$, 则 $(x-1)^2+(y-1)^2=5$,

$$\text{即 } x^2+y^2-2x-2y-3=0,$$

所以点 A 的轨迹方程为 $x^2+y^2-2x-2y-3=0$, 故选 B.]

(2) 解: (i) 法一: 设 $C(x, y)$, 因为 A, B, C 三点不共线, 所以 $y \neq 0$. 因为 $AC \perp BC$, 所以 $k_{AC} \cdot k_{BC} = -1$.

$$\text{又 } k_{AC}=\frac{y}{x+1}, k_{BC}=\frac{y}{x-3},$$

$$\text{所以 } \frac{y}{x+1} \cdot \frac{y}{x-3} = -1,$$

$$\text{化简得 } x^2+y^2-2x-3=0.$$

因此, 直角顶点 C 的轨迹方程为 $(x-1)^2+y^2=4 (y \neq 0)$.

法二: 设 AB 的中点为 D , 由中点坐标公式得 $D(1, 0)$, 由直角三角形的性质知 $|CD|=\frac{1}{2}|AB|=2$. 由圆的定义知, 动点 C

的轨迹是以 $D(1, 0)$ 为圆心, 2 为半径的圆 (由于 A, B, C 三点不共线, 所以应除去与 x 轴的交点),

所以直角顶点 C 的轨迹方程为 $(x-1)^2+y^2=4 (y \neq 0)$.

(ii) 设 $M(x, y), C(x_0, y_0)$, 因为 $B(3, 0), M$ 是线段 BC 的中点, 由中点坐标公式得 $x=\frac{x_0+3}{2}, y=\frac{y_0+0}{2}$, 所以 $x_0=2x-3, y_0=2y$.

由 (i) 知, 点 C 的轨迹方程为 $(x-1)^2+y^2=4 (y \neq 0)$, 将 $x_0=2x-3, y_0=2y$ 代入得 $(2x-4)^2+(2y)^2=4 (y \neq 0)$, 即 $(x-2)^2+y^2=1 (y \neq 0)$.

因此中点 M 的轨迹方程为 $(x-2)^2+y^2=1 (y \neq 0)$.

考点三

典例 3 解: 原方程可化为 $(x-2)^2+y^2=3$, 表示以 $(2, 0)$ 为圆心, $\sqrt{3}$ 为半径的圆.

(1) $\frac{y}{x}$ 的几何意义是圆上一点与原点连

线的斜率, 所以设 $\frac{y}{x}=k$, 即 $y=kx$. 当

直线 $y=kx$ 与圆相切时 (如图 1), 斜

率 k 取最大值或最小值, 此时 $\frac{|2k-0|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$, 解得 $k=\pm\sqrt{3}$.

所以 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$.

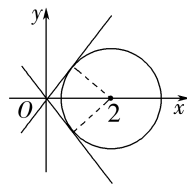


图1

(2)法一: $y-x$ 可看作是直线 $y=x+b$ 在 y 轴上的截距.

如图 2 所示,当直线 $y=x+b$ 与圆相切时,截距 b 取最大值或最小值.

$$\text{此时 } \frac{|2-0+b|}{\sqrt{2}} = \sqrt{3},$$

解得 $b = -2 \pm \sqrt{6}$.

所以 $y-x$ 的最大值为 $-2 + \sqrt{6}$, 最小值为 $-2 - \sqrt{6}$.

法二: 令 $x = 2 + \sqrt{3} \cos \theta, y = \sqrt{3} \sin \theta, \theta \in [0, 2\pi)$, 则 $y-x = \sqrt{3} \sin \theta - 2 - \sqrt{3} \cos \theta$

$$= \sqrt{6} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - 2 \in [-\sqrt{6} - 2, \sqrt{6} - 2].$$

(3)法一: $x^2 + y^2$ 表示圆上的一点与原点的距离的平方. 由平面几何知识, 知在原点和圆心连线与圆的两个交点处取得最大值和最小值. 又圆心到原点的距离为 2, 所以 $x^2 + y^2$ 的最大值是 $(2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$, $x^2 + y^2$ 的最小值是 $(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$.

法二: 令 $x = 2 + \sqrt{3} \cos \theta, y = \sqrt{3} \sin \theta, \theta \in [0, 2\pi)$, $x^2 + y^2 = 7 + 4\sqrt{3} \cos \theta \in [7 - 4\sqrt{3}, 7 + 4\sqrt{3}]$.

母题探究

1. 解: 设 $x = 2 + \sqrt{3} \cos \theta, y = \sqrt{3} \sin \theta (0 \leq \theta < 2\pi)$,

$$\text{则 } x + 2y = 2 + 2\sqrt{3} \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 + \sqrt{15} \cdot \sin(\theta + \varphi),$$

$$\tan \varphi = \frac{1}{2},$$

当 $\sin(\theta + \varphi) = 1$ 时, $x + 2y$ 取最大值 $2 + \sqrt{15}$.

2. 解: $\sqrt{x^2 + (y+1)^2}$ 表示圆上的点到点 $(0, -1)$ 的距离,

因为圆心 $(2, 0)$ 到点 $(0, -1)$ 的距离为 $\sqrt{5}$, 所以 $\sqrt{x^2 + (y+1)^2}$ 的最小值为 $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

3. 解: $|x + y + 2| = \sqrt{2} \times \frac{|x + y + 2|}{\sqrt{2}}$, 表示圆上的点到直线 $x + y + 2 = 0$ 的距离的 $\sqrt{2}$ 倍.

因为圆心 $(2, 0)$ 到直线 $x + y + 2 = 0$ 的距离为 $\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$,

故圆上的点到直线 $x + y + 2 = 0$ 的距离的最小值为 $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$, 故 $|x + y + 2|$ 的最小值为 $4 - \sqrt{6}$.

多维变迁

$3\sqrt{5} - 1$ [如图, 曲线 $C: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ 是以 $C(3, 1)$ 为圆心, 1 为半径的圆, 则根据圆的性质可知, $|PN|$ 的最小值为 $|PC| - 1$. 设 M 关于直线 $x + 2y + 2 = 0$ 的对称点为 $H(m, n)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{n-2}{m+1} = 2, \\ \frac{m-1}{2} + 2 \times \frac{n+2}{2} + 2 = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m = -3, \\ n = -2, \end{cases}$$

即 $H(-3, -2)$. 连接 HC , 分别交直线 $x + 2y + 2 = 0$ 与圆 C 于 P, N , 连接 PM , 则 $|PM| + |PN| \geq |PM| + |PC| - 1 =$

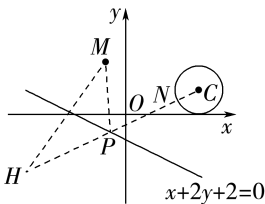


图2

$|PH| + |PC| - 1 \geq |HC| - 1$, 当且仅当 P, H, C 三点共线时取等号, 此时取得最小值 $3\sqrt{5} - 1$, 所以 $|PM| + |PN|$ 的最小值为 $3\sqrt{5} - 1$.

教材拓展 12

典例 4 A [以线段 AB 的中点 O 为坐标原点, AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系, 设 $M(x, y)$, 且 $A(-2, 0), B(2, 0)$,

$$\text{由 } |MA| = \sqrt{2} |MB|, \text{ 得 } (x+2)^2 + y^2 = 2(x-2)^2 + 2y^2,$$

化简得 M 的轨迹方程为圆 $(x-6)^2 + y^2 = 32 (y \neq 0)$, 半径 $r = 4\sqrt{2}$,

如图, 有 $S_{\triangle MAB} \leq \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot r = 8\sqrt{2}$.

所以 $\triangle MAB$ 面积的最大值为 $8\sqrt{2}$.

随堂·点对检测

1. B [根据题意, 圆的内接正方形相对的两个顶点分别是 $A(5, 6), C(3, -4)$, 则圆的圆心坐标为 $(4, 1)$, 半径 $r = \frac{1}{2} \times$

$\sqrt{4+100} = \sqrt{26}$, 则圆的方程为 $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 26$, 即 $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 9 = 0$. 故选 B.]

2. C [法一: 设圆心 C 的坐标为 (a, b) , 半径为 r . 因为圆心 C 在直线 $x + y - 2 = 0$ 上, 所以 $b = 2 - a$.

又 $|CA|^2 = |CB|^2$, 所以 $(a-1)^2 + (2-a+1)^2 = (a+1)^2 + (2-a-1)^2$, 解得 $a = 1, b = 1$, 所以 $r = 2$. 所以圆的方程为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

法二: 由已知条件得, 线段 AB 的垂直平分线的方程是 $y = x$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = x, \\ x + y - 2 = 0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases} \text{ 即圆心坐标为 } (1, 1),$$

$$\text{所以 } r^2 = (1-1)^2 + [1-(-1)]^2 = 4,$$

所以圆的方程为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$. 故选 C.]

3. $4 + \sqrt{2}$ [由题知 $C_1(2, 3)$ 且半径 $r_1 = 1, C_2(3, 4)$ 且半径 $r_2 = 3$,

所以 $|C_1C_2| = \sqrt{(3-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2} < r_2 - r_1 = 2$, 即圆 C_2 包含圆 C_1 .

又 M, N 分别是圆 C_1, C_2 上的动点, P 是 x 轴上的动点, 要使 $|PN| - |PM|$ 最大, P, M, N, C_1, C_2 共线且 M, N 在 C_1, C_2 的两侧, 所以 $(|PN| - |PM|)_{\max} = |C_1C_2| + r_2 + r_1 = 4 + \sqrt{2}$.]

4. $(x-5)^2 + y^2 = 16$ [设 $M(x, y)$, 由 $\frac{|MA|}{|MB|} = 2$, 得

$$\frac{(x+3)^2 + y^2}{(x-3)^2 + y^2} = 4,$$

可得 $(x+3)^2 + y^2 = 4(x-3)^2 + 4y^2$, 即 $x^2 - 10x + y^2 + 9 = 0$,

整理得 $(x-5)^2 + y^2 = 16$, 故动点 M 的轨迹方程为 $(x-5)^2 + y^2 = 16$.]

第 60 课时 直线与圆、圆与圆的位置关系

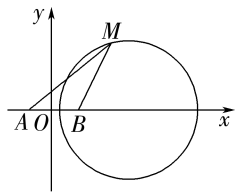
理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 $< = > > = <$

知识点 2 $d > r_1 + r_2 \quad d < |r_1 - r_2| \quad |r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$
 $d = |r_1 - r_2| \quad d = r_1 + r_2$

知识点 3 (1) $2\sqrt{r^2 - d^2}$



链教材·夯基固本

1. B [由题意可得 $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} < 1$,

即 $a^2+b^2 > 1$, 所以 $P(a, b)$ 在圆外.]

2. C [圆心为 $O(0, 0)$, $k_{OP} = 2$, 故切线的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 故切线

方程为 $y-2 = -\frac{1}{2}(x-1)$,

即 $x+2y-5=0$.]

3. BC [圆 $C_1: x^2+y^2=4$, 圆心为 $C_1(0, 0)$, 半径 $r=2$; 圆 $C_2: x^2+y^2-8x-6y+16=0$, 即 $(x-4)^2+(y-3)^2=9$, 圆心为 $C_2(4, 3)$, 半径 $R=3$. 因为 $|C_1C_2| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, $R+r=5 = |C_1C_2|$, 所以两圆外切.]

4. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ [圆心坐标为 $(1, 2)$, 半径 $r=2$.

圆心到直线的距离 $d = \frac{|2-2+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} < 2$, 所以

直线与圆相交,

所以弦长 $l = 2\sqrt{r^2-d^2} = 2\sqrt{4-\frac{4}{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$.]

5. B [由圆 $C_1: x^2+y^2+2x+y=0$, 圆 $C_2: x^2+y^2+4x+3y+2=0$,

将两圆方程作差, 有 $(x^2+y^2+4x+3y+2)-(x^2+y^2+2x+y)=0$,

整理可得 $x+y+1=0$, 即公共弦所在直线方程为 $x+y+1=0$.

故选 B.]

考点深研·题型突破

考点一

考向 1 典例 1 ABD [对于 A, $\because$ 点 A 在圆 C 上, $\therefore a^2+b^2=r^2$, 圆心 $C(0, 0)$ 到直线 l 的距离 $d = \frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = r$, $\therefore$ 直

线 l 与圆 C 相切, A 正确;

对于 B, $\because$ 点 A 在圆 C 内, $\therefore a^2+b^2 < r^2$, 圆心 $C(0, 0)$ 到直线

l 的距离 $d = \frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}} > r$, $\therefore$ 直线 l 与圆 C 相离, B 正确;

对于 C, $\because$ 点 A 在圆 C 外, $\therefore a^2+b^2 > r^2$, 圆心 $C(0, 0)$ 到直线

l 的距离 $d = \frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}} < r$, $\therefore$ 直线 l 与圆 C 相交, C 错误;

对于 D, $\because$ 点 A 在直线 l 上, $\therefore a^2+b^2=r^2$, 圆心 $C(0, 0)$ 到直

线 l 的距离 $d = \frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = r$, $\therefore$ 直线 l 与圆 C 相切, D 正确.

故选 ABD.]

考向 2 典例 2 C [圆 C 的标准方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=4$, 圆心坐标为 $(1, -1)$, 半径 $r=2$,

直线 l 的方程为 $x+y-m=0$, 圆心到直线 l 的距离 $d = \frac{|1+(-1)-m|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-m|}{\sqrt{2}} = \frac{m}{\sqrt{2}} (m>0)$,

因为直线 $l: x+y-m=0 (m>0)$ 被圆 $C: (x-1)^2+(y+1)^2=4$ 截得的弦长为 $\sqrt{2}m$,

则 $\sqrt{2}m = 2\sqrt{2^2-\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2}$, 解得 $m=2$,

将 $m=2$ 代入原方程, 验证弦长是否匹配, 结果符合题意.

故选 C.]

考向 3 典例 3 解: $\because (2-1)^2+(3+2)^2 > 1$, $\therefore$ 点 P 在圆外.

法一: ①若直线 l 的斜率存在, 设 $l: y-3=k(x-2)$, 即 $kx-y+3-2k=0$.

$\because$ 直线 l 与圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ 相切,

$\therefore \frac{|5-k|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$, $\therefore k = \frac{12}{5}$,

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y-3 = \frac{12}{5}(x-2)$, 即 $12x-5y-9=0$.

②若直线 l 的斜率不存在, 则直线 $l: x=2$ 也符合要求.

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $12x-5y-9=0$ 或 $x=2$.

法二: ①若直线 l 的斜率存在,

设 $l: y-3=k(x-2)$, 即 $y=k(x-2)+3$,

与圆的方程联立消去 y , 得 $(x-1)^2+[k(x-2)+3+2]^2=1$,

整理得 $(k^2+1)x^2-(4k^2-10k+2)x+4k^2-20k+25=0$,

$\therefore \Delta = (4k^2-10k+2)^2-4(k^2+1)(4k^2-20k+25)=0$,

$\therefore k = \frac{12}{5}$. 此时直线 l 的方程为 $y-3 = \frac{12}{5}(x-2)$,

即 $12x-5y-9=0$.

②若直线 l 的斜率不存在, 则直线 $l: x=2$ 也符合要求.

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $12x-5y-9=0$ 或 $x=2$.

母题探究

1. 解: $\because (2-1)^2+(-2+2)^2=1$, $\therefore$ 点 P 在圆上.

$\therefore$ 过 $P(2, -2)$ 的切线方程为 $x=2$,

即直线 l 的方程为 $x=2$.

2. 解: 点 $P(2, 3)$ 到圆心 $(1, -2)$ 的距离为

$\sqrt{(2-1)^2+(3+2)^2} = \sqrt{26}$,

$\therefore$ 切线长为 $\sqrt{26-1}=5$.

考点二

典例 4 (1) C [圆 $C_1: x^2+y^2+2ax=0 (a \neq 0)$ 与圆 $C_2: x^2+y^2-2\sqrt{3}y+2=0$ 化为标准方程分别为 $(x+a)^2+y^2=a^2 (a \neq 0)$, $x^2+(y-\sqrt{3})^2=1$,

$\therefore$ 两圆恰有三条公切线,

$\therefore$ 两圆外切,

$\therefore |C_1C_2| = r_1+r_2$,

$\therefore \sqrt{a^2+3} = |a|+1$,

$\therefore a^2+3 = a^2+2|a|+1$,

$\therefore |a|=1$,

$\therefore a = \pm 1$.]

(2) 解: (i) 由已知可得两个圆的方程分别为 $(x+1)^2+(y-3)^2=9$, $(x-3)^2+(y-6)^2=45-m$,

两圆的圆心距 $d = \sqrt{(-1-3)^2+(3-6)^2} = 5$, 两圆的半径之和 $r_1+r_2 = 3+\sqrt{45-m}$,

若两圆外切, 则 $3+\sqrt{45-m}=5$, 可得 $m=41$.

(ii) 当 $m=-9$ 时, 两圆的方程分别为 $x^2+y^2+2x-6y+1=0$, $x^2+y^2-6x-12y-9=0$,

把两个圆的方程相减, 可得公共弦所在的直线方程为 $4x+3y+5=0$.

圆 C_1 的圆心 $(-1, 3)$ 到公共弦所在的直线的距离 $d = \frac{|-4+9+5|}{5} = 2$,

可得弦长为 $2\sqrt{9-4} = 2\sqrt{5}$.

多维变迁

1. D [化圆 $C_2: x^2 + y^2 - 6x - 8y - k = 0$ 为 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25 + k$,

则 $k > -25$, 圆心坐标为 $C_2(3, 4)$, 半径为 $\sqrt{25+k}$,

圆 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 的圆心坐标为 $C_1(0, 0)$, 半径为 1,

要使圆 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 - 6x - 8y - k = 0$ 没有公共点,

则 $|C_1C_2| > \sqrt{25+k} + 1$ 或 $|C_1C_2| < \sqrt{25+k} - 1$,

即 $5 > \sqrt{25+k} + 1$ 或 $5 < \sqrt{25+k} - 1$, 解得 $-25 < k < -9$ 或 $k > 11$,

所以实数 k 的取值范围是 $(-25, -9) \cup (11, +\infty)$.

故选 D.]

2. A [由 $x^2 + y^2 - 4x - 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 4y - 3 = 0$, 解得两圆交

点为 $M\left(\frac{2+\sqrt{10}}{2}, \frac{2+\sqrt{10}}{2}\right)$ 与 $N\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2}, \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$,

因为所求圆经过此两点, 则连接 MN , MN 即是所求圆的一条弦.

因为 MN 的斜率 $k_1 = 1$,

所以其垂直平分线的斜率 $k_2 = -1$, MN 的中点 $P(1, 1)$,

所以垂直平分线的方程为 $y = -x + 2$,

垂直平分线与直线 $x - y - 4 = 0$ 的交点即为所求圆的圆心,

联立 $\begin{cases} y = -x + 2, \\ x - y - 4 = 0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x = 3, \\ y = -1, \end{cases}$ 所以圆心坐标为 $(3, -1)$,

圆的半径 $r = \sqrt{\left(3 - \frac{2+\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \left(-1 - \frac{2+\sqrt{10}}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{13}$, 所以所求圆的方程为 $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 13$, 即 $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$.

故选 A.]

随堂·点对检测

1. B [圆 $C: x^2 + (y-2a)^2 = \frac{1}{4}a^2$ 的圆心为 $C(0, 2a)$, 半径

$R = \frac{|a|}{2}$,

因为直线 $y = \sqrt{3}x + a + 1$ 与圆 C 相离,

所以点 C 到直线 $y = \sqrt{3}x + a + 1$ 的距离 $d = \frac{|-2a + a + 1|}{2} > \frac{|a|}{2}$, 解得 $a < \frac{1}{2}$,

结合 $R = \frac{|a|}{2} > 0, a \neq 0$, 可得实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$. 故选 B.]

2. D [由 $x^2 - 4x + y^2 = 0$, 得 $(x-2)^2 + y^2 = 2^2$, 则圆心坐标为 $(2, 0)$, 半径为 2; 由 $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$, 得 $(x+2)^2 + y^2 = 1^2$, 则圆心坐标为 $(-2, 0)$, 半径为 1.

故两圆的圆心距为 4, 半径之和为 3,

因为 $4 > 3$, 所以两圆的位置关系是外离, 故两圆的公切线共有 4 条.

故选 D.]

3. C [根据题意可知, 圆 $C: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ 的圆心 $C(1, -3)$, 半径 $r = 5$,

圆心 C 到直线 l 的距离

$d = \frac{|1 - 2 \times (-3) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 2\sqrt{5}$,

所以 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{5}$.

故选 C.]

4. $5x - 12y + 45 = 0$ 或 $x - 3 = 0$ [圆 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 化为标准方程为 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, 则圆心 $O(1, 2)$, 半径为 2,

因为 $|OA| = \sqrt{(3-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{13} > 2$, 所以点 $A(3, 5)$ 在圆外. 显然, 当切线斜率不存在时, 直线与圆相切, 即切线方程为 $x - 3 = 0$; 当切线斜率存在时, 设所求切线方程为 $y - 5 = k(x - 3)$, 即 $kx - y + 5 - 3k = 0$. 又圆心坐标为 $(1, 2)$, 半径 $r = 2$, 圆心到切线的距离 $d = \frac{|3 - 2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2$,

即 $|3 - 2k| = 2\sqrt{k^2 + 1}$, 解得 $k = \frac{5}{12}$, 此时直线方程为 $5x - 12y + 45 = 0$.

故所求切线方程为 $5x - 12y + 45 = 0$ 或 $x - 3 = 0$.]

第 61 课时 椭圆

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1)椭圆 焦点 焦距 (2) $a > c$ $a = c$ $a < c$

知识点 2 $2a$ $2b$ $2c$ $(0, 1)$ $a^2 - b^2$

链教材·夯基固本

1. 14 [根据椭圆的定义得 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$,

又 $a^2 = 100$, 即 $a = 10$,

所以 $6 + |PF_2| = 20$, 故 $|PF_2| = 14$.]

2. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ [由题设, 椭圆焦点为 $(\pm 1, 0)$, 则 $c = 1$,

令椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1$ 且 $a^2 > 1$,

又 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在椭圆上,

则 $\frac{1}{2a^2} + \frac{3}{4(a^2 - 1)} = 1$,

整理得 $4a^4 - 9a^2 + 2 = (4a^2 - 1)(a^2 - 2) = 0$,

解得 $a^2 = 2$ 或 $a^2 = \frac{1}{4}$ (舍去),

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.]

3. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ [$x = 0$ 时, $y = 1$, 即 $b = 1$;

$y = 0$ 时, $x = -2$,

即 $c = 2$,

故 $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,

故 $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.]

4. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ [由题意可知 $|AB| = 3 = \frac{2b^2}{a}$ ($a > 0$),

又 $c = 1$, 解得 $a = 2, b^2 = 3$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1)D [已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点

为 $F(2, 0)$, 离心率为 $\frac{2}{3}$.

设 C 的左焦点为 F' , 半焦距为 $c(c>0)$,

由题意得 $c=2, e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$,

所以 $a=3$,

由椭圆的定义得 $|PF'|+|PF|=2a=6$,

所以 $|PA|+|PF|=|PA|-|PF'|+2a\leq|AF'|+2a=6+\sqrt{5}$,

当点 P 为线段 AF' 的延长线与 C 的交点时取等号,

故 $|PA|+|PF|$ 的最大值为 $6+\sqrt{5}$.

故选 D.]

(2)解:由已知得 $a=2\sqrt{3}, b=\sqrt{3}$,

所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{12-3}=3$,

从而 $|F_1F_2|=2c=6$.

在 $\triangle F_1PF_2$ 中,

$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos 60^\circ$,

即 $36=|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1|\cdot|PF_2|$. ①

由椭圆的定义得 $|PF_1|+|PF_2|=4\sqrt{3}$,

即 $48=|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|$. ②

由①②得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=4$.

所以 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin 60^\circ=\sqrt{3}$.

母题探究

1.解:因为 P, Q 都在椭圆上, 由椭圆的定义知

$|PF_1|+|PF_2|=2a, |QF_1|+|QF_2|=2a$.

又因为 $|PQ|=|PF_1|+|QF_1|$,

所以 $\triangle PQF_2$ 的周长为 $|PQ|+|PF_2|+|QF_2|=|PF_1|+|QF_1|+|QF_2|+|PF_2|=4a$.

故 $\triangle PQF_2$ 的周长为 $4\times 2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$.

2.解:由已知得 $a=2\sqrt{3}, b=\sqrt{3}$,

所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{12-3}=3$.

从而 $|F_1F_2|=2c=6$.

在 $\triangle F_1PF_2$ 中, 由勾股定理可得

$|PF_2|^2=|PF_1|^2+|F_1F_2|^2$,

即 $|PF_2|^2=|PF_1|^2+36$,

又由椭圆定义知 $|PF_1|+|PF_2|=4\sqrt{3}$,

所以 $|PF_2|=4\sqrt{3}-|PF_1|$.

从而有 $(4\sqrt{3}-|PF_1|)^2=|PF_1|^2+36$,

解得 $|PF_1|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}\times|PF_1|\times|F_1F_2|=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

即 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

多维变迁

A [由题意得 $P(x, y)$ 到 $A(-2, 0)$ 与 $B(2, 0)$ 的距离之和为 8, 且 $8>4$, 故动点 P 的轨迹是以 $A(-2, 0)$ 与 $B(2, 0)$ 为焦点的椭圆, 可得 $2a=8, c=2$, 所以 $a=4, b^2=a^2-c^2=16-4=$

12, 所以动点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. 故选 A.]

考点二

典例 2 (1) $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 或 $\frac{y^2}{81}+\frac{x^2}{9}=1$

(2) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ (3) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$ 或 $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{25}=1$ [(1)法一:

若椭圆的焦点在 x 轴上, 设方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

由题意得 $\begin{cases} 2a=3\times 2b, \\ \frac{9}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=3, \\ b=1, \end{cases}$ 所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$.

若椭圆的焦点在 y 轴上, 设方程为 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

由题意得 $\begin{cases} 2a=3\times 2b, \\ \frac{0}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=9, \\ b=3, \end{cases}$ 所以椭圆的标准方程为

$\frac{y^2}{81}+\frac{x^2}{9}=1$.

综上所述, 椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 或 $\frac{y^2}{81}+\frac{x^2}{9}=1$.

法二: 设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1(m>0, n>0, m\neq n)$,

由题意知

$\begin{cases} \frac{9}{m}=1, \\ 2\sqrt{m}=3\times 2\sqrt{n} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \frac{9}{m}=1, \\ 2\sqrt{n}=3\times 2\sqrt{m}, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} m=9, \\ n=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=9, \\ n=81, \end{cases}$

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 或 $\frac{y^2}{81}+\frac{x^2}{9}=1$.

(2)法一: 若焦点在 x 轴上, 设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$(a>b>0)$.

由已知条件得 $\begin{cases} \frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1, \\ \frac{1}{a^2}+\frac{14}{4b^2}=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a^2=8, \\ b^2=4, \end{cases}$

所以所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

若焦点在 y 轴上, 设椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>$

$0)$.

由已知条件得 $\begin{cases} \frac{4}{b^2}+\frac{2}{a^2}=1, \\ \frac{1}{b^2}+\frac{14}{4a^2}=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b^2=8, \\ a^2=4. \end{cases}$

则 $a^2<b^2$, 与 $a>b>0$ 矛盾, 舍去.

综上所述, 所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

法二: 设椭圆的一般方程为 $Ax^2+By^2=1(A>0, B>0, A\neq B)$.

分别将两点的坐标 $(2, -\sqrt{2})$, $(-1, \frac{\sqrt{14}}{2})$ 代入椭圆的一般方程,

得 $\begin{cases} 4A+2B=1, \\ A+\frac{14}{4}B=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} A=\frac{1}{8}, \\ B=\frac{1}{4}, \end{cases}$

所以所求椭圆标准方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(3) 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的离心率 $e = \frac{1}{2}$,

当焦点在 x 轴上时,

设所求椭圆的方程是 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \text{ 解得 } \begin{cases} a^2 = 8, \\ b^2 = 6, \end{cases} \\ \frac{4}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1, \end{cases}$$

所以所求椭圆标准方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$.

当焦点在 y 轴上时, 设所求椭圆的方程为 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \\ \frac{3}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} a^2 = \frac{25}{3}, \\ b^2 = \frac{25}{4}, \end{cases}$$

所以椭圆标准方程为 $\frac{y^2}{\frac{25}{3}} + \frac{x^2}{\frac{25}{4}} = 1$.

所求椭圆标准方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$ 或 $\frac{y^2}{\frac{25}{3}} + \frac{x^2}{\frac{25}{4}} = 1$.

多维变迁

1. D [由题意可知, 椭圆的焦点在 x 轴上, 故可设它的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

由椭圆的定义知 $c = 2$,

$$2a = \sqrt{\left(\frac{5}{2} + 2\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} =$$

$2\sqrt{10}$, 所以 $a = \sqrt{10}$, 所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 10 - 4 = 6$, 所以所

求椭圆标准方程为 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$.

故选 D.]

2. A [若曲线 $ax^2 + by^2 = c$ 为椭圆,

则椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{\frac{c}{a}} + \frac{y^2}{\frac{c}{b}} = 1 (a \neq b)$,

则 $\frac{c}{a} > 0$, 即 $ac > 0$,

所以由“曲线 $ax^2 + by^2 = c$ 为椭圆”可以推出“ $ac > 0$ ”, 充分性成立;

当 $ac > 0$ 时, 比如 $a = b = 1, c = 1$, 此时曲线方程为 $x^2 + y^2 = 1$, 它表示的是圆, 而不是椭圆,

所以由“ $ac > 0$ ”不能推出“曲线 $ax^2 + by^2 = c$ 为椭圆”, 必要性不成立,

所以“曲线 $ax^2 + by^2 = c$ 为椭圆”是“ $ac > 0$ ”的充分不必要条件.

故选 A.]

考点三

考向 1 典例 3 (1) B (2) A (3) C [(1) 由题意可得, $2b =$

$$2\sqrt{6}c,$$

所以 $b = \sqrt{6}c$,

所以 $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{7}c$,

$$\text{所以 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

故选 B.

(2) 设 $|PF_2| = m$, 因为 $|PF_1| = 3|PF_2|$,

所以 $|PF_1| = 3m$,

因为 P 为椭圆 C 上一点, 所以 $3m + m = 2a$, 即 $4m = 2a$,

$$\text{故 } |PF_2| = \frac{a}{2}, |PF_1| = \frac{3a}{2},$$

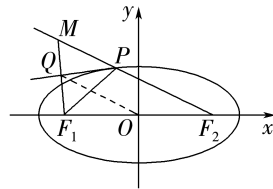
因为 $PF_1 \perp PF_2$, 所以由勾股定理得

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = (2c)^2,$$

得 $\frac{5}{2}a^2 = 4c^2$, 即 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{8}$, 解得 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{4}$, 故 A 正确.

故选 A.

(3) 延长 F_1Q 交 F_2P 的延长线于 M , 连接 OQ ,



$$|PF_1| = |MP|, |MF_2| = |MP| + |PF_2| = |PF_1| + |PF_2| = 2a,$$

$\therefore |OQ| = \frac{1}{2}|MF_2| = a$, 则 Q 的轨迹为以 O 为圆心、 a 为半径的圆,

$\therefore Q$ 与短轴顶点的最短距离为 $a - b = \frac{c}{2}$,

$$\therefore a^2 + b^2 - 2ab = \frac{a^2 - b^2}{4}, \text{ 又 } a \neq b,$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{3}{5},$$

$$\text{则 } e = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

故选 C.]

考向 2 典例 4 AB [对于 A, 依题意知 $a = 4, b = 2, c = 2\sqrt{3}$,

当 P 为短轴端点时, $(S_{\triangle PF_1F_2})_{\max} = \frac{1}{2} \times 2c \times b = 4\sqrt{3}$, 故 A 正确;

对于 B, 由椭圆的性质知 $|PF_1|$ 的取值范围是 $[a - c, a + c]$, 即 $[4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3}]$, 故 B 正确;

对于 C, $\sin \angle F_2BO = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\angle F_2BO = \frac{\pi}{3}$, 所以

$\angle F_1BF_2 = \frac{2\pi}{3}$, 即 $\angle F_1PF_2$ 的最大值为 $\frac{2\pi}{3}$, 最小值为 0, 所以

存在点 P 使 $PF_1 \perp PF_2$, 故 C 错误;

对于 D, 设 $P(x_0, y_0)$,

$$\text{所以 } |PB| = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - 2)^2},$$

$$\text{又 } \frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{4} = 1, \text{ 所以 } x_0^2 = 16 - 4y_0^2,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |PB| &= \sqrt{16-4y_0^2+(y_0-2)^2} \\ &= \sqrt{-3y_0^2-4y_0+20} \\ &= \sqrt{-3\left(y_0+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{64}{3}}, \end{aligned}$$

又 $-2 \leq y_0 \leq 2$, 故当 $y_0 = -\frac{2}{3}$ 时, $|PB|_{\max} = \sqrt{\frac{64}{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, 故 D 错误. 故选 AB.]

多维变迁

1. D [法一: 由题意知 $A(-4, 0), F(2, 0)$, 设 $M(x_0, y_0)$, 则 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MF} = (-4-x_0, -y_0) \cdot (2-x_0, -y_0) = (x_0-2) \cdot (x_0+4) + y_0^2 = x_0^2 + 2x_0 - 8 + 12 - \frac{3}{4}x_0^2 = \frac{1}{4}x_0^2 + 2x_0 + 4 = \frac{1}{4}(x_0+4)^2$, 因为 $-4 \leq x_0 \leq 4$,

所以 $0 \leq \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MF} \leq 16$.

法二: 由题意知 $A(-4, 0), F(2, 0)$,

设 $M(x_0, y_0)$, 取线段 AF 的中点 N , 则 $N(-1, 0)$,

连接 MN , 如图,

$$\begin{aligned} \text{则 } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MF} &= \frac{(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MF})^2 - (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MF})^2}{4} \\ &= \frac{4\overrightarrow{MN}^2 - \overrightarrow{FA}^2}{4} = \overrightarrow{MN}^2 - 9 = (x_0+1)^2 + y_0^2 - 9 = x_0^2 + 2x_0 + 1 + 12 - \frac{3}{4}x_0^2 - 9 = \frac{1}{4}x_0^2 + 2x_0 + 4 = \frac{1}{4}(x_0+4)^2, \end{aligned}$$

$$\text{因为 } -4 \leq x_0 \leq 4, \text{ 所以 } 0 \leq \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MF} \leq 16. \text{ 故选 D.}]$$

2. $\left(\frac{1}{3}, \sqrt{2}-1\right)$ [由题意得, 椭圆 C 上存在一点 P , 使得

$\angle PF_2F_1$ 为钝角, 且 $|PF_2| = |F_2F_1| = 2c$,

则 $|PF_1| = 2a - |PF_2| = 2a - 2c$,

因为 $\angle PF_2F_1$ 为钝角,

$$\text{所以 } \frac{1}{2} \angle PF_2F_1 > 45^\circ, \sin \frac{1}{2} \angle PF_2F_1 > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{即 } \frac{\frac{1}{2}|PF_1|}{|F_1F_2|} = \frac{a-c}{2c} > \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 整理得 } a > (\sqrt{2}+1)c, \text{ 所以离心率}$$

$$e = \frac{c}{a} < \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1,$$

又点 P 不在 x 轴上时, $a-c < |PF_2| < a+c$, 所以 $a-c < 2c < a+c$, 解得 $e > \frac{1}{3}$,

所以离心率的取值范围为 $\left(\frac{1}{3}, \sqrt{2}-1\right)$.]

随堂·对点检测

1. D [由已知得, $a=3$, 由椭圆的定义可得 $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 6$. 故选 D.]

2. A [因为 $\frac{x^2}{2m} + \frac{y^2}{m-1} = 1$ 表示椭圆,

$$\text{所以 } \begin{cases} 2m > 0, \\ m-1 > 0 \end{cases} \text{ 且 } 2m \neq m-1, \text{ 所以 } m > 1,$$

所以 $2m > m+1 > m-1$,

所以椭圆的焦点在 x 轴上, 又椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则

$$\frac{\sqrt{2m-(m-1)}}{\sqrt{2m}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 解得 } m=2.$$

故选 A.]

3. BCD [把原方程化成标准方程, 得 $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$, 于是 $a=5$,

$$b=4, c = \sqrt{25-16} = 3,$$

因此, 椭圆的长轴和短轴的长分别是 $2a=10$ 和 $2b=8$, 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$, 两个焦点坐标分别是 $(-3, 0)$ 和 $(3, 0)$, 椭圆上任一点 P 到两焦点的距离的和等于 $2a=10$. 故选 BCD.]

4. $\frac{y^2}{27} + \frac{x^2}{9} = 1$ 或 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ [当椭圆的焦点在 x 轴上时, 则

$$a=3, \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 所以 } c = \sqrt{6}, \text{ 从而 } b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 6 = 3, \text{ 所以}$$

椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$. 当椭圆的焦点在 y 轴上时, 则

$$b=3, \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 所以 } \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 所以 } a^2 = 27, \text{ 所以椭圆}$$

的标准方程为 $\frac{y^2}{27} + \frac{x^2}{9} = 1$. 综上, 椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{27} + \frac{x^2}{9} = 1$ 或 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$.]

第 62 课时 双曲线

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) 定点 (2) $a < c$ 两条射线 $a > c$

知识点 2 $x \in \mathbf{R}, y \leq -a$ 或 $y \geq a$ 坐标轴 原点 $A_1(-a,$

$$0), A_2(a, 0) \quad y = \pm \frac{a}{b}x \quad a^2 + b^2$$

链教材·夯基固本

1. 17 [根据双曲线的定义得 $||PF_1| - |PF_2|| = 8$,

因为 $|PF_1| = 9$,

所以 $|PF_2| = 1$ 或 $|PF_2| = 17$.

又 $|PF_2| \geq c - a = 2$, 故 $|PF_2| = 17$.]

2. $\frac{y^2}{9} - x^2 = 1$ [由题设, 可设双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{9} = m$ 且 m

$\neq 0$, 又 $(-\sqrt{3}, 6)$ 在双曲线上,

$$\text{所以 } m = 3 - \frac{36}{9} = -1,$$

故双曲线的方程是 $\frac{y^2}{9} - x^2 = 1$.]

3. $\frac{9}{5}$ [双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的渐近线方程是 $\frac{x}{4} \pm \frac{y}{3} = 0$, 即 $3x \pm 4y = 0$.

由点到直线的距离公式, 得所求距离为 $\frac{|3 \times 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{9}{5}$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1) CD (2) $\frac{3}{4}$ [(1) 对于 A, 设 $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$,

由题意知动点 M 满足 $|MF_1| - |MF_2| = 4 = |F_1F_2|$. 故动点 M 的轨迹是射线, 故选项 A 错误;

对于 B, 设动圆 M 的半径为 r , 由动圆 M 同时与圆 C_1 和圆 C_2 外切,

$$|MC_1|=1+r, |MC_2|=3+r,$$

$$|MC_2|-|MC_1|=2<6,$$

所以动圆圆心 M 的轨迹是以点 $C_1(-3,0)$ 和 $C_2(3,0)$ 为焦点的双曲线的左支,

$$\text{且 } 2a=2, \text{ 解得 } a=1. \text{ 又 } c=3,$$

$$\text{则 } b^2=c^2-a^2=8,$$

所以动圆圆心 M 的轨迹方程为 $x^2-\frac{y^2}{8}=1(x\leq -1)$, 故选项

B 错误;

对于 C, 设双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 则

$$a=2, c=\sqrt{4+12}=4,$$

$$\text{则 } |PF_2|=8>6,$$

$$\text{由双曲线定义可得 } ||PF_1|-|PF_2||=2a=4,$$

即 $||PF_1|-8|=4$, 所以 $|PF_1|=4$ 或 $|PF_1|=12$, 由于 $c-a=2$, 故点 P 到它的左焦点的距离是 4 或 12, 故选项 C 正确;

对于 D, 不妨设点 P 在双曲线的右支上,

$$\text{则 } |PF_1|-|PF_2|=2a=2\sqrt{2},$$

在 $\triangle F_1PF_2$ 中, 由余弦定理,

$$\text{得 } \cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } |PF_1| \cdot |PF_2| = 8,$$

$$\text{所以 } S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3},$$

故选项 D 正确.

(2) 因为由双曲线的定义有 $|PF_1|-|PF_2|=|PF_2|=2a=2\sqrt{2}$, 所以 $|PF_1|=2|PF_2|=4\sqrt{2}$, $c^2=a^2+b^2=4$,

$$\text{所以 } \cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|}$$

$$= \frac{(4\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 4^2}{2 \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3}{4}.]$$

母题探究

解: 不妨设点 P 在双曲线的右支上,

$$\text{则 } |PF_1|-|PF_2|=2a=2\sqrt{2},$$

$$\therefore \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0,$$

$$\therefore \overrightarrow{PF_1} \perp \overrightarrow{PF_2},$$

$$\therefore \text{在 } \triangle F_1PF_2 \text{ 中, 有 } |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2,$$

$$\text{即 } |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 16,$$

$$\therefore |PF_1| \cdot |PF_2| = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2| = 2.$$

考点二

典例 2 B [因为 C_1 和 C_2 有相同的渐近线, 所以设双曲线 C_1

的方程为 $\frac{x^2}{4\lambda} - \frac{y^2}{3\lambda} = 1 (\lambda \neq 0)$, 将 $(2,3)$ 代入得 $\frac{4}{4\lambda} - \frac{9}{3\lambda} = 1 \Rightarrow$

$$\lambda = -2,$$

所以双曲线 C_1 的标准方程为 $\frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{8} = 1$. 故选 B.]

多维变迁

1. D [根据对称性, 不妨设双曲线的其中一条渐近线方程为

$$y = \frac{b}{a}x,$$

则过 $F_2(c,0)$ 且垂直于渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 的直线方程为 $y =$

$$-\frac{a}{b}(x-c),$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{b}{a}x, \\ y = -\frac{a}{b}(x-c), \end{cases} \text{ 可得 } P\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right),$$

$$\therefore |PF_2| = \sqrt{\left(\frac{a^2}{c}-c\right)^2 + \frac{a^2b^2}{c^2}} = b=2, \text{ 又 } F_1(-c,0),$$

$$\therefore k_{PF_1} = \frac{\frac{ab}{c}}{\frac{a^2}{c}-c} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \therefore \frac{ab}{a^2+a^2+b^2} = \frac{2a}{2a^2+4} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore a^2+2=2\sqrt{2}a, \therefore a=\sqrt{2}, \text{ 又 } b=2,$$

$$\therefore \text{双曲线的方程为 } \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1. \text{ 故选 D.}]$$

$$2. \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{75} = 1 \quad [\text{设双曲线方程为 } mx^2 - ny^2 = 1 (mn > 0).]$$

$$\therefore \begin{cases} 9m-28n=1, \\ 72m-49n=1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m=-\frac{1}{75}, \\ n=-\frac{1}{25}. \end{cases} \therefore \text{双曲线的标准方程为}$$

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{75} = 1.]$$

考点三

考向 1 典例 3 (1) D (2) B [(1) 因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$

($a>0$) 的焦距为 $2\sqrt{5}$, 即 $2c=2\sqrt{5}$, 所以 $c=\sqrt{5}$,

又 $b=1$,

$$\text{所以 } a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{5-1} = 2,$$

$$\text{所以双曲线的离心率为 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

故选 D.

(2) 法一: 设 C 的半焦距为 c , 则直线 l 的方程为 $x=-c$, 代入

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ 解得 } y = \pm \frac{b^2}{a},$$

$$\therefore |AF_1| = \frac{b^2}{a}.$$

$$\therefore \triangle ABF_2 \text{ 为等边三角形, } \therefore \tan \angle AF_2F_1 = \frac{|AF_1|}{|F_1F_2|} = \frac{\frac{b^2}{a}}{2c} =$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore \frac{c^2 - a^2}{2ac} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\therefore \frac{c}{2a} - \frac{a}{2c} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\text{即 } \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ 解得离心率 } e = \sqrt{3} \text{ (负值舍去).}$$

法二: 设 C 的半焦距为 c , 则直线 l 的方程为 $x=-c$, 代入

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ 解得 } y = \pm \frac{b^2}{a},$$

$$\therefore |AF_1| = \frac{b^2}{a}, |AB| = \frac{2b^2}{a},$$

$\therefore \triangle ABF_2$ 为等边三角形,

$$\therefore |AF_2| = |AB| = \frac{2b^2}{a},$$

由双曲线的定义知 $|AF_2| - |AF_1| = 2a$, 即 $\frac{b^2}{a} = 2a$,

$$\therefore \frac{b^2}{a^2} = 2,$$

$$\therefore C \text{ 的离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{3}.$$

故选 B.]

多维变迁

C [A(0, -a), 设双曲线的左焦点为 F',

$$\text{则 } |FP| - |PF'| = 2a,$$

$$\text{故而 } |PA| + |PF| = 2a + |PF'| + |PA| \geq 2a + |F'A|,$$

$$\therefore |PA| + |PF| \text{ 的最小值为 } 2a + |F'A| = 2a + \sqrt{a^2 + c^2},$$

$$\therefore C \text{ 的左支上存在一点 } P, \text{ 使得 } |PA| + |PF| = 7,$$

$$\therefore 2a + \sqrt{a^2 + c^2} \leq 7, \text{ 即 } \sqrt{a^2 + c^2} \leq 7 - 2a,$$

$$\therefore c^2 + a^2 \leq 4a^2 - 28a + 49, \text{ 又 } c^2 = a^2 + 1,$$

$$\text{可得 } a^2 - 14a + 24 \geq 0 \Rightarrow a \geq 12 \text{ (舍) 或 } a \leq 2,$$

$$\therefore a^2 \leq 4 = 4(c^2 - a^2),$$

$$\text{可得 } e \geq \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \text{离心率的取值范围是 } \left[\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty \right).$$

故选 C.]

考向 2 典例 4 (1)B (2)D [(1)双曲线 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的离心

$$\text{率为 } \frac{\sqrt{21}}{3},$$

$$\text{则 } \frac{\sqrt{3-m}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}, \text{ 解得 } m = -4,$$

$$\text{故 } a = \sqrt{3}, b = 2,$$

$$\text{则渐近线方程为 } y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

故选 B.

(2)由双曲线定义知 $||PF_2| - |PF_1|| = 2a$,

$$\therefore |PF_2| = 3|PF_1|, \therefore |PF_1| = a, |PF_2| = 3a,$$

$$\therefore \angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}, |F_1F_2| = 2c,$$

$$\therefore \cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|}$$

$$= \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } \frac{a^2 + 9a^2 - 4c^2}{2 \times a \times 3a} = \frac{1}{2}, \text{ 化简得 } 7a^2 = 4c^2, \text{ 又 } c^2 = a^2 + b^2,$$

$$\therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{4}, \text{ 解得 } \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \text{双曲线 } C \text{ 的渐近线方程为 } y =$$

$$\pm \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

故选 D.]

多维变迁

B [将点 (1, 0), $(\frac{\sqrt{7}}{2}, 3)$ 代入双曲线方程, 得

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} = 1, \\ \frac{7}{4a^2} - \frac{9}{b^2} = 1, \end{cases} \text{ 得 } a = 1, b = 2\sqrt{3}, \text{ 所以 } C \text{ 的渐近线方程为}$$

$$y = \pm \frac{b}{a}x = \pm 2\sqrt{3}x. \text{ 故选 B.}]$$

考向 3 典例 5 ABD [设双曲线半焦距为 c, 则由已知可

得 $c = \sqrt{5}$, 因为双曲线 C 经过点 $(\sqrt{5}, \frac{1}{2})$, 所以 $\frac{5}{a^2} - \frac{1}{4b^2} = 1$,

$$\text{联立 } \begin{cases} c = \sqrt{5}, \\ \frac{5}{a^2} - \frac{1}{4b^2} = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2, \\ b = 1, \end{cases} \text{ 所以双曲线 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$$

$$y^2 = 1.$$

对于 A, 因为 $a = 2, b = 1$, 所以 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$,

即 $x \pm 2y = 0$, 故 A 正确;

对于 B, C 的实轴长为 $2a = 4$, 故 B 正确;

依题意, 不妨设 $B_1(0, 1), B_2(0, -1)$,

设 $M(x, y)$,

$$\text{动点 } M \text{ 满足 } |MB_1| = \sqrt{3}|MB_2|,$$

$$\text{所以 } \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + (y+1)^2},$$

化简得 $x^2 + (y+2)^2 = 3$, 则点 M 的轨迹是以 $N(0, -2)$ 为圆心, 半径为 $\sqrt{3}$ 的圆.

$$\text{对于 C, 点 } F \text{ 到圆心 } N \text{ 的距离 } d = \sqrt{(\sqrt{5}-0)^2 + (0+2)^2} =$$

3, 所以 $|FM|$ 的最大值为 $3 + \sqrt{3}$, 故 C 错误;

$$\text{对于 D, 设 } P(x_0, y_0) \text{ 为双曲线上任一点, 则 } x_0^2 - 4y_0^2 = 4,$$

P 到圆心 N 的距离为

$$|PN| = \sqrt{x_0^2 + (y_0+2)^2}$$

$$= \sqrt{4y_0^2 + 4 + y_0^2 + 4y_0 + 4}$$

$$= \sqrt{5\left(y_0 + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{36}{5}},$$

当 $y_0 = -\frac{2}{5}$ 时, $|PN|$ 最小, 最小值为 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$, 故 $|PM|$ 的最小

值为 $\frac{6\sqrt{5}}{5} - \sqrt{3}$, 故 D 正确.

故选 ABD.]

多维变迁

1. ABC [因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 过点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 和

$(2, 3)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{2}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1, \\ \frac{4}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 1, \\ b = \sqrt{3}, \end{cases}$$

$$\text{则 } c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2.$$

对于 A 选项, 实轴长为 $2a = 2$, 故 A 正确;

对于 B 选项, 焦距为 $2c = 4$, 故 B 正确;

对于 C 选项, 渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \sqrt{3}x$, 故 C 正确;

对于 D 选项, 离心率为 $\frac{c}{a} = 2$, 故 D 错误.

故选 ABC.]

2.8 [a = 2, b = \sqrt{21}, c = 5, |PF_2| \geq c - a = 3, |PF_1| =

$$|PF_2| + 2a = |PF_2| + 4,$$

$$|PF_1| + \frac{3}{|PF_2|} = |PF_2| + \frac{3}{|PF_2|} + 4, |PF_2| \geq 3, \text{ 而函数}$$

$y = x + \frac{3}{x} (x > 0)$ 在 $[3, +\infty)$ 上单调递增,

所以当且仅当 $x = 3$ 时, $y_{\min} = 8$.]

典例 6 $\frac{36}{5}$ [设 M 到直线 $x = \frac{a^2}{c} = \frac{9}{5}$ 的距离为 d , 由双曲线第二定义知,

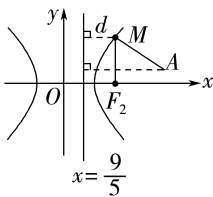
$$\frac{|MF_2|}{d} = e = \frac{5}{3},$$

$$\therefore d = \frac{3}{5} |MF_2|,$$

$$\therefore |MA| + \frac{3}{5} |MF_2| = |MA| + d,$$

如图, 可知 $(|MA| + d)_{\min} = x_A -$

$$\frac{9}{5} = 9 - \frac{9}{5} = \frac{36}{5}.]$$



典例 7 (1)D (2)A (3)B [(1) 设动点 $M(x, y)$, 由于 $A(1, 0), B(-1, 0)$, 根据直线 AM 与 BM 的斜率之积为 4, 整理得 $\frac{y}{x-1} \cdot \frac{y}{x+1} = 4$, 化简得 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 (x \neq \pm 1)$, 故选 D.

(2) 法一(设而不求): 设 $P(x_1, y_1)$, 则 $Q(-x_1, y_1)$, 则由 k_{AP}

$$\cdot k_{AQ} = \frac{1}{4} \text{ 得 } k_{AP} \cdot k_{AQ} = \frac{y_1}{x_1+a} \cdot \frac{y_1}{-x_1+a} = \frac{y_1^2}{-x_1^2+a^2} =$$

$$\frac{1}{4}, \text{ 由 } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \text{ 得 } y_1^2 = \frac{b^2(a^2-x_1^2)}{a^2},$$

$$\text{所以 } \frac{b^2(a^2-x_1^2)}{-x_1^2+a^2} = \frac{1}{4}, \text{ 即 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4}, \text{ 所以椭圆 } C \text{ 的离心率 } e =$$

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

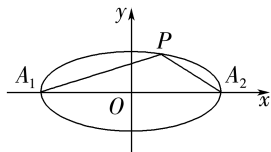
法二(第三定义): 设右顶点为 B , 连接 PB (图略), 由椭圆的对称性知 $k_{PB} = -k_{AQ}$,

$$\text{故 } k_{AP} \cdot k_{AQ} = k_{PA} \cdot (-k_{PB}) = \frac{1}{4}, \text{ 由椭圆第三定义得}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{b^2}{a^2}, \text{ 故 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4}, \text{ 所以椭圆 } C \text{ 的离心率 } e = \frac{c}{a} =$$

$$\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(3) 设点 $P(x, y)$,



$$\text{则直线 } PA_1 \text{ 的斜率为 } k_1 = \frac{y-0}{x-(-2)} = \frac{y}{x+2},$$

$$\text{直线 } PA_2 \text{ 的斜率为 } k_2 = \frac{y-0}{x-2} = \frac{y}{x-2},$$

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{y}{x+2} \cdot \frac{y}{x-2} = \frac{y^2}{x^2-4}.$$

$$\therefore \text{点 } P(x, y) \text{ 满足 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1,$$

$$\therefore x^2 + \frac{4y^2}{3} = 4, \text{ 即 } x^2 - 4 = -\frac{4y^2}{3},$$

$$\text{故 } k_1 \cdot k_2 = \frac{y^2}{-\frac{4}{3}y^2} = -\frac{3}{4}, k_1 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{k_2},$$

$$\therefore k_2 \in [-2, -1],$$

$$\therefore k_1 \in \left[\frac{3}{8}, \frac{3}{4}\right]. \text{ 故选 B.}]$$

1. A [椭圆 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$ 的半焦距 $c = \sqrt{10-6} = 2$, 则 C 的半焦

距 $c' = 2$. $\therefore C$ 的一条渐近线的方程为 $x - \sqrt{3}y = 0$, $\therefore$ 可设 C 的

方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = \lambda (\lambda \neq 0)$, 化为标准方程为 $\frac{x^2}{3\lambda} - \frac{y^2}{\lambda} = 1$. 当

$\lambda > 0$ 时, $c' = \sqrt{\lambda+3\lambda} = 2$, 得 $\lambda = 1$, 则 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 =$

1; 当 $\lambda < 0$ 时, $c' = \sqrt{-\lambda-3\lambda} = 2$, 得 $\lambda = -1$, 则 C 的方程为

$y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$. 综上, C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 或 $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$.]

2. C [因为 $|AP| + |AF_2| =$

$|AP| + |AF_1| - 2\sqrt{5}$, 所以要求

$|AP| + |AF_2|$ 的最小值, 只需求

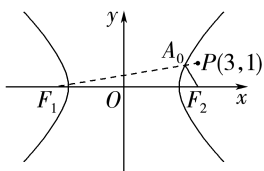
$|AP| + |AF_1|$ 的最小值. 如图, 连

接 F_1P 交双曲线的右支于点 A_0 .

当点 A 位于点 A_0 处时, $|AP| + |AF_1|$ 最小, 最小值为

$$|PF_1| = \sqrt{[3-(-3)]^2 + 1^2} = \sqrt{37}.$$

故 $|AP| + |AF_2|$ 的最小值为 $\sqrt{37} - 2\sqrt{5}$.]



3. 10 $\frac{7}{5}$ $y = \pm \frac{5\sqrt{6}}{12}x$ [双曲线 $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$ 中 $a = 5, b^2 =$

$$24, c^2 = 25 + 24 = 49,$$

$$\therefore \text{实轴长为 } 2a = 10, \text{ 离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{7}{5},$$

$$\text{渐近线方程为 } y = \pm \frac{5\sqrt{6}}{12}x.]$$

4. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ [因为 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0), \frac{x_0^2}{2} - y_0^2 = 1$, 所

$$\text{以 } \overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = (-\sqrt{3} - x_0, -y_0) \cdot (\sqrt{3} - x_0, -y_0) =$$

$$x_0^2 + y_0^2 - 3 < 0, \text{ 即 } 3y_0^2 - 1 < 0, \text{ 解得 } -\frac{\sqrt{3}}{3} < y_0 < \frac{\sqrt{3}}{3}.]$$

第 63 课时 抛物线

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1)相等 准线

$$\text{知识点 2 } x_0 + \frac{p}{2} = -y_0 + \frac{p}{2} \quad p - x_1 - x_2 = y_1 + y_2 + p$$

链教材·夯基固本

1. D [由题意知, 抛物线的准线方程为 $y = -1$, 所以由抛物线的定义知, 点 A 到抛物线焦点的距离为 5.

故选 D.]

2. D [抛物线 $y = 2x^2$ 的标准方程为 $x^2 = \frac{1}{2}y$, 所以焦点在 y

轴上, 由 $2p = \frac{1}{2}$, 所以焦点坐标为 $\left(0, \frac{1}{8}\right)$. 故选 D.]

3. AC [当抛物线的焦点在 x 轴上时,

设方程为 $y^2 = 2px (p > 0)$,

$$\therefore (-2\sqrt{2})^2 = 2p \times 2,$$

$$\text{解得 } p = 2, \therefore y^2 = 4x.$$

当抛物线的焦点在 y 轴上时,

设方程为 $x^2 = -2py (p > 0)$,

$$\therefore 2^2 = -2p \times (-2\sqrt{2}),$$

$$\text{解得 } p = \frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore x^2 = -\sqrt{2}y.]$$

4. $\frac{\sqrt{35}}{2}$ [设点 P 的坐标为 (x, y) ,

$$\text{则 } x^2 = -5y, \text{ 而且 } |PA|^2 = x^2 + (y+3)^2 = y^2 + y + 9 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{35}{4},$$

又因为 $y \leq 0$, 所以当 $y = -\frac{1}{2}$ 时,

$$|PA|_{\min}^2 = \frac{35}{4}.$$

因此所求最小值为 $\frac{\sqrt{35}}{2}$.

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 (1)ABC (2)(1,2) [(1)由题意得 $\frac{p}{2} = 2$, 则 $p = 4$, A 正确;

$$\text{设 } M(x_0, y_0), \text{ 则 } |MF| = x_0 + \frac{p}{2}, |OF| = \frac{p}{2},$$

又因为 $x_0 \geq 0$, 所以 $|MF| \geq |OF|$, B 正确;

由抛物线的定义知 M 到 F 的距离与 M 到 C 的准线的距离相等, 故以 M 为圆心且过 F 的圆与 C 的准线相切, C 正确;

当 $\angle OFM = 120^\circ$ 时, 不妨设 $M(x_0, y_0)$ 在第一象限, 则 $x_0 >$

$$2, y_0 > 0, \text{ 故 } k_{MF} = \frac{y_0}{x_0 - 2} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \text{ 即 } x_0 = \frac{y_0}{\sqrt{3}} + 2,$$

$$\text{又 } y_0^2 = 8x_0, \text{ 所以 } \sqrt{3}y_0^2 - 8y_0 - 16\sqrt{3} = 0,$$

$$\text{解得 } y_0 = 4\sqrt{3} \text{ 或 } y_0 = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (舍去),}$$

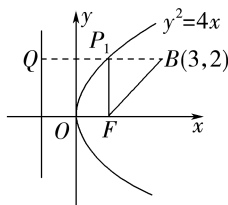
$$\text{所以 } S_{\triangle OFM} = \frac{1}{2} |OF| \times |y_0| = \frac{1}{2} \times 2 \times 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}, \text{ D 错误.}$$

(2)如图, 过点 B 作准线 $x = -1$ 的

垂线, 垂足为点 Q , 交抛物线于点 P_1 , 由抛物线定义, 知 $|P_1Q| = |P_1F|$.

则有 $|PB| + |PF| \geq |P_1B| + |P_1Q| = |BQ| = 4$, 当 B, P_1, Q 三

点共线时, $|PB| + |PF|$ 取最小值, 把 $y = 2$ 代入 $y^2 = 4x$, 得 $x = 1$, 所以当 $|PB| + |PF|$ 取最小值时, 点 P 的坐标为 $(1, 2)$.



母题探究

1. 解: 由题意可知点 $B(3, 4)$ 在抛物线的外部,

所以 $|PB| + |PF|$ 的最小值即为 B, F 两点间的距离,

$$\text{又 } F(1, 0), \text{ 所以 } |PB| + |PF| \geq |BF| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5},$$

即 $|PB| + |PF|$ 的最小值为 $2\sqrt{5}$.

2. 解: 由题意, 知抛物线的焦点为 $F(1, 0)$.

点 P 到 y 轴的距离 $d_1 = |PF| - 1$,

$$\text{所以 } d_1 + d_2 = d_2 + |PF| - 1.$$

易知 $d_2 + |PF|$ 的最小值为点 F 到直线 l 的距离,

$$\text{故 } d_2 + |PF| \text{ 的最小值为 } \frac{|1+5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 3\sqrt{2},$$

所以 $d_1 + d_2$ 的最小值为 $3\sqrt{2} - 1$.

考点二

典例 2 (1)B (2) $y^2 = -8x$ 或 $x^2 = -y$

[(1)以抛物线的顶点为坐标原点, 该碗轴截面的对称轴为 y 轴, 建立平面直角坐标系, 如图,

设该抛物线的方程为 $x^2 = 2py$

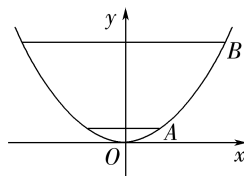
($p > 0$) (x, y 的单位均为 cm), 点

A 纵坐标为 h ,

则 $A(5, h), B(13, h+10)$,

$$\text{于是 } \begin{cases} 25 = 2ph, \\ 169 = 2p(h+10), \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} h = \frac{125}{72}, \\ p = \frac{36}{5}, \end{cases}$$



故该抛物线的焦点到准线的距离为 $\frac{36}{5} \text{ cm}$, 故选 B.

(2)由题意设抛物线方程为 $y^2 = -2px$ ($p > 0$) 或 $x^2 = -2py$ ($p > 0$). 将 $P(-2, -4)$ 代入, 分别得标准方程为 $y^2 = -8x$ 或 $x^2 = -y$.

多维变迁

1. D [抛物线 $y = ax^2$ 的标准方程为 $x^2 = \frac{1}{a}y$,

$$\text{其准线方程为 } y = -\frac{1}{4a},$$

$\therefore$ 点 $M(5, 3)$ 到抛物线 $y = ax^2$ 的准线的距离为 6,

$$\therefore 3 + \frac{1}{4a} = 6, \text{ 或 } -\frac{1}{4a} - 3 = 6,$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{12}, \text{ 或 } a = -\frac{1}{36},$$

故抛物线的标准方程是 $x^2 = 12y$ 或 $x^2 = -36y$,

故选 D.]

2. A [因为圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 与 y 轴交于 A, B 两点 (A 在 B 的上方), 所以 $A(0, 2), B(0, -2)$, 所以切线 l 的方程为 $y = -2$, 因为动点 P 到 A 的距离等于 P 到 l 的距离, 所以动点 P 的轨迹为抛物线, 且其焦点为 $(0, 2)$, 准线方程为 $y = -2$, 所以动点 P 的轨迹方程为 $x^2 = 8y$. 故选 A.]

考点三

典例 3 (1)AC (2)BD [(1)由抛物线 $\frac{1}{8}x^2 = y$, 即 $x^2 = 8y$,

可知抛物线开口向上, 焦点坐标为 $(0, 2)$, 焦点到准线的距离为 4, 准线方程为 $y = -2$. 故选 AC.

(2)由抛物线 $y^2 = 8x$, 可得焦点为 $F(2, 0)$, 故 A 错误;

由抛物线的性质可得 $|AB| = |AF| + |BF| = x_1 + 2 + x_2 + 2 = x_1 + x_2 + 4$, 故 B 正确;

法一: 易知直线 AB 的斜率不为 0, 设直线 AB 的方程为 $x = my + 2$, 与抛物线的方程联立, 可得 $y^2 - 8my - 16 = 0$, $\Delta > 0$,

$$\text{则 } y_1 + y_2 = 8m, y_1 y_2 = -16,$$

$$\frac{1}{|FA|} + \frac{1}{|FB|} = \frac{1}{x_1 + 2} + \frac{1}{x_2 + 2}$$

$$= \frac{1}{\frac{y_1^2}{8} + 2} + \frac{1}{\frac{y_2^2}{8} + 2} = \frac{8}{y_1^2 + 16} + \frac{8}{y_2^2 + 16}$$

$$= \frac{8y_1^2 + 8 \times 16 + 8y_2^2 + 8 \times 16}{y_1^2 y_2^2 + 16y_1^2 + 16y_2^2 + 16^2}$$

$$= \frac{8(y_1 + y_2)^2 - 16y_1 y_2 + 16^2}{(y_1 y_2)^2 + 16(y_1 + y_2)^2 - 32y_1 y_2 + 16^2}$$

$$= \frac{8 \times (8m)^2 + 16^2 + 16^2}{16^2 + 16 \times (8m)^2 + 32 \times 16 + 16^2}$$

$$= \frac{1}{2}, \text{故 C 错误, D 正确.}$$

法二: 因为 $p=4$, 所以 $y_1 y_2 = -p^2 = -16$,

$$\frac{1}{|FA|} + \frac{1}{|FB|} = \frac{2}{p} = \frac{1}{2},$$

故 C 错误, D 正确.]

多维变迁

1. B [如图, F 为抛物线的焦点, m 为准线. 作 $AC \perp m$ 于点 C , $PN \perp m$ 于点 N , $BD \perp m$ 于点 D , 连接 AF, BF .
由抛物线定义, 知 $2|PN| = |AC| + |BD| = |AF| + |BF| \geq |AB| = 6$, 所以 $|PN| \geq 3$, 当且仅当点 F 在线段 AB 上时, 等号成立.

故 y_0 的最小值为 2. 故选 B.]

2. 3 [由题意得焦点 $F(1, 0)$, 易知直线 l 的斜率不为 0, 设直线 l 的方程为 $x = \lambda y + 1 (\lambda \neq 0)$,
代入抛物线方程得 $y^2 - 4\lambda y - 4 = 0, \Delta > 0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

由根与系数的关系得 $y_1 y_2 = -4$, ①

由 $\overrightarrow{AF} = t\overrightarrow{FB}$, 即 $(1 - x_1, -y_1) = t(x_2 - 1, y_2)$,

有 $y_1 = -ty_2$, ②

$\therefore$ 由①②得 $y_2 = \frac{2}{\sqrt{t}}, y_1 = -2\sqrt{t}$ 或 $y_2 = -\frac{2}{\sqrt{t}}, y_1 = 2\sqrt{t}$, 即

$$x_1 = t, x_2 = \frac{1}{t},$$

$$\therefore |AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{1}{t} + t + 2 = \frac{16}{3},$$

化简得 $3t^2 - 10t + 3 = 0$,

$$\therefore t = 3 \text{ 或 } t = \frac{1}{3} (\text{舍}).]$$

教材拓展 14

典例 4 (1) D [由已知得线段 AC 是动圆的直径,

故 $AB \perp CB$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$,

因为 $A(0, 5), B(x, 0), C(0, y)$,

所以 $\overrightarrow{AB} = (x, -5), \overrightarrow{CB} = (x, -y)$,

所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = x^2 + 5y = 0$,

可得 $x^2 = -5y$,

又 B, C 不重合, 所以原点除外,

所以点 M 的轨迹方程为 $x^2 = -5y (y \neq 0)$.

故选 D.]

(2) 解: (i) 由动点 $P(x, y)$ 满足 $2|OP| = |PA|$, 得
 $2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-6)^2 + y^2}$, 化简得 $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$,
所以动点 P 的轨迹方程是 $(x+2)^2 + y^2 = 16$.

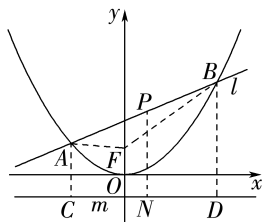
(ii) 设点 $M(x_0, y_0)$, 由 $PQ \perp y$ 轴于点 Q , 且 M 是 PQ 中点,

得 $P(2x_0, y_0)$, 即 $\begin{cases} x = 2x_0, \\ y = y_0. \end{cases}$

由(i)知 $(x+2)^2 + y^2 = 16$,

$$\text{因此 } (2x_0 + 2)^2 + y_0^2 = 16, \text{ 整理得 } \frac{(x_0 + 1)^2}{4} + \frac{y_0^2}{16} = 1.$$

$$\text{所以点 } M \text{ 的轨迹方程是 } \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1.$$



随堂·对点检测

1. D [因为抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 $F(0, \frac{p}{2})$, A 为抛物线上一点, 设 $A(x_0, y_0)$,

$$\text{可得 } |AF| = y_0 + \frac{p}{2},$$

又 A 到 x 轴的距离为 2, $\therefore y_0 = 2$, 则 $|AF| = 2 + \frac{p}{2} = 4$, 即

$$p = 4,$$

故抛物线方程为 $x^2 = 8y$,

将 $y_0 = 2$ 代入抛物线方程得 $x_0 = \pm 4$, 不妨令 $A(4, 2)$,

则 A 到原点的距离为 $\sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{5}$.

故选 D.]

2. B [抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 准线方程为 $x = -1$.
根据题意可得 $|PQ| = |PF| + |QF| = x_1 + 1 + x_2 + 1 = x_1 + x_2 + 2 = 8$. 故选 B.]

3. (4, 0) [由题意, 知 $p = 8$, 则 $\frac{p}{2} = 4$, 所以抛物线 $y^2 = 16x$ 的焦点坐标为 (4, 0).]

4. $y^2 = 8x$ [由题意得 $F(\frac{p}{2}, 0)$, $A(0, 2)$, 准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$,

$$\therefore \text{直线 } FQ \text{ 的方程为 } y = -\frac{4}{p}x + 2,$$

$$\therefore Q(-\frac{p}{2}, 4),$$

$$\text{把 } y = 4 \text{ 代入 } y^2 = 2px \text{ 可得 } x = \frac{8}{p}.$$

$$\therefore |PQ| = \frac{8}{p} + \frac{p}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle PQF} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{8}{p} + \frac{p}{2}\right) \times 4 = 8,$$

解得 $p = 4$.

$\therefore$ 抛物线方程为 $y^2 = 8x$.]

第 64 课时 直线与圆锥曲线

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) 相交 相切 相离 (2) 相交 相切 相离 渐近线 对称轴

$$\text{知识点 2 } \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| \quad \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} |y_1 - y_2|$$

$$\text{知识点 3 } (2) \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$$

链教材·夯基固本

1. C [由 $\begin{cases} y = kx + 2, \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases}$ 得 $(2+3k^2)x^2 + 12kx + 6 = 0$,

$$\text{由题意知 } \Delta = (12k)^2 - 4 \times 6 \times (2+3k^2) = 0,$$

$$\text{解得 } k = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

故选 C.]

2. $\frac{8\sqrt{2}}{7}$ [在 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 中, $a^2 = 2, b^2 = 1$,

所以 $c^2 = a^2 - b^2 = 1$, 即 $c = 1$,

故左焦点为 $F_1(-1, 0)$, 而 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$,

故直线 l 的方程为 $y = \sqrt{3}(x+1)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = \sqrt{3}(x+1), \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得 } 7x^2 + 12x + 4 = 0,$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由根与系数的关系得 $x_1 + x_2 = -\frac{12}{7}, x_1 x_2 = \frac{4}{7}$.

则由弦长公式得 $|AB| = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{12}{7}\right)^2 - 4 \times \frac{4}{7}} = \frac{8\sqrt{2}}{7}$.

3. D [设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $\therefore$ 点 A, B 是双曲线 C 上的两点, $\therefore \frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{3} = 1, \frac{x_2^2}{2} - \frac{y_2^2}{3} = 1$, 两式相减得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{2} = \frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{3}$, $\therefore M(3, 2)$ 是线段 AB 的中点, $\therefore x_1+x_2=6, y_1+y_2=4$, $\therefore \frac{6(x_1-x_2)}{2} = \frac{4(y_1-y_2)}{3}$, $\therefore k_{AB} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{9}{4}$. 经验证 $\Delta > 0$, 符合题意, 故选 D.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 解: (1) 由题意得 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$,

可得 $a=3, b=4, c=5$,

故顶点坐标为 $(\pm 3, 0)$, 焦点坐标为 $(\pm 5, 0)$, 离心率为 $e =$

$\frac{c}{a} = \frac{5}{3}$, 渐近线方程为 $y = \pm \frac{4}{3}x$.

$$(2) \text{ 联立 } \begin{cases} 16x^2 - 9y^2 = 144, \\ y = kx + 1, \end{cases}$$

消去 y 得 $(16-9k^2)x^2 - 18kx - 153 = 0$. (*)

① 当 $16-9k^2=0$ 或 $\Delta = (-18k)^2 - 4 \times (16-9k^2) \times (-153) = 0$,

即 $k = \pm \frac{4}{3}$ 或 $k = \pm \frac{\sqrt{17}}{3}$ 时, 直线 l 与双曲线只有一个公共点.

② 当 $16-9k^2 \neq 0, \Delta = (-18k)^2 - 4 \times (16-9k^2) \times (-153) >$

0 , 即 $-\frac{\sqrt{17}}{3} < k < \frac{\sqrt{17}}{3}$ 且 $k \neq \pm \frac{4}{3}$ 时, 方程 (*) 有两个不同

的实数根, 可知原方程组有两组不同的实数解.

直线 l 与双曲线有两个不同的公共点.

③ 当 $\Delta = (-18k)^2 - 4 \times (16-9k^2) \times (-153) < 0$, 即 $k <$

$-\frac{\sqrt{17}}{3}$ 或 $k > \frac{\sqrt{17}}{3}$ 时, 方程 (*) 没有实数根, 可知原方程组

没有实数解, 直线 l 与双曲线没有公共点.

多维变迁

1. A [由于过 M 且与抛物线 C 仅有一个公共点的直线有 3 条, 则当直线的斜率不存在时符合题意, 此时直线方程为 $x=m$;

当直线的斜率存在时, 设直线方程为 $y-1=k(x-m)$,

$$\text{则 } \begin{cases} y-1=k(x-m), \\ x^2=y, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 整理得}$$

$$x^2 - kx + km - 1 = 0,$$

所以 $\Delta = 0$, 即关于 k 的方程 $k^2 - 4km + 4 = 0$ 有两个不同的解,

所以 $\Delta_1 > 0$ 即 $16m^2 - 16 > 0$, 解得 $m < -1$ 或 $m > 1$,

所以“ $m > 1$ ”是“过 M 且与抛物线 C 仅有一个公共点的直线有 3 条”的充分条件, 故选 A.]

2. 解: 将直线 l 的方程与椭圆 C 的方程联立, 得方程

$$\text{组 } \begin{cases} y = 2x + m, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases} \text{ ②}$$

将①代入②, 整理得 $9x^2 + 8mx + 2m^2 - 4 = 0$. ③

方程③的根的判别式 $\Delta = (8m)^2 - 4 \times 9 \times (2m^2 - 4) = -8m^2 + 144$.

(1) 当 $\Delta > 0$, 即 $-3\sqrt{2} < m < 3\sqrt{2}$ 时, 方程③有两个不同的实数根, 可知原方程组有两组不同的实数解.

这时直线 l 与椭圆 C 有两个不同的公共点.

(2) 当 $\Delta = 0$, 即 $m = \pm 3\sqrt{2}$ 时, 方程③有两个相同的实数根, 可知原方程组有两组相同的实数解.

这时直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点.

(3) 当 $\Delta < 0$, 即 $m < -3\sqrt{2}$ 或 $m > 3\sqrt{2}$ 时, 方程③没有实数根, 可知原方程组没有实数解.

这时直线 l 与椭圆 C 没有公共点.

考点二

典例 2 解: (1) 设 C 的半焦距为 $c(c > 0)$.

$$\text{由题意得 } \begin{cases} 2 \times \frac{1}{2} \times 2a \times b = 8\sqrt{2}, \\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = 2\sqrt{2}, \\ b = 2, \\ c = 2, \end{cases}$$

$\therefore C$ 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ 2x - y + 1 = 0, \end{cases}$$

消去 y 并化简得 $9x^2 + 8x - 6 = 0$,

$$\Delta = 8^2 - 4 \times 9 \times (-6) = 280 > 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{8}{9}, x_1 x_2 = -\frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} \therefore |MN| &= \sqrt{1+2^2} |x_1 - x_2| \\ &= \sqrt{5} \times \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \\ &= \sqrt{5} \times \sqrt{\left(-\frac{8}{9}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{2}{3}\right)} \\ &= \frac{10\sqrt{14}}{9}. \end{aligned}$$

多维变迁

解: (1) 由题意可知, $2a=4$, 则 $a=2$,

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore c = \sqrt{3},$$

$$\therefore b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1,$$

$$\therefore \text{椭圆 } C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

(2) 由(1)可得 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$,

$$\therefore \text{直线 } l: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1,$$

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, \end{cases}$$

消去 y 得 $7x^2 - 8\sqrt{3}x = 0$,

解得 $x=0$ 或 $x=\frac{8\sqrt{3}}{7}$,不妨设 $P(0,1), Q(\frac{8\sqrt{3}}{7}, -\frac{1}{7})$,

$$\text{所以 } |PQ| = \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{7}\right)^2 + \left(-\frac{1}{7} - 1\right)^2} = \frac{16}{7},$$

$$\text{又点 } F_1 \text{ 到直线 } PQ \text{ 的距离 } d = \frac{\left| -\frac{\sqrt{3}}{3} \times (-\sqrt{3}) + 1 \right|}{\sqrt{1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}} =$$

$$\frac{\frac{2}{2\sqrt{3}}}{\frac{3}{3}} = \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle F_1 PQ} = \frac{1}{2} |PQ| \cdot d = \frac{1}{2} \times \frac{16}{7} \times \sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{7}.$$

微点突破 12

典例 3 D [联立双曲线与直线的方程,

得 $x^2 - 2x - 3 = 0, \Delta = 16$, 又 $k=1, a=1$,

由弦长的万能公式, 知 $|MN| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 4\sqrt{2}$. 故选 D.]

考点三

典例 4 A [设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{代入椭圆方程可得} \begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \end{cases}$$

两式作差可得,

$$\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{a^2} + \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{b^2} = 0,$$

又线段 AB 的中点坐标为 $(1, -1)$, 所以 $x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = -2$,

$$\text{则 } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{b^2}{a^2}, \text{ 又直线 } AB \text{ 的斜率为 } k_{AB} = \frac{-1 - 0}{1 - 3} = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}, \text{ 而 } a^2 - b^2 = c^2 = 9,$$

所以 $a^2 = 18, b^2 = 9$, 所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$. 故选 A.]

多维变迁

1. A [∵ 焦点到准线的距离为 p , 则 $p=1$,

∴ $y^2 = 2x$. 设点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } \begin{cases} y_1^2 = 2x_1, \\ y_2^2 = 2x_2, \end{cases} \text{ 两式相减可得 } (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 2(x_1 - x_2),$$

$$\therefore k_{PQ} = \frac{2}{y_1 + y_2}, \text{ 又 } \because P, Q \text{ 关于直线 } l \text{ 对称},$$

$$\therefore k_{PQ} = -1, \text{ 即 } y_1 + y_2 = -2,$$

$$\therefore \text{线段 } PQ \text{ 中点的纵坐标为 } \frac{y_1 + y_2}{2} = -1,$$

又∵ 线段 PQ 的中点在直线 l 上,

∴ 线段 PQ 中点的横坐标为 $-1 + 2 = 1$.

∴ 线段 PQ 的中点坐标为 $(1, -1)$. 故选 A.]

2. $x + 2y - 3 = 0$ [法一: 易知此弦所在直线的斜率存在,

设斜率为 k , 弦所在的直线与椭圆相交于 A, B 两点,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{2} = 1, \text{ ①}$$

$$\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{2} = 1, \text{ ②}$$

由 ① - ② 得

$$\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{4} + \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{2}$$

$$= 0.$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = 2,$$

$$\therefore \frac{x_1 - x_2}{2} + y_1 - y_2 = 0.$$

$$\text{又 } x_2 - x_1 \neq 0, \therefore k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{2}.$$

经检验, $k = -\frac{1}{2}$ 满足题意.

$$\therefore \text{此弦所在的直线方程为 } y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1),$$

即 $x + 2y - 3 = 0$.

法二: 利用结论

$$k = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} = -\frac{2}{4} \times \frac{1}{1} = -\frac{1}{2}, \therefore \text{此弦所在的直线方程为}$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1),$$

即 $x + 2y - 3 = 0$.]

课堂·对点检测

1. A [直线 $y = kx - k + 1 = k(x - 1) + 1$ 恒过定点 $(1, 1)$, 又点

$(1, 1)$ 在椭圆内部,

故直线与椭圆相交.]

2. C [由题意, 得 $a^2 = 4, b^2 = 1$, 所以 $c^2 = 3$,

所以椭圆右焦点的坐标为 $(\sqrt{3}, 0)$,

则直线 l 的方程为 $y = x - \sqrt{3}$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = x - \sqrt{3}, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得 } 5x^2 - 8\sqrt{3}x + 8 = 0,$$

$$\Delta = (-8\sqrt{3})^2 - 4 \times 5 \times 8 = 32 > 0,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{8\sqrt{3}}{5}, x_1 x_2 = \frac{8}{5},$$

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{5}\right)^2 - 4 \times \frac{8}{5}} = \frac{8}{5}.$$

$$\text{即弦 } AB \text{ 的长为 } \frac{8}{5}.]$$

3. $\sqrt{3} - 1$ [由题意知直线 l 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y = kx + 1$,

$$\text{联立} \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{2} = 1, \\ y = kx + 1, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并整理得 } (2 - k^2) \cdot x^2 - 2kx - 3 = 0.$$

显然 $2 - k^2 \neq 0$, 设 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 由 $\Delta = 24 - 8k^2 > 0$, 得 $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{2k}{2 - k^2} = 1$, 解得 $k =$

$-1 \pm \sqrt{3}$, 所以 $k = -1 + \sqrt{3}$.]

典例 (1) $2a - 2\sqrt{2}$ (2) $\frac{8k}{1+2k^2} - \frac{4}{1+2k^2} - \frac{3}{2} - \sqrt{5}$

第九章 统计与成对数据的统计分析

第 65 课时 随机抽样、统计图表

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 总体 个体 样本 样本容量

知识点 2 (1)逐个不放回 (2)相等 (3)随机数法

知识点 3 (1)简单随机 合在一起 层

$$(2) \frac{n_1}{n_1+n_2} \bar{x}_1 + \frac{n_2}{n_1+n_2} \bar{x}_2 - \frac{n_1}{n_1+n_2} [s_1^2 + (\bar{x}_1 - \bar{x})^2] + \frac{n_2}{n_1+n_2} [s_2^2 + (\bar{x}_2 - \bar{x})^2]$$

链教材·夯基固本

1. B [对于 A, 总体指的是该市参加升学考试的全体学生的数学成绩, 故 A 错误; 对于 B, 样本是指 1 000 名学生的数学成绩, 故 B 正确; 对于 C, 样本量是 1 000, 故 C 错误; 对于 D, 个体指的是每名学生的数学成绩, 故 D 错误. 故选 B.]

2. 解: (1) 该抽样过程中编号为 1~75 每个被抽中的概率相等, 故该过程是简单随机抽样.

(2) 该过程中, 编号为 1~24, 75, 25~74 被抽中的可能性不同, 故不是简单随机抽样.

(3) 该过程中, 每个编号被抽中的可能性相同, 故该过程是简单随机抽样.

3. 120, 110, 90 [小学生、初中生、高中生人数的比例为 12 000 : 11 000 : 9 000 = 12 : 11 : 9,

故抽取人数分别为 $320 \times \frac{12}{12+11+9} = 120$, $320 \times$

$\frac{11}{12+11+9} = 110$, $320 \times \frac{9}{12+11+9} = 90$.]

4. CD [加班费与包装费同为 8%, 故相同;

工人支出包括基本工资、加班费和奖金, 占比为 18% + 8% + 11% = 37%, 不到 40%. 故选 CD.]

5. (1) 0.004 4 (2) 70 [(1) 由 $(0.002 4 + 0.003 6 + 0.006 0 + x + 0.002 4 + 0.001 2) \times 50 = 1$,

解得 $x = 0.004 4$.

(2) 用电量落在区间 [100, 250] 内的频率为

$(0.003 6 + 0.006 0 + 0.004 4) \times 50 = 0.7$,

故在被调查的用户中, 用电量落在区间 [100, 250] 内的户数为 $100 \times 0.7 = 70$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1) C (2) D (3) ABD [(1) 找到第 1 行第 6 列的数开始向右读,

符合条件的第一个数是 394, 第二个数是 435, 第三个数是 482, 第四个数是 173. 故选 C.

(2) $m+n$ 名学生的平均成绩为 74 分, 其中 m 名初中生的平均成绩为 72 分, n 名高中生的平均成绩为 x 分,

$$\begin{cases} \frac{m}{n} = \frac{600}{200}, \\ \frac{72m + nx}{m+n} = 74, \end{cases} \quad \text{解得 } x = 80.$$

故选 D.

(3) 由题意得, 抽取的样本里男生有 $\frac{3}{3+2} \times 100 = 60$ (人), A 正确;

每一位学生被抽中的可能性为 $\frac{100}{1\ 500} = \frac{1}{15}$, B 正确;

该学校学生身高的平均数

$$\bar{w} = \frac{3 \times 170 + 2 \times 160}{5} = 166, \text{C 错误;}$$

该学校学生身高的方差 $s^2 = \frac{3}{5} \times [12 + (170 - 166)^2] + \frac{2}{5} \times [38 + (160 - 166)^2] = 46.4$, D 正确.

故选 ABD.]

多维变迁

1. B [因为高一年级有男生 160 人, 女生 120 人, 抽取男生 16 人,

所以抽取比例为 $\frac{16}{160} = \frac{1}{10}$,

所以抽取人数为 $(160 + 120) \times \frac{1}{10} = 28$.

故选 B.]

2. 166 45 [对题中数据分析可得,

项目	人数	平均数	方差
男生	30	170	15
女生	20	160	30

则估计该校高一年级全体学生身高数据的平均数 $\bar{x} = \frac{30}{50} \times$

$170 + \frac{20}{50} \times 160 = 166$,

方差 $s^2 = \frac{30}{50} \times [(170 - 166)^2 + 15] + \frac{20}{50} \times [(160 - 166)^2 + 30] = 45$.]

考点二

典例 2 (1) ACD (2) D [(1) 由扇形图可知青年人占比 45%, 是老年人占比 20% 的 2 倍多, 故 A 正确;

其中满意的青年人占总人数的 $0.45 \times 0.4 \times 100\% = 18\%$, 满意的中年人占总人数的 $(1 - 0.45 - 0.2) \times 0.7 \times 100\% = 24.5\%$, 满意的老年人占总人数的 $0.2 \times 0.8 \times 100\% = 16\%$, 故 B 错误, C 正确;

总满意率为 $18\% + 24.5\% + 16\% = 58.5\% > 50\%$, 故 D 正确. 故选 ACD.

(2) 对于 A, 由游客人数折线图可知, 乙景点的 7, 8, 9 月份的总游客人数为 $33 + 44 + 53 = 130$,

甲景点 7, 8, 9 月份的总游客人数为 $30 + 52 + 47 = 129$, $129 < 130$, A 正确;

对于 B, 根据乙景点的游客人数折线图可知, 乙景点每月的游客人数逐月增多, 所以总体呈上升趋势, B 正确;

对于 C, 甲景点游客人数的平均数为 $\frac{1}{6} (14 + 21 + 26 + 30 + 52 + 47) \approx 31.7$, $31.7 \in [31, 32]$, C 正确;

对于 D, 由游客人数折线图可知, 乙景点 4 月到 9 月中游客量的最高峰期在 9 月, 甲景点 4 月到 9 月中游客量的最高峰期在 8 月, D 错误.

故选 D.]

多维变迁

ABD [对于 A,由题图可知,2020—2024 年快递业务量逐年上升,故 A 正确;

对于 B,2020—2024 年快递业务量的极差为 $132.0-63.5=68.5$ (亿件),故 B 正确;

对于 C,增长率从小到大排序,

即 $2.1\%,19.4\%,25.3\%,29.9\%,31.3\%$,

则中位数为 25.3% ,故 C 错误;

对于 D,由 $\frac{1}{5} \times (2.1\%+19.4\%+25.3\%+29.9\%+31.3\%)=21.6\%$,故 D 正确.故选 ABD.]

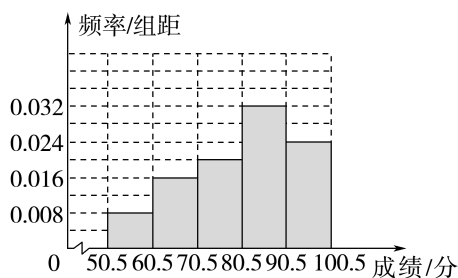
考点三

典例 3 解:(1)因为 $50 \times 0.16=8$, $\frac{10}{50}=0.2$, $50-(4+8+10+16)=12$, $\frac{12}{50}=0.24$,且所有频率和为 1,

据此补全频率分布表,如表所示.

分组	频数	频率
50.5~60.5	4	0.08
60.5~70.5	8	0.16
70.5~80.5	10	0.2
80.5~90.5	16	0.32
90.5~100.5	12	0.24
合计	50	1

(2)根据(1)中数据可得频率分布直方图,如图所示.



(3)由题意可知,成绩在 $75.5 \sim 85.5$ 频率为 $\frac{0.2+0.32}{2}=0.26$,

估计获得二等奖的学生人数为 $900 \times 0.26=234$.

多维变迁

1. 300 [由频率分布直方图可知,在区间 $[50,75)$ 内的频率为 $0.004 \times 25=0.1$,

所以 $n=\frac{30}{0.1}=300$.]

2. 5 [根据频率分布直方图可得 $(a+0.020+0.030+0.025+0.020) \times 10=1$,

则 $a=0.005$,

所以成绩在 $[50,60)$ 的频率为 $0.005 \times 10=0.05$,

则成绩在 $[50,60)$ 之间的学生人数为 $100 \times 0.05=5$.]

随堂·对点检测

1. **A** [由题意知,依次选出的编号为 14,05,11,09,所以第 4 个编号为 09.

故选 A.]

2. **B** [对于选项 A,由条形图可知丁险种参保比例为 $1-0.3-0.1-0.04-0.02=0.54>0.5$,超过五成,故 A 正确;

对于选项 B,41 岁以上参保人数占比为 $35\%+10\%=45\%$,故 B 错误;

对于选项 C,令样本容量为 m ,由扇形图与折线图可知 $18 \sim 29$ 周岁人群参保人数占比 15% ,人均参保费用在 $(3\ 000, 4\ 000)$ 内,总参保费用小于 $0.15m \times 4\ 000=600m$,而 54 周岁及以上人群参保比例虽然为 10% ,但人均参保费用为 6 000 元,总参保费用约为 $0.1m \times 6\ 000=600m$,显然其他年龄段总参保费用也大于 $600m$,所以 $18 \sim 29$ 周岁人群参保的总费用最少,故 C 正确;

对于选项 D,人均参保费用约 $15\% \times 4\ 000+40\% \times 4\ 000+35\% \times 5\ 500+10\% \times 6\ 000=4\ 725$,故 D 正确.故选 B.]

3. **BD** [$\because (a+c+0.025+0.035+2b) \times 10=1$,又 $a+c=2b$, $\therefore 4b+0.06=0.1$, $\therefore b=0.01$, $\therefore$ B 正确;

又成绩在 $[90,100]$ 内的有 5 人,

$\therefore n=\frac{5}{0.01 \times 10}=50$, $\therefore$ D 正确;

$\because$ 无法分别求出 a, c , $\therefore$ A, C 错误.

故选 BD.]

4. 16 12 [田径队运动员的总人数是 $56+42=98$,要得到容量为 28 的样本,占总体的比例为 $\frac{2}{7}$,于是应该在男运动员中随机抽取 $56 \times \frac{2}{7}=16$ (名),在女运动员中随机抽取 $42 \times \frac{2}{7}=12$ (名).]

第 66 课时 用样本估计总体

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1)小于或等于 $(100-p)\%$

(2) j 平均数 (3)第一 下 第三 上

知识点 2 (1)最多 (2)中间 平均值

(3) $\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 平均数 中位数 众数

知识点 3 (1) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

链教材·夯基固本

1. **B** [因为 7 次训练的成绩从小到大排列为 85,86,87,88,88,89,90,且 $7 \times 80\%=5.6$,所以第 80 百分位数为从小到大排列的数据中的第 6 个数据,即 89.故选 B.]

2. **D** [由样本的数字特征与总体的数字特征的关系,可知全市居民用户日用电量的平均数约为 $5.5 \text{ kW} \cdot \text{h}$.]

3. **C** [方差刻画一组数据的集中程度或稳定性. 故选 C.]

4. 乙 [甲机床的平均数 $\bar{x}_甲 = \frac{0+1+0+\cdots+4}{10}=1.5$,

标准差 $s_甲 = \sqrt{\frac{1}{10}[(0-1.5)^2+(1-1.5)^2+\cdots+(4-1.5)^2]}$
 ≈ 1.28 ;

乙机床的平均数 $\bar{x}_乙 = \frac{2+3+\cdots+1}{10}=1.2$,标准差 $s_乙$

$= \sqrt{\frac{1}{10}[(2-1.2)^2+(3-1.2)^2+\cdots+(1-1.2)^2]}$

≈ 0.87 .比较发现乙机床的平均数较小而且标准差也较小,说明乙机床生产的次品数比甲机床生产的次品数少,而且更为稳定,所以乙机床的性能更好.]

5.2 [设数据 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 的方差为 s^2 , 则数据 $3x_1 - 2, 3x_2 - 2, \dots, 3x_{10} - 2$ 的方差为 $9s^2$, 由题可知 $9s^2 = 18$, 解得 $s^2 = 2$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1)C (2)B [(1)已知数据 16, 21, 18, 28, 14, 20, 22, 24,

则从小到大排列为 14, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 28,

又 $8 \times 75\% = 6$, 所以第 75 百分位数为 $\frac{22+24}{2} = 23$. 故选 C.

(2)由于 $2 \times (0.05 + 0.1) = 0.3$, $2 \times (0.05 + 0.1 + 0.2) = 0.7$,

所以样本数据的第 60 百分位数的估计值是 $6 + \frac{0.6-0.3}{0.2 \times 2} \times 2 = 7.5$. 故选 B.]

多维变迁

1. C [已知数据 6, 9, 5, 8, 4, m 的 75% 分位数是 8, 由题可知数据的总个数为 $6 \times 75\% = 4.5$, 所以该组数据的 75% 分位数是这组数据从小到大排列后的第 5 个数据,

则 $m \leq 8$, 即实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 8]$.

故选 C.]

2. D [根据题意, 设该组数据的第 60 百分位数为 x ,

第一组的频率为 $0.010 \times 10 = 0.1$,

第二组的频率为 $0.015 \times 10 = 0.15$,

第三组的频率为 $0.020 \times 10 = 0.2$,

第四组的频率为 $0.030 \times 10 = 0.3$,

则 x 在第四组, 则 $0.1 + 0.15 + 0.2 + (x - 80) \times 0.03 = 0.6$, 解得 $x = 85$.

故估计学生对食堂用餐质量的评分的第 60 百分位数为 85.

故选 D.]

考点二

考向 1 典例 2 ABD [对于 A, 平均数为 $\frac{1}{8}(26 + 29 + 27 + 29 + 26 + 29 + 31 + 33) = 28.75$,

故 A 正确;

对于 B, 29 在该组数据中出现的次数最多, 故众数为 29, 故 B 正确;

对于 C, 中位数为该组数据从小到大排列后的第四个数与第五个数的平均数, 即为 $\frac{29+29}{2} = 29$, 故 C 错误;

对于 D, 连续 8 天的最高气温从小到大排列为 26, 26, 27, 29, 29, 29, 31, 33,

因为 $8 \times 0.8 = 6.4$, 所以第 80 百分位数为从小到大排列后的第 7 个数, 即为 31, 故 D 正确. 故选 ABD.]

多维变迁

1. A [因为这组数据按从小到大排列为 2, 4, 6, a , 13, 14,

所以中位数为 $\frac{6+a}{2}$,

由 $6 \times 60\% = 3.6$, 得这组数据的第 60 百分位数为 a ,

所以 $\frac{6+a}{2} = a$, 解得 $a = 6$.

所以这组数据的平均数为

$$\frac{2+4+6+6+13+14}{6} = 7.5.$$

故选 A.]

2. D [∵ 数据 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 的平均数为 5,

数据 $y_1, y_2, \dots, y_8$ 的平均数为 6,

∴ 由加权平均数公式得数据 $x_1, x_2, \dots, x_{10}, y_1, y_2, \dots, y_8$ 的平均数为

$$\bar{z} = \frac{1}{10+8}(10 \times 5 + 8 \times 6) = \frac{49}{9}.$$

故选 D.]

考向 2 典例 3 解: (1) 因为第三、四、五组的频率之和为 0.7,

所以 $(0.045 + 0.020 + a) \times 10 = 0.7$, 解得 $a = 0.005$,

所以前两组的频率之和为 $1 - 0.7 = 0.3$, 即 $(a + b) \times 10 = 0.3$, 所以 $b = 0.025$.

(2) 由样本的频率分布直方图,

$$\text{得众数为 } \frac{65+75}{2} = 70,$$

平均数为 $50 \times 0.05 + 60 \times 0.25 + 70 \times 0.45 + 80 \times 0.2 + 90 \times 0.05 = 69.5$,

前两组频率和: $0.05 + 0.25 = 0.3 < 0.5$, 前三组频率和: $0.3 + 0.45 = 0.75 > 0.5$,

因此, 中位数在第三组 $[65, 75)$ 内, 设中位数为 x , 则 $0.3 + 0.045 \times (x - 65) = 0.5$, 解得 $x \approx 69.4$.

则这 100 名候选者的众数、平均数和中位数分别约为 70 分、69.5 分和 69.4 分.

多维变迁

ABC [A 选项, 由频率分布直方图知 $[70, 80)$ 对应矩形最高, 即频率最大, 故成绩在 $[70, 80)$ 内的考生人数最多, A 选项正确;

B 选项, 由 $0.01 \times 10 = 0.1 < 0.2 < (0.01 + 0.015) \times 10 = 0.25$, 故成绩的第 80 百分位数在区间 $[80, 90)$ 内, 设为 x , 则 $0.1 + (90 - x) \times 0.015 = 0.2$, 可得 $x \approx 83.3$ 分, B 选项正确;

C 选项, 由题图知, 平均分为 $0.1 \times 45 + 0.15 \times 55 + 0.2 \times 65 + 0.3 \times 75 + 0.15 \times 85 + 0.1 \times 95 = 70.5$, C 选项正确;

D 选项, 由 $(0.01 + 0.015 + 0.02) \times 10 = 0.45 < 0.5 < (0.01 + 0.015 + 0.02 + 0.03) \times 10 = 0.75$,

所以中位数位于区间 $[70, 80)$, 设为 y , 则 $0.5 - 0.45 = (y - 70) \times 0.03$, 可得 $y \approx 71.7$ 分, D 选项错误.

故选 ABC.]

考点三

典例 4 解: (1) 由题意, 求出 z_i 的值如表所示,

试验 序号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_i	9	6	8	-8	15	11	19	18	20	12

$$\text{则 } \bar{z} = \frac{1}{10} \times (9 + 6 + 8 - 8 + 15 + 11 + 19 + 18 + 20 + 12) = 11,$$

$$s^2 = \frac{1}{10} \times [(9-11)^2 + (6-11)^2 + (8-11)^2 + (-8-11)^2 + (15-11)^2 + (11-11)^2 + (19-11)^2 + (18-11)^2 + (20-11)^2 + (12-11)^2] = 61.$$

$$(2) \text{ 因为 } 2\sqrt{\frac{s^2}{10}} = 2\sqrt{6.1} = \sqrt{24.4}, \bar{z} = 11 = \sqrt{121}$$

$$> \sqrt{24.4},$$

所以可认为甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率有显著提高.

多维变迁

1. C [因为样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的方差为 4,

所以数据 $3x_1+1, 3x_2+1, \dots, 3x_n+1$ 的方差为 $3^2 \times 4 = 36$,

故标准差为 $\sqrt{36} = 6$.

故选 C.]

2. D [一组样本数据 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ ($x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{10}$) 的平均数为 2,

则 $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{10} = 2 \times 10 = 20$,

则新样本数据的平均数为

$$\frac{2 \times 2 + x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{10}}{12} = \frac{4 + 20}{12} = 2,$$

所以新样本数据的方差为 $\frac{1}{12}[(2-2)^2 + \dots + (x_{10}-2)^2] =$

$$\frac{10 \times 8}{12} = \frac{20}{3}.$$

故选 D.]

随堂·对点检测

1. B [平均数反映数据的集中趋势, 平均数的大小并不能说明该组数据极差的大小, 所以 A 错误; 平均数反映数据的集中趋势, 方差反映数据波动的大小, 所以 B 正确; 一组数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 其平均数为 $\bar{x}$, 则其方差 $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, 所以 C 错误; 方差大说明射击水平不稳定, 所以 D 错误. 故选 B.]

2. A [将 8 名学生的成绩从低到高依次排列为 65, 70, 75, 80, 85, 92, 95, 95,

因为 $8 \times 75\% = 6$, 所以这组数据的 75% 分位数为第 6 个数和第 7 个数的平均数, 即为 $\frac{92+95}{2} = 93.5$. 故选 A.]

3. AC [对于 A, 图 2 中 $[4, 6)$ 的频率为 $0.15 \times 2 = 0.3$, 故 A 正确;

对于 B, 设在图 2 中 $[0, 2), [2, 4)$ 所对应矩形的高度分别为 h_1, h_2 , 在图 1 中 $[0, 4)$ 的频率为 $0.05 \times 4 = 0.2$,

故 $2(h_1 + h_2) = 0.2$, 所以 $h_1 + h_2 = 0.1$,

故 $h_1 \leq 0.1, h_2 \leq 0.1$, 则众数必在 $[4, 6), [6, 8)$ 中取得, 因为图 2 中 $[4, 6), [6, 8)$ 的高度相等, 故众数的估计值不唯一, 故 B 错误;

对于 C, 图 1 中中位数的估计值为 $\frac{0.5-0.05 \times 4}{0.15} + 4 = 2 + 4 = 6$,

图 2 中, 后 3 个矩形面积之和为 $0.05 \times 4 + 0.15 \times 2 = 0.2 + 0.3 = 0.5$, 故中位数的估计值为 6, 故 C 正确;

对于 D, 图 1 平均数的估计值为 $(0.05 \times 2 + 0.15 \times 6 + 0.05 \times 10) \times 4 = 6$, 图 2 平均数的估计值为 $(h_1 \times 1 + h_2 \times 3 + 0.15 \times 5 + 0.15 \times 7 + 0.05 \times 9 + 0.05 \times 11) \times 2 = 2h_1 + 6h_2 + 5.6$, 不确定, 所以图 1 与图 2 平均数的估计值不一定相同, 故 D 错误.

故选 AC.]

4. 3 [∵ 数据 1, 2, a, a+1 是按从小到大的顺序排列的, 它的中位数是 3,

$$\therefore \frac{1}{2}(2+a) = 3, \text{ 解得 } a = 4,$$

$$\therefore \text{这组数据的平均数为 } \frac{1}{4}(1+2+4+4+1) = 3.]$$

第 67 课时 一元线性回归模型及其应用

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) 正 负 增加 减小 (2) 线性 非线性 一条 直线 线性

$$\text{知识点 2} \quad (2) \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (3) [-1, 1] \quad \text{正 负} \quad 1 \quad 0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2}}$$

知识点 3 (1) 因变量 自变量 a b bx+a 0

$$(2) \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

知识点 4 (1) 窄 (2) $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ 小

链教材·夯基固本

1. A [因为 $-0.1 < 0$, 所以 x 与 y 负相关,

又因为变量 y 与 z 正相关, 所以 x 与 z 负相关. 故选 A.]

2. D [观察题干散点图可知, 只有 D 选项的散点图表示的是变量 x 与 y 之间具有负的线性相关关系. 故选 D.]

3. B [根据题意得 $\bar{x} = \frac{1}{4} \times (1+2+4-1) = 1.5, \bar{y} = \frac{1}{4} \times (2+0-4+6) = 1, \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 22, \sum_{i=1}^4 y_i^2 = 56, \sum_{i=1}^4 x_i y_i = -20$, 样本相关系数 $r = \frac{-20 - 4 \times 1.5 \times 1}{\sqrt{(22 - 4 \times 1.5^2)(56 - 4 \times 1^2)}} = -1$.

故选 B.]

4. 168 [当 $x = 175$ 时, $\hat{y} = 0.81x + 25.82 = 0.81 \times 175 + 25.82 \approx 168$.]

5. C [由一元线性回归模型 $\begin{cases} Y = bx + a + e, \\ E(e) = 0, D(e) = \sigma^2 \end{cases}$

得到经验回归模型 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, 根据对应的残差图, 残差的均值 $E(e) = 0$ 可能成立, 但明显残差在 x 轴上方的数据更分散, $D(e) = \sigma^2$ 不满足一元线性回归模型, 正确的只有 C.]

6. A [计算得 $\bar{x} = \frac{1}{5}(-2-1+0+1+2) = 0$,

$$\bar{y} = \frac{1}{5}(5+4+2+2+1) = 2.8,$$

经验回归直线必过 $(0, 2.8)$, 故只有 A 项满足.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1) A [对于 A, 因为 $r < 0$, 所以 y 与 x 负相关, A 正确. 对于 B, C, 当 $x = 10$ 时, $\hat{y} = 1.359$, 为预测值, 不代表观测值的大小, 故 B, C 错误. 对于 D, $|r| = 0.91$, 接近 1, 说明样本数据线性相关程度强, D 错误.]

(2) 解: (i) 由表格数据可知, $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (12+12.5+13+$

$$13.5+14) = 13, \bar{y} = \frac{1}{5} \times (14+13+11+9+8) = 11.$$

(ii) 因为 $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 1+0.25+0+0.25+1 = 2.5, \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 9+4+0+4+9 = 26$,

$$\text{所以 } r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = -\frac{8}{\sqrt{65}} \approx -0.992.$$

多维变迁

1. D [由散点图可知, x 与 y 负相关, v 与 u 正相关, 则 $\hat{b}_1 < 0$, $\hat{b}_2 > 0, 0 < r_2 < 1$, 故 A, B 错误. 图形中点 (x, y) 比 (v, u) 更加

集中在一条直线附近,则 $|r_1| > |r_2|$. 又 $r_1 < 0, r_2 > 0$, 所以 $r_1 + r_2 < 0$, 故 C 错误, D 正确. 故选 D.]

2. -1 [因为所有样本点 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, n)$ 都在直线 $y = -3x + 1$ 上, 所以经验回归方程是 $\hat{y} = -3x + 1$, 可得这两个变量是负相关, 故这组样本数据的样本相关系数为负值, 且所有样本点 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, n)$ 都在直线上, 则有 $|r| = 1$, 所以样本相关系数 $r = -1$.]

考点二

考向 1 典例 2 解: (1) 根据题目表格里的数据可得 $\bar{x} = \frac{2+4+5+6+8}{5} = 5$,

$$\bar{y} = \frac{20+30+50+60+70}{5} = 46.$$

$$\text{则 } \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (2-5) \times (20-46) + (4-5) \times (30-46) + (5-5) \times (50-46) + (6-5) \times (60-46) + (8-5) \times (70-46) = 180,$$

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = (2-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (8-5)^2 = 20,$$

$$\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = (20-46)^2 + (30-46)^2 + (50-46)^2 + (60-46)^2 + (70-46)^2 = 1\,720.$$

$$\text{所以 } r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{180}{\sqrt{20} \times \sqrt{1\,720}} = \frac{18}{\sqrt{344}} \approx 0.97 > 0.75,$$

故广告支出与销售额具有较强的线性相关程度.

$$(2) \text{ 根据公式可得 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{180}{20} = 9,$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 46 - 9 \times 5 = 1,$$

所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = 9x + 1$.

所以当广告支出为 15 万元时, 预测销售额约为 $\hat{y} = 9 \times 15 + 1 = 136$ (万元).

多维变迁

C [由表格中的数据可得 $\bar{x} = 2.5, \bar{y} = 3.5$,

又经验回归直线过样本点中心 $(\bar{x}, \bar{y})$,

所以将 $(2.5, 3.5)$ 代入经验回归方程可得 $2.5k - 0.5 = 3.5$, 解得 $k = 1.6$,

故经验回归方程为 $\hat{y} = 1.6x - 0.5$,

当 $x = 5$ 时, $\hat{y} = 1.6 \times 5 - 0.5 = 7.5$, 即若变量 x 的值为 5, 则变量 y 的估计值为 7.5.

故选 C.]

考向 2 典例 3 解: (1) 第 1 步 确定经验回归类型: 根据散点图或样本相关系数确定经验回归方程的函数类型.

根据散点图判断, 看出样本点分布在一条指数函数的周围,

所以 $y = c_1 e^{c_2 x}$ 适宜作为 y 与 x 之间的经验回归方程模型.

(2) (i) 第 2 步 转化线性经验回归方程: 将 $\sqrt{x}, x^2, \ln x$ 等换元转化成一次函数型; 若为指数型, 可取对数后换元成一次函数型.

对 $y = c_1 e^{c_2 x}$ 两边同时取对数, 得 $\ln y = \ln c_1 + c_2 x$,

令 $z = \ln y$, 则 $z = c_2 x + \ln c_1$,

$$\text{所以 } \hat{c}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{32}{384} = \frac{1}{12},$$

$$\text{所以 } \ln \hat{c}_1 = \bar{z} - \hat{c}_2 \bar{x} = \frac{44}{10} - \frac{1}{12} \times \frac{360}{10} = \frac{7}{5},$$

第 3 步 求解线性经验回归方程: 利用公式求解.

$$\text{所以 } \hat{z} = \frac{1}{12}x + \frac{7}{5},$$

第 4 步 代换回原方程: 将上一步线性经验回归方程转化成目标形式.

$$\text{所以 } \hat{y} = e^{\hat{z}} = e^{\frac{1}{12}x + \frac{7}{5}}.$$

$$(ii) \text{ 因为 } \ln y = \frac{1}{12}x + \frac{7}{5},$$

$$\text{所以 } h(x) = x(\ln y - 2.4) + 170 = x\left(\frac{1}{12}x + \frac{7}{5} - 2.4\right) +$$

$$170 = \frac{1}{12}x^2 - x + 170,$$

所以当 $x = 6$ 时, 培养成本的预报值最小.

考点三

典例 4 (1) A [因为 $\sum_{i=1}^9 x_i = 33$,

$$\text{所以 } \bar{x} = \frac{33}{9} = \frac{11}{3},$$

因为经验回归直线 $\hat{y} = 2x - 1$ 过样本点中心 $(\bar{x}, \bar{y})$,

$$\text{所以 } \bar{y} = 2\bar{x} - 1 = 2 \times \frac{11}{3} - 1 = \frac{19}{3},$$

$$\text{增加数据 } (-3, 3) \text{ 后, } \bar{x}_1 = \frac{33-3}{10} = 3, \bar{y}_1 = \frac{9 \times \frac{19}{3} + 3}{10} = 6, \text{ 且经}$$

验回归方程为 $\hat{y} = 2.1x + \hat{b}$,

$$\text{所以 } 6 = 2.1 \times 3 + \hat{b} \Rightarrow \hat{b} = -0.3,$$

$$\text{则 } \hat{y} = 2.1x - 0.3,$$

所以当 $x = 4$ 时, 有 $\hat{y} = 2.1 \times 4 - 0.3 = 8.1$,

故残差的绝对值为 $|8 - 8.1| = 0.1$.

故选 A.]

$$(2) \text{ 解: (i) 由题意可知, } \bar{y} = \frac{1}{5}(120 + 106 + 96 + 90 + 95) = 101.4.$$

(ii) 中国出生人口数低于 700 万, 即 $\hat{y} < 70$,

当 $x = 8$ 时, $\hat{y} = 120 - 6 \times 8 = 72 > 70$, 当 $x = 9$ 时, $\hat{y} = 120 - 6 \times 9 = 66 < 70$,

所以 $x = 9$ 对应 2028 年, 即预测从 2028 年开始中国出生人口数将低于 700 万.

(iii) 分别令 $x = 1, 2, 3, 4, 5$, 得 $\hat{y} = 114, 108, 102, 96, 90$,

$$\text{所以 } R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^5 (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}$$

$$= 1 - \frac{6^2 + 2^2 + 6^2 + 6^2 + 5^2}{567} = 1 - \frac{137}{567} = \frac{430}{567}$$

$$\approx 0.76,$$

因为 $0.7 \leq R^2 < 0.85$, 所以这个模型的拟合效果一般.

随堂·对点检测

1. C [因为沿海地区气温和海水表层温度相关, 且样本相关系数为正数,

所以随着沿海地区气温由低到高, 海水表层温度呈上升趋势. 故选 C.]

$$2. A \quad [\bar{x} = \frac{80+90+100+110+120}{5} = 100,$$

经验回归方程为 $\hat{y} = 1.45x + 7$,

则 $\bar{y} = 1.45 \times 100 + 7 = 152$,

则 $a = 152 \times 5 - 120 - 140 - 165 - 180 = 155$.

故选 A.]

3. A [由题意可知,

$$\bar{x} = \frac{20+23+25+27+30}{5} = 25,$$

$$\bar{z} = \frac{2+2.4+3+3+4.6}{5} = 3,$$

因为经验回归直线 $\hat{z} = 0.2x + \hat{a}$ 过样本点中心 $(25, 3)$, 所以 $3 = 0.2 \times 25 + \hat{a}$,

所以 $\hat{a} = -2$,

所以 $\hat{z} = 0.2x - 2$,

因为 $z = \ln y$, 所以 $\ln y = 0.2x - 2$,

$$\text{所以 } y = e^{0.2x-2} = \frac{e^{0.2x}}{e^2} = e^{-2} \cdot e^{0.2x},$$

所以 $c_1 = e^{-2}$.

故选 A.]

4. -5 [已知 $\bar{x} = 19, \bar{y} = 161$,

则样本点中心为 $(19, 161)$,

把 $(19, 161)$ 代入经验回归方程 $\hat{y} = 4x + \hat{a}$,

得 $161 = 4 \times 19 + \hat{a}$, 解得 $\hat{a} = 85$,

所以 $\hat{y} = 4x + 85$,

当 $x = 25$ 时, $\hat{y} = 4 \times 25 + 85 = 185$,

所以该样本点的残差为 $180 - 185 = -5(\text{cm})$.]

第 68 课时 列联表与独立性检验

理法先行·题练固本

链教材·夯基固本

1. A [$a = 35 - 8 = 27, b = a + 11 = 27 + 11 = 38$.]

2. C [因为 $\chi^2 = 2.974 < x_{0.05} = 3.841$, 所以变量 x 与 y 独立. 又 $2.706 < 2.974 < 3.841$, 所以这个结论犯错误的概率不超过 0.1. 故选 C.]

3. 0.1 [由题意得 $\chi^2 = \frac{89 \times (24 \times 26 - 8 \times 31)^2}{55 \times 34 \times 32 \times 57}$

$\approx 3.689 > 2.706$, 所以在犯错误的概率不超过 0.1 的前提下可以认为性别与出生时间有关联.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1)D (2)ABD [(1)由题意知, $\frac{10+c}{105} = \frac{2}{7}$, 解得 $c =$

20, 由 $10 + 20 + b + 30 = 105$, 解得 $b = 45$.

补全 2×2 列联表如下:

单位:人

班级	数学成绩		合计
	优秀	非优秀	
甲班	10	45	55
乙班	20	30	50
合计	30	75	105

甲班的优秀率为 $\frac{10}{55} = \frac{2}{11}$, 乙班的优秀率为 $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$, $\frac{2}{11} < \frac{2}{5}$,

所以成绩与班级有关, 选项 D 正确, 选项 A, B, C 错误.

故选 D.

(2) 设等高堆积条形图对应 2×2 列联表如下:

单位:人

性别	年龄		合计
	35 岁及以上	35 岁以下	
男性	a	c	$a+c$
女性	b	d	$b+d$
合计	$a+b$	$c+d$	$a+b+c+d$

根据第 1 个等高堆积条形图可知, 35 岁及以上男性比 35 岁及以上女性多, 即 $a > b$,

35 岁以下男性比 35 岁以下女性多, 即 $c > d$,

根据第 2 个等高堆积条形图可知, 男性中 35 岁及以上的比 35 岁以下的多, 即 $a > c$,

女性中 35 岁及以上的比 35 岁以下的多, 即 $b > d$.

对于选项 A, 男性人数为 $a+c$, 女性人数为 $b+d$, 因为 $a > b, c > d$, 所以 $a+c > b+d$, 故 A 正确;

对于选项 B, 35 岁及以上女性人数为 b , 35 岁以下女性人数为 d , 因为 $b > d$, 故 B 正确;

对于选项 C, 35 岁以下男性人数为 c , 35 岁及以上女性人数为 b , 无法从图中直接判断 b 与 c 的大小关系, 故 C 不一定正确;

对于选项 D, 35 岁及以上的人数为 $a+b$, 35 岁以下的人数为 $c+d$, 因为 $a > c, b > d$, 所以 $a+b > c+d$, 故 D 正确.

故选 ABD.]

多维变迁

C [对于 A, $\left| \frac{a}{a+b} - \frac{c}{c+d} \right| = \left| \frac{2}{5} - \frac{3}{10} \right| = \frac{1}{10}$,

对于 B, $\left| \frac{a}{a+b} - \frac{c}{c+d} \right| = \left| \frac{1}{5} - \frac{2}{10} \right| = 0$,

对于 C, $\left| \frac{a}{a+b} - \frac{c}{c+d} \right| = \left| \frac{1}{5} - \frac{4}{5} \right| = \frac{3}{5}$,

对于 D, $\left| \frac{a}{a+b} - \frac{c}{c+d} \right| = \left| \frac{9}{10} - \frac{4}{5} \right| = \frac{1}{10}$,

由于 $\frac{3}{5} > \frac{1}{10} > 0$,

故选 C.]

考点二

典例 2 解: 由题意可得 2×2 列联表如下.

单位:人

性别	满意度		合计
	满意	不满意	
男	100	50	150
女	20	30	50
合计	120	80	200

零假设为

H_0 : 游客性别与满意度无关.

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$= \frac{200 \times (100 \times 30 - 50 \times 20)^2}{150 \times 50 \times 120 \times 80}$$

$\approx 11.111 > 10.828$,

所以依据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 推断 H_0 不成立, 即认为游客性别与满意度有关.

多维变迁

解:填写列联表如下:

单位:件

车间	产品		合计
	优级品	非优级品	
甲车间	26	24	50
乙车间	70	30	100
合计	96	54	150

零假设为

H_0 :甲、乙两车间产品的优级品率没有差异.

$$\chi^2 = \frac{150 \times (26 \times 30 - 70 \times 24)^2}{96 \times 54 \times 50 \times 100} = 4.6875.$$

因为 $\chi^2 = 4.6875 > 3.841 = x_{0.05}$, 所以依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 推断 H_0 不成立, 即认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异, 此推断犯错误的概率不大于 0.05;
因为 $\chi^2 = 4.6875 < 6.635 = x_{0.01}$, 所以依据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 没有充分证据推断 H_0 不成立, 因此可以认为 H_0 成立, 即认为甲、乙两车间产品的优级品率没有差异.

随堂·对点检测

- B** [依题意, 要使性别与视力无关的可能性最大, 则 $240 \times 50 = 200m$, 解得 $m = 60$. 故选 B.]
- AC** [选项 A, 根据分层随机抽样的抽样比可知, 样本中男生和女生人数之比为 $60 : 40 = 3 : 2$, 用样本估计总体, 则全校男生和女生人数之比为 $3 : 2$, 故选项 A 正确;
选项 B, 样本中男生有 20% 手机成瘾, 女生有 40% 手机成瘾, 比例关系差异很大, 所以手机是否成瘾与学生的性别很大概率上有关系, 但不能说“一定与学生的性别有关系”, 故选项 B 错误;
选项 C, 由题意知, 男生中有 $60 \times 20\% = 12$ (人) 手机成瘾, 女生中有 $40 \times 40\% = 16$ (人) 手机成瘾, 即在抽取的 100 人样本中, 有 28 人手机成瘾, 所以样本中学生手机成瘾的频率为 $\frac{28}{100} = \frac{7}{25}$, 用频率估计概率, 从该校学生中随机抽取一名学生, 该生手机成瘾的概率为 $\frac{7}{25}$, 故选项 C 正确;
选项 D, 由条件概率知, 在样本中抽到一名手机成瘾的学生, 该生是男生的概率为 $\frac{12}{12+16} = \frac{3}{7}$, 用样本估计总体, 从该校学生中抽到一名手机成瘾的学生, 该生是男生的概率也为 $\frac{3}{7}$, 故选项 D 错误. 故选 AC.]
- 14.7 [根据题意可知, $n = 60, a = 3, b = 27, c = 17, d = 13$, 则 $\chi^2 = \frac{60 \times (3 \times 13 - 27 \times 17)^2}{30 \times 30 \times 20 \times 40} = 14.7$.]

第十章 计数原理、概率、随机变量及其分布

第 69 课时 两个计数原理、排列与组合

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) $m+n$ (2) $m \times n$

知识点 2 一定的顺序

知识点 3 (3) $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ 1 $n!$

链教材·夯基固本

- A** [4 名学生中每人有 3 种可选方案, 根据分步乘法计数原理, 4 人共有 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ (种) 报名方式, 故选 A.]
- 40 [根据分类加法计数原理分两类:
第一类, 末位为 1, 有 1, 11, 21, $\cdots$, 191, 共 $\frac{191-1}{10} + 1 = 20$ (个);
第二类, 末位为 6, 有 6, 16, 26, $\cdots$, 196, 共 $\frac{196-6}{10} + 1 = 20$ (个),
综上, 共 $20 + 20 = 40$ (个).]
- 480 [先考虑该歌手的位置, 不是第一个出场, 也不是最后一个出场, 则该歌手有 4 种位置可以选, 共有 $C_4^1 = 4$ 种结果, 剩下 5 人在 5 个不同位置, 共有 $A_5^5 = 120$ (种) 结果, 所以不同安排方法有 $C_4^1 A_5^5 = 4 \times 120 = 480$ (种).]
- C** [$A_{n+1}^n = (n+1)n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 = (n+1)!$, 其他选项可化简为 $n!$. 故选 C.]
- 330 [$C_7^3 + C_7^4 + C_8^5 + C_9^6 + C_{10}^7 = C_8^4 + C_8^5 + C_9^6 + C_{10}^7 = C_9^5 + C_9^6 + C_{10}^7 = C_{10}^6 + C_{10}^7 = C_{11}^7 = C_{11}^4 = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 330$.]

考点深研·题型突破

考点一

- 典例 1** (1) **A** (2) **C** (3) **ABD** [(1) 因为焦点在 x 轴上, 所以 $m > n$, 以 m 的值为标准分类, 由分类加法计数原理, 可分为四类, 第一类: 当 $m = 5$ 时, n 有 4 种选择; 第二类: 当 $m = 4$ 时, n 有 3 种选择; 第三类: 当 $m = 3$ 时, n 有 2 种选择; 第四类: 当 $m = 2$ 时, n 有 1 种选择. 故符合条件的椭圆共有 10 个. 故选 A.
(2) 第一步, 给 A 区域涂色, 有 4 种涂法; 第二步, 给 B 区域涂色, 有 3 种涂法; 第三步, 给 C 区域涂色, 有 2 种涂法; 第四步, 给 D 区域涂色, 有 2 种涂法. 所以共有 $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ (种) 涂法. 故选 C.
(3) 对于 A, A, B, C 三名同学到甲、乙、丙、丁四个工厂进行社会实践, 每名同学有 4 种选法, 则三名同学有 $4 \times 4 \times 4 = 4^3$ (种) 选法, 故 A 正确;
对于 B, 三人到四个工厂, 有 $4^3 = 64$ (种) 情况, 其中甲工厂没有人去, 即三人全部到乙、丙、丁三个工厂的情况有 $3^3 = 27$ (种), 则甲工厂必须有同学去的安排方法有 $64 - 27 = 37$ (种), 故 B 正确;
对于 C, 若同学 A 必须去甲工厂, 剩下 2 名同学安排到 4 个工厂即可, 有 $4^2 = 16$ (种) 安排方法, 故 C 错误;
对于 D, 若三名同学所选工厂各不相同, 有 $4 \times 3 \times 2 = 24$ (种) 安排方法, 故 D 正确. 故选 ABD.]

多维变迁

解: (1) 分 3 步:

① 先选百位数字有 5 种选法;

②再选十位数字有5种选法;

③最后选个位数字有4种选法.

由分步乘法计数原理知,所求三位数共有 $5 \times 5 \times 4 = 100$ (个).

(2)分3步:

①先选个位数字,由于组成的三位数是奇数,因此有3种选法;

②再选百位数字有4种选法;

③最后选十位数字有4种选法.

由分步乘法计数原理知,所求三位数共有 $3 \times 4 \times 4 = 48$ (个).

(3)分3类:

①一位数,共有6个;

②两位数,先选十位数字,有5种选法,再选个位数字,也有5种选法,共有 $5 \times 5 = 25$ (个);

③三位数,先选百位数字,有5种选法,再选十位数字,有5种选法,最后选个位数字,有4种选法,共有 $5 \times 5 \times 4 = 100$ (个).

因此,比1 000小的自然数共有 $6 + 25 + 100 = 131$ (个).

(4)分4类:

①千位数字为3或4时,后面三个数位上可随便选择,此时共有 $2 \times 5 \times 4 \times 3 = 120$ (个);

②千位数字为5,百位数字为0,1,2,3之一时,共有 $4 \times 4 \times 3 = 48$ (个);

③千位数字为5,百位数字为4,十位数字为0,1之一时,共有 $2 \times 3 = 6$ (个);

④5 420也满足条件.

故所求四位数共有 $120 + 48 + 6 + 1 = 175$ (个).

考点二

典例2 (1)ABC (2)64 [(1)对于A,从7人中选5人排列,有 A_7^5 种排法,故A正确.

对于B,分两步完成,先选3人站前排,有 A_7^3 种方法,余下4人站后排,有 A_4^4 种方法,共有 $A_7^3 \cdot A_4^4$ 种排法,故B正确.

对于C,法一(特殊元素优先法):先排甲,有5种方法,其余6人有 A_6^6 种排列方法,共有 $5 \times A_6^6 = 3\ 600$ (种)排法,故C正确.

法二(特殊位置优先法):左、右两边位置可安排另6人中的两人,有 A_6^2 种排法,其他有 A_5^5 种排法,共有 $A_6^2 A_5^5 = 3\ 600$ (种)排法,故C正确.

对于D,法一(特殊元素优先法):甲在最右边时,其他的可全排列,有 A_6^6 种方法;甲不在最右边时,可从余下的5个位置任选一个,有 A_5^1 种,而乙可在除去最右边的位置后剩下的5个中任选一个,有 A_5^1 种,其余人全排列,有 A_5^5 种不同排法,共有 $A_6^6 + A_5^1 A_5^5 = 3\ 720$ (种)排法,故D错误.

法二(间接法):7人全排列,有 A_7^7 种方法,其中甲在最左边时,有 A_6^6 种方法,乙在最右边时,有 A_6^6 种方法,其中都包含了甲在最左边且乙在最右边的情形,有 A_5^5 种方法,故共有 $A_7^7 - 2A_6^6 + A_5^5 = 3\ 720$ (种)排法,故D错误.

故选ABC.

(2)法一:由题意,可分三类:第一类,体育类选修课和艺术类选修课各选修1门,有 $C_4^1 C_4^1$ 种方案;第二类,在体育类选修课中选修1门,在艺术类选修课中选修2门,有 $C_4^1 C_4^2$ 种方案;第三类,在体育类选修课中选修2门,在艺术类选修课中选修1门,有 $C_4^2 C_4^1$ 种方案.综上,不同的选课方案共有 $C_4^1 C_4^1 + C_4^1 C_4^2 + C_4^2 C_4^1 = 64$ (种).

法二:若学生从这8门课中选修2门课,则有 $C_8^2 - C_4^2 - C_4^2 = 16$ (种)选课方案;若学生从这8门课中选修3门课,则有 $C_8^3 - C_4^3 - C_4^3 = 48$ (种)选课方案.综上,不同的选课方案共有 $16 + 48 = 64$ (种).]

考点三

考向1 典例3 解:(1)无序不均匀分组问题,先选1本有 C_6^1 种选法;再从余下的5本中选2本有 C_5^2 种选法;最后余下3本全选有 C_3^3 种方法,故共有 $C_6^1 C_5^2 C_3^3 = 60$ (种)分配方法.

(2)有序不均匀分组问题.由于甲、乙、丙是不同的三人,在第(1)问基础上,还应考虑再分配,共有 $C_6^1 C_5^2 C_3^3 A_3^3 = 360$ (种)分配方法.

(3)无序均匀分组问题.先分三组,则应有 $C_6^2 C_4^2 C_2^2$ 种分法,但是这里面出现了重复,不妨记六本书为A,B,C,D,E,F,若第一组取了A,B,第二组取了C,D,第三组取了E,F,该种方法记为(AB,CD,EF),则 $C_6^2 C_4^2 C_2^2$ 种分法中还有(AB,EF,CD),(CD,AB,EF),(CD,EF,AB),(EF,CD,AB),(EF,AB,CD),共 A_3^3 种情况,而这 A_3^3 种情况只能作为一种分法,故分配方法有 $\frac{C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{A_3^3} = 15$ (种).

(4)有序均匀分组问题.在第(3)问的基础上,还应考虑再分配,共有 $15 A_3^3 = 90$ (种)分配方法.

(5)无序部分均匀分配问题,共有 $\frac{C_6^4 C_2^1 C_1^1}{A_2^2} = 15$ (种)分配方法.

(6)有序部分均匀分配问题.在第(5)问的基础上,还应考虑再分配,共有 $15 A_3^3 = 90$ (种)分配方法.

多维变迁

1.B [问题可转化为将9个入团名额排成一列,再分成6组,每组至少一个,求其方法数.事实上,只需在上述9个入团名额所产生的8个“空档”中选出5个“空档”插入挡板,即产生符合要求的方法,有 $C_8^5 = 56$ (种),故选B.]

2.C [法一(分类法)]

第一类:当甲、乙两人在A组时,有 $C_2^1 C_4^1 = 8$ (种)分组方案.

第二类:当甲、乙两人在B组时,有 $C_2^1 C_4^1 = 8$ (种)分组方案.

由分类加法计数原理可得共有 $8 + 8 = 16$ (种)分组方案,故选C.

法二(分步法)

第一步:安排甲、乙,甲、乙必须在同一组,A,B两组有区别,所以甲、乙可以选A组或B组,有 $C_2^1 = 2$ (种)选择,此时所选的组已有2人,还需2人;另一组仍需4人.

第二步:安排丙、丁,丙、丁不能同组,因此两人需分别进入两个不同的组,有 $A_2^2 = 2$ (种)分组方式,此时已有甲、乙2人和丙、丁中的1人在同一组,该组已有3人,仅缺1人;另一组已有1人,缺3人.

第三步:安排剩余4人,剩余4人中选1人补充到缺1人的组,剩下3人自动归入另一组,有 $C_4^1 = 4$ (种)选法.

根据分步乘法计数原理可得分组方案种数为 $2 \times 2 \times 4 = 16$,故选C.]

考向2 典例4 AB [已知将体重各不相同的A,B,C,D,E,F六只幼崽排成一排晒太阳,

对于A,6只幼崽全排列有 A_6^6 种方法,A,C,D全排列有 A_3^3 种方法,则A,C,D从左到右按照体重递增的顺序排列有 $\frac{A_6^6}{A_3^3} = 120$ (种)方法,故A正确;

对于B,先排列除E与F外的4只幼崽,有 A_4^4 种方法,4只幼崽排列共有5个空,

利用插空法将E和F插入5个空,有 A_5^2 种方法,则共有 $A_4^4 A_5^2 = 480$ (种)方法,故B正确;

对于 C, A, B, C 三只幼崽排在一起, 且 A 只能在 B 与 C 的中间有 2 种排法, 将这 3 只幼崽看作一个整体, 再与其余 3 只幼崽全排列, 有 A_4^4 种方法,

则共有 $2A_4^4=48$ (种)方法, 故 C 错误;

对于 D, 6 只幼崽全排列有 A_6^6 种方法,

当 D 在排头时, 有 A_5^5 种方法, 当 F 在排尾时, 有 A_5^5 种方法,

当 D 在排头且 F 在排尾时, 有 A_4^4 种方法,

则 D 不在排头, F 不在排尾的情况共有 $A_6^6 - 2A_5^5 + A_4^4 = 504$ (种), 故 D 错误. 故选 AB.]

多维变迁

C [已知 A, B, C, D, E 五人站成一排, 要求 A, B 相邻且 C, D 不相邻, 将 A, B 看成一个整体,

则 A, B 的排列方法有 A_2^2 种方法,

然后将这个整体与 E 进行全排列,

则不同的排列方法有 A_2^2 种,

最后将 C, D 插入到三个空中的两个中, 有 A_3^2 种方法,

根据分步乘法计数原理, 可知排法种数为 $A_2^2 A_3^2 A_2^2 = 24$.

故选 C.]

微点突破 13

典例 5 24 112 [第一步, 从第一行任选一个数, 共有 4 种不同的选法; 第二步, 从第二行选一个与第一个数不同列的数, 共有 3 种不同的选法; 第三步, 从第三行选一个与第一、二个均不同列的数, 共有 2 种不同的选法; 第四步, 从第四行选一个与第一、二、三个数均不同列的数, 只有 1 种选法.

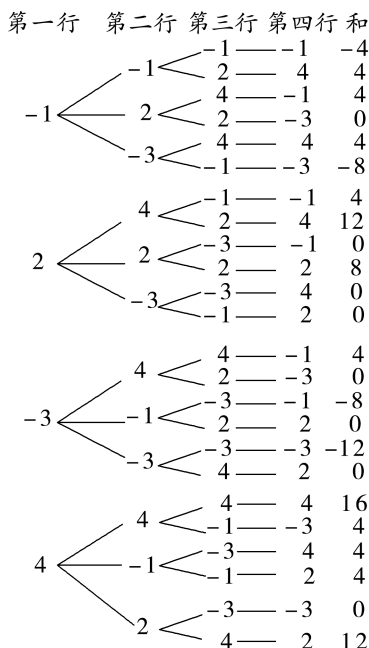
由分步乘法计数原理知, 不同的选法种数为 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

先按列分析, 每列必选出一个数, 故所选 4 个数的十位上的数字分别为 1, 2, 3, 4. 再按行分析, 第一、二、三、四行个位上的数字的最大值分别为 1, 3, 3, 5, 故从第一行选 21, 从第二行选 33, 从第三行选 43, 从第四行选 15, 此时个位上的数字之和最大, 故选中方格中的 4 个数之和的最大值为 $21 + 33 + 43 + 15 = 112$.]

母题探究

1. 108 [由本例解析知所选方格中, 40, 12, 22, 34 的和最小, 选中方格中的 4 个数之和的最小值为 108.]

2. 12 4 [根据题意可得所有情况如图所示.



则满足 4 个数之和为正的有 12 个, 其中最小值为 4.]

随堂·对点检测

1. C [若路线为甲、乙、丁, 则有 $3 \times 2 = 6$ (条); 若路线为甲、丙、丁, 则有 $3 \times 4 = 12$ (条), 故共有 $6 + 12 = 18$ (条).

故选 C.]

2. C [将 5 名同学分配到三个班, 每班至少 1 名同学,

则可将 5 名同学分为 1, 2, 2 或 1, 1, 3 三组, 再分到三个班,

则不同的分配方法有 $\left(\frac{C_5^2 C_3^2}{A_2^2} + C_5^3\right) A_3^3 = 150$ (种).

故选 C.]

3. AD [对于 A, 因为甲、乙必须相邻且乙在甲的右边,

所以将甲、乙看成一个整体, 再与丙、丁、戊全排列, 有 $A_4^4 = 24$ (种)排法, 故 A 正确;

对于 B, 若甲站在最左端, 乙和丙、丁、戊全排列, 有 $A_4^4 = 24$ (种)排法; 若乙站在最左端, 有 $A_3^1 A_3^3 = 18$ (种)排法, 共有 $24 + 18 = 42$ (种)排法, 故 B 错误;

对于 C, 因为甲、乙不相邻, 所以先将丙、丁、戊三人排成一排, 再将甲、乙安排在三人的空位中, 有 $A_3^3 \cdot A_4^2 = 72$ (种)排法, 故 C 错误;

对于 D, 甲、乙、丙、丁、戊五人全排列有 $A_5^5 = 120$ (种)排法,

甲、乙、丙全排列有 $A_3^3 = 6$ (种)排法,

所以甲、乙、丙按从左到右的顺序排列的排法有 $\frac{120}{6} = 20$ (种), 故 D 正确.

故选 AD.]

4. 288 [先选 2 个家长排在队列的头和尾的排法数为 $A_4^2 = 12$, 剩下的家长 and 儿童全排的排法种数为 $A_4^4 = 24$, 则不同的排列种数为 $12 \times 24 = 288$.]

第 70 课时 二项式定理

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) $C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n$
(2) $k+1$

知识点 2 $C_n^k = C_n^{n-k}$ 递增 递减 $C_n^{\frac{n}{2}}$ $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ $C_n^{\frac{n+1}{2}}$

知识点 3 (1) 2^n (2) 2^{n-1}

链教材·夯基固本

1. A [二项式系数是指 $C_7^0, C_7^1, C_7^2, \cdots, C_7^7$,

故第 3 项的二项式系数为 C_7^2 , 故选 A.]

2. B $\left[2x - \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}\right]^6$ 的展开式的中间项为 $C_6^3 (2x)^3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{4x}}\right)^3 = -40x^2$, 故选 B.]

3. C [由题意可得, 二项式的展开式满足 $T_{k+1} = C_n^k x^k$, 且有 $C_n^3 = C_n^7$, 因此 $n = 10$. 故二项式系数最大的项为 $C_{10}^5 x^5 = 252x^5$, 故选 C.]

4. 0 [由 $(1+x)^n = C_n^0 x^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$,

令 $x = -1$, 得 $(1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$.]

考点深研·题型突破

考点一

考向 1 典例 1 B $\left[x - \frac{\sqrt{a}}{x^2}\right]^6$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} =$

$C_6^k \cdot (-\sqrt{a})^k \cdot x^{6-3k}$, 令 $6-3k=0$, 得 $k=2$,

可得它的常数项为 $C_6^2 \cdot a = 60$, $\therefore a = 4$.

故选 B.]

母题探究

1.7 [由题意可得,展开式共有7项.]

2. $-160x^{-3}$ [中间项为 $C_6^3 \cdot (-2)^3 \cdot x^{-3} = -160x^{-3}$.]

3. -12 [由本例解答知 $(x - \frac{2}{x^2})^6$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k \cdot (-2)^k \cdot x^{6-3k}, k=0,1,\dots,6$,

令 $6-3k=3$, 得 $k=1$, 所以 x^3 的系数为 -12 .]

4.7 [由 $6-3k$ 为整数, $k \in \mathbf{N}, k \leq 6$, 可知有理项共有7项.]

考向2 典例2 (1)B (2)C [(1) $(2 + \frac{1}{x}) \cdot (2x-1)^{11} =$

$$2(2x-1)^{11} + \frac{1}{x}(2x-1)^{11},$$

$(2x-1)^{11}$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_{11}^k (2x)^{11-k} \cdot$

$$(-1)^k = (-1)^k \cdot 2^{11-k} C_{11}^k x^{11-k}, k=0,1,\dots,11,$$

$$\therefore 2(2x-1)^{11} = (-1)^k 2^{12-k} C_{11}^k x^{11-k} \text{ ①},$$

$$\frac{1}{x}(2x-1)^{11} = (-1)^k 2^{11-k} C_{11}^k x^{10-k} \text{ ②},$$

在①式中,令 $11-k=0$, 得 $k=11$, 故 $2(2x-1)^{11}$ 的展开式中的常数项为 $(-1)^{11} 2^1 C_{11}^{11} = -2$,

在②式中,令 $10-k=0$, 得 $k=10$, 则 $\frac{1}{x}(2x-1)^{11}$ 的展开式中的常数项为 $(-1)^{10} 2^1 C_{11}^{10} = 22$,

故 $(2 + \frac{1}{x})(2x-1)^{11}$ 的展开式中的常数项为 $-2+22=20$.

故选B.

(2)法一: $(x+y-z)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} \cdot$

$$(y-z)^r (0 \leq r \leq 5, r \in \mathbf{N}),$$

$(y-z)^r$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_r^k y^{r-k} (-z)^k =$

$$(-1)^k C_r^k y^{r-k} z^k (0 \leq k \leq r \leq 5, k, r \in \mathbf{N}),$$

可得 $(x+y-z)^5$ 的展开式的通项为 $(-1)^k C_5^r C_r^k x^{5-r} y^{r-k} z^k$

$$(0 \leq k \leq r \leq 5, k, r \in \mathbf{N}),$$

$$\text{由} \begin{cases} 5-r=2, \\ r-k=2, \\ k=1, \end{cases} \text{可得} \begin{cases} r=3, \\ k=1, \end{cases}$$

故 $(x+y-z)^5$ 的展开式中含 $x^2 y^2 z$ 项的系数为 $-C_5^3 C_3^1 = -10 \times 3 = -30$. 故选C.

法二: $(x+y-z)^5$ 表示5个因式 $(x+y-z)$ 之积,

$\therefore x^2 y^2 z$ 可从两个因式中取 x , 剩余的3个因式中2个取 y , 其余一个因式取 z , 因此 $x^2 y^2 z$ 的系数为 $C_5^2 C_3^2 C_1^1 (-1) = -30$. 故选C.]

考点二

考向1 典例3 BCD [二项展开式中的二项式系数和为 2^{2026} , 故A错误;

令 $x=1$, 可得 $(1-2)^{2026} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2025} + a_{2026} = 1$, 即展开式中所有项的系数和为1, 故B正确;

令 $x=0$, 可得 $a_0=1$, 令 $x=\frac{1}{2}$, 可得 $(1-2 \times \frac{1}{2})^{2026} = a_0 +$

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_{2025}}{2^{2025}} + \frac{a_{2026}}{2^{2026}} = 0, \text{ 所以 } \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots +$$

$$\frac{a_{2025}}{2^{2025}} + \frac{a_{2026}}{2^{2026}} = -1, \text{ 故C正确;}$$

将等式 $(1-2x)^{2026} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2025} x^{2025} + a_{2026} x^{2026}$ 两边同时求导可得,

$$2026 \times (-2) \times (1-2x)^{2025} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + 2025 a_{2025} x^{2024} + 2026 a_{2026} x^{2025},$$

再令 $x=1$, 可得 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 2025 a_{2025} + 2026 a_{2026} = 4052$, 故D正确. 故选BCD.]

多维变迁

解:(1) $(2x-3y)^{10}$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_{10}^k (2x)^{10-k} (-3y)^k = C_{10}^k 2^{10-k} \cdot (-3)^k x^{10-k} y^k (k \in \mathbf{N} \text{ 且 } 0 \leq k \leq 10).$

第3项的二项式系数为 $C_{10}^2 = 45$, 第3项的系数为 $C_{10}^2 2^{10-2} \times (-3)^2 = 103680$.

(2)二项式系数的和为 $C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + \dots + C_{10}^{10} = 2^{10} = 1024$.

(3)令 $x=y=1$, 得各项系数的和为 $(2-3)^{10} = (-1)^{10} = 1$.

(4)奇数项的二项式系数和为 $C_{10}^0 + C_{10}^2 + C_{10}^4 + C_{10}^6 + C_{10}^8 + C_{10}^{10} = 2^9 = 512$, 偶数项的二项式系数和为 $C_{10}^1 + C_{10}^3 + C_{10}^5 + C_{10}^7 + C_{10}^9 = 2^9 = 512$.

(5)设 $(2x-3y)^{10} = a_0 x^{10} + a_1 x^9 y + a_2 x^8 y^2 + \dots + a_{10} y^{10}$, 令 $x=y=1$, 得 $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 1$ ①.

令 $x=1, y=-1$, 得

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{10} = 5^{10} \text{ ②}.$$

$$\text{①} + \text{②}, \text{得 } 2(a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}) = 1 + 5^{10},$$

$$\text{所以奇数项系数和为 } \frac{1+5^{10}}{2}.$$

$$\text{①} - \text{②}, \text{得 } 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9) = 1 - 5^{10},$$

$$\text{所以偶数项系数和为 } \frac{1-5^{10}}{2}.$$

(6)由(5)知 x 的奇次项系数和为 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = \frac{1-5^{10}}{2}$; x 的偶次项系数和为 $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = \frac{1+5^{10}}{2}$.

考向2 典例4 D [因为 $(2x + \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中二项式系

数之和为64, 所以 $2^n = 64$, 则 $n=6$,

所以 $(2x + \frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k (2x)^{6-k} \cdot$

$$(\frac{1}{\sqrt{x}})^k = C_6^k 2^{6-k} x^{6-\frac{3}{2}k}.$$

令 $x=1$, 可得展开式中各项系数之和为 3^6 , 故A错误;

第4项的二项式系数最大, 此时 $k=3$, 则二项展开式中二项式系数最大的项为 $T_4 = C_6^3 2^{6-3} x^{6-\frac{3}{2} \times 3} = 160x^{\frac{3}{2}}$, 故B错误;

$$\text{令 } 6 - \frac{3}{2}k = 0, \text{ 则 } k=4,$$

所以展开式中的常数项为 $C_6^4 2^{6-4} x^{6-\frac{3}{2} \times 4} = 60$, 故C错误;

令第 $k+1$ 项的系数最大,

$$\text{则} \begin{cases} C_6^k 2^{6-k} \geq C_6^{k-1} 2^{6-k+1}, \\ C_6^k 2^{6-k} \geq C_6^{k+1} 2^{6-k-1}, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \frac{4}{3} \leq k \leq \frac{7}{3},$$

因为 $k \in \mathbf{N}$, 所以 $k=2$.

所以展开式中系数最大的项为 $T_3 = C_6^2 2^4 x^3 = 240x^3$, 故D正确. 故选D.]

多维变迁

$-8064 - 15360x^4$ [由题意知, $2^{2n} - 2^n = 992$, 即 $(2^n - 32)(2^n + 31) = 0$, 故 $2^n = 32$, 解得 $n=5$. 由二项式系数的性质知, $(2x - \frac{1}{x})^{10}$ 的展开式中第6项的二项式系数最大, 故二

项式系数最大的项为 $T_6 = C_{10}^5 (2x)^5 \left(-\frac{1}{x}\right)^5 = -8\ 064$.

设第 $k+1$ 项的系数的绝对值最大,

$$\text{则 } T_{k+1} = C_{10}^k \cdot (2x)^{10-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^k \\ = (-1)^k C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot x^{10-2k},$$

$$\text{令 } \begin{cases} C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \geq C_{10}^{k-1} \cdot 2^{10-k+1}, \\ C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \geq C_{10}^{k+1} \cdot 2^{10-k-1}, \end{cases}$$

$$\text{得 } \begin{cases} C_{10}^k \geq 2C_{10}^{k-1}, \\ 2C_{10}^k \geq C_{10}^{k+1}, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 11-k \geq 2k, \\ 2(k+1) \geq 10-k, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{8}{3} \leq k \leq \frac{11}{3}.$$

$\therefore k \in \mathbf{N}, \therefore k=3$.

故系数的绝对值最大的项是第 4 项,

$$T_4 = -C_{10}^3 \times 2^7 \times x^4 = -15\ 360x^4.]$$

考点三

典例 5 (1)B (2)B [(1)因为 $a \in \mathbf{Z}$, 且 $0 \leq a \leq 13$,

$$\text{所以 } 51^{2\ 025} + a = (52-1)^{2\ 025} + a$$

$$= C_{2\ 025}^0 52^{2\ 025} - C_{2\ 025}^1 52^{2\ 024} + C_{2\ 025}^2 52^{2\ 023} - \cdots + C_{2\ 025}^{2\ 024} 52 - C_{2\ 025}^{2\ 025} +$$

a , 因为 $51^{2\ 025} + a$ 能被 13 整除, 结合选项,

所以 $-C_{2\ 025}^{2\ 025} + a = -1 + a$ 能被 13 整除, 所以 $a=1$.

$$(2) 1.02^6 = (1+0.02)^6 = 1 + C_6^1 \times 0.02 + C_6^2 \times 0.02^2 + C_6^3 \times 0.02^3 + \cdots + 0.02^6 \approx 1 + 0.12 + 0.006 \approx 1.13.]$$

教材拓展 15

典例 6 AD [根据组合数性质可知, $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$, A 正确;

根据二项式定理可知, $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$, 故 B 错误;

根据选项 A 的等式, $C_4^4 + C_4^3 + C_4^2 + C_4^1 + C_3^3 + C_3^2 + C_3^1 + C_2^2 = C_9^4 = 126$, 故 C 错误;

第 10 行中从左往右第 5 个数与第 6 个数分别为 C_{10}^4 和 C_{10}^5 , 比值为 5:6, 故 D 正确.

故选 AD.]

随堂·对点检测

1. B [(2x-y)^5 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_5^k (2x)^{5-k} (-y)^k, k=0,1,\dots,5$,

则 $\left(1+\frac{y}{x}\right)(2x-y)^5$ 的展开式中 x^2y^3 的系数为 $-C_5^3 2^2 + C_5^2 2^3 = 40$. 故选 B.]

2. ACD [由二项式系数的性质知, $(a-b)^{11}$ 的展开式中的二项式系数之和为 $2^{11} = 2\ 048$, 故 A 正确;

因为 $(a-b)^{11}$ 的展开式共有 12 项, 中间两项的二项式系数最大, 即第 6 项和第 7 项的二项式系数最大, 故 C 正确, B 错误; 因为展开式中第 6 项的系数是负数, 且绝对值最大, 所以展开式中第 6 项的系数最小, 故 D 正确. 故选 ACD.]

3. ABC [二项展开式的通项为

$$T_{k+1} = C_n^k x^{2n-2k} (-1)^k x^{-\frac{k}{2}} = (-1)^k C_n^k x^{2n-\frac{5k}{2}},$$

由于第 3 项与第 5 项的系数之比为 3:14,

$$\text{则 } \frac{C_n^2}{C_n^4} = \frac{3}{14},$$

$$\text{故 } \frac{\frac{n(n-1)}{1 \times 2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}} = \frac{3}{14},$$

得 $n^2 - 5n - 50 = 0$, 解得 $n=10$ (负值舍去), 故 A 正确;

$$\text{则 } T_{k+1} = (-1)^k C_{10}^k x^{20-\frac{5k}{2}},$$

$$\text{令 } 20 - \frac{5k}{2} = 0, \text{ 解得 } k=8,$$

则展开式中的常数项为 $(-1)^8 C_{10}^8 = 45$, 故 B 正确;

$$\text{令 } 20 - \frac{5k}{2} = 5, \text{ 解得 } k=6,$$

则含 x^5 的项的系数为 $(-1)^6 C_{10}^6 = 210$, 故 C 正确;

$$\text{令 } 20 - \frac{5k}{2} \in \mathbf{Z}, \text{ 则 } k \text{ 为偶数},$$

此时 $k=0,2,4,6,8,10$, 故有 6 项为有理项, 故 D 错误. 故选 ABC.]

$$4. 1.105 \quad [1.01^{10} = (1+0.01)^{10} = 1 + C_{10}^1 \times 0.01 + C_{10}^2 \times 0.01^2 + C_{10}^3 \times 0.01^3 + \cdots \approx 1 + 0.1 + 0.0045 = 1.1045 \approx 1.105.]$$

第 71 课时 随机事件与概率

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1)样本空间 (2)必然事件 不可能事件

知识点 2 $A \subseteq B$ $A \cup B$ 或 $A+B$ $A \cap B$ 或 AB $A \cap B = \emptyset$ $A \cap B = \emptyset$ $A \cup B = \Omega$

知识点 3 (1)有限个 相等 (2) $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$

知识点 4 $P(A)+P(B) = 1-P(B)$ $P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

知识点 5 (1)稳定于

链教材·夯基固本

1. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ 5 [任选一个数, 共有 10 种不同选法, 故样本空间为 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, 其中偶数共有 5 种, 故“它是偶数”这一事件包含的样本点个数为 5.]

2. D [连续射击两次中靶的情况如下: ①两次都中靶; ②只有一次中靶; ③两次都没有中靶, 故选 D.]

3. C [互斥事件与对立事件都是两个事件的关系, 互斥事件是不可能同时发生的两个事件, 而对立事件除要求这两个事件不同时发生外, 还要求二者必须有一个发生. 因此, 对立事件是互斥事件的特殊情况, 而互斥事件未必是对立事件. 故选 C.]

4. $\frac{1}{5} \quad \frac{2}{5}$ [从 0~9 这 10 个数中随机选择一个数, 共有 10 种可能, 其样本空间可表示为 $\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. 若一个数的平方的个位数字为 1, 则该数为 1 或 9, 共 2 个, 故其概率为 $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$; 若一个数的四次方的个位数字为 1, 则该数平方的个位数字为 1 或 9, 所以该数为 1,3,7,9, 共 4 个, 故其概率为 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.]

5. $\frac{3}{10}$ [该试验的样本空间可表示为 $\Omega = \{(1,3,5), (1,3,7), (1,3,9), (1,5,7), (1,5,9), (1,7,9), (3,5,7), (3,5,9), (3,7,9), (5,7,9)\}$, 共有 10 个样本点, 其中能构成三角形的样本点有 $(3,5,7), (3,7,9), (5,7,9)$, 共 3 个, 故所求概率 $P = \frac{3}{10}$.]

6. (1)0.5 0.3 (2)0.8 0 [(1)如果 $B \subseteq A$, 那么 $A \cup B = A, A \cap B = B$, 所以 $P(A \cup B) = P(A) = 0.5, P(AB) = P(B) = 0.3$.

(2)如果 A, B 互斥, 那么 $A \cap B = \emptyset$, 所以 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.5 + 0.3 = 0.8, P(AB) = 0$.]

7.0.782 [总共 $50 \times 20 = 1\,000$ (次),

从全班情况看频率为 $\frac{782}{1\,000} = 0.782$,

由此估计钉尖朝上的概率为 0.782.]

考点深研·题型突破

考点一

考向 1 典例 1 (1)**C** (2)**B** [(1)从甲、乙、丙三位同学中随机抽选两位同学进行家访,所有的基本事件有(甲乙),(甲丙),(乙丙),对于 A, P 不一定发生,故不是必然事件;
对于 B, Q 可能发生,所以不是不可能事件;
对于 C, P 与 Q 不能同时发生,故 P 与 Q 是互斥事件;
对于 D, P 与 Q 不能同时发生,但 $P \cup Q$ 不是全部事件,所以不是对立事件,故选 C.
(2)对于 A,例如点数(1,2),满足题意要求,所以二者能同时发生,不是互斥事件,故 A 错误;
对于 B,点数之和为奇数,两数一奇一偶,点数之积为奇数,两数均为奇数,两事件不能同时发生,存在两数和为偶数且积为偶数的情况,所以二者互斥但不对立,故 B 正确;
对于 C,二者不能同时不发生,也不能同时发生,是对立事件,故 C 错误;
对于 D,二者能同时发生,不是互斥事件,如点数(4,2),故 D 错误.
故选 B.]

考向 2 典例 2 解: (1)易知 $P(A) = \frac{1}{1\,000}$, $P(B) = \frac{1}{100}$,

$$P(C) = \frac{1}{20}.$$

(2)1 张奖券中奖包含中特等奖或一等奖或二等奖. 设“1 张奖券中奖”为事件 M, 则 $M = A \cup B \cup C$. 因为 A, B, C 两两互斥, 所以 $P(M) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1+10+50}{1\,000} = \frac{61}{1\,000}$. 故 1 张奖券的中奖概率为 $\frac{61}{1\,000}$.

(3)设“1 张奖券不中特等奖且不中一等奖”为事件 N, 则事件 N 与“1 张奖券中特等奖或中一等奖”互为对立事件. 所以 $P(N) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{1\,000} - \frac{1}{100} = \frac{989}{1\,000}$. 故 1 张奖券不中特等奖且不中一等奖的概率为 $\frac{989}{1\,000}$.

多维变迁

- 1. ABC** [若事件 B 包含事件 A, 则 $P(A) \leq P(B)$, 故 A 正确;
若 A, B 为对立事件, 则 $P(A) + P(B) = 1$, 故 B 正确;
若 A, B 为互斥事件, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, 故 C 正确;
因为 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 所以当 A, B 互斥时, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, 故 D 错误, 故选 ABC.]
- 2. 0.11** [记“射中环数不够 7 环”为事件 D, 则事件 $\bar{D}$ 为“射中 10 环或 9 环或 8 环或 7 环”,
所以 $P(\bar{D}) = 0.21 + 0.23 + 0.25 + 0.2 = 0.89$,
所以 $P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - 0.89 = 0.11$.]

考向 3 典例 3 AB [随机事件 A 的概率是频率的稳定值, 频率是概率的近似值, 故 A 正确;
抛掷骰子 100 次, 得点数是 1 的结果是 18 次, 则出现 1 点的频率是 $\frac{18}{100} = \frac{9}{50}$, 故 B 正确;
有一批产品, 其次品率为 0.05, 若从中任取 200 件产品, 则不一定抽取到 190 件正品和 10 件次品, 故 C 错误;

100 次并不是无穷多次, 抛掷一枚质地均匀的硬币 100 次, 有 51 次出现了正面, 则不能得出抛掷一次该硬币出现正面的概率是 0.51, 故 D 错误. 故选 AB.]

考点二

典例 4 (1)**C** (2) $\frac{3}{5} - \frac{1}{2}$ [(1)由题意, 从 4 辆燃油车和 2 辆

新能源车中随机选出 3 辆, 有 $C_6^3 = 20$ (种)情况,
选出的 3 辆中至少有 1 辆新能源车, 有 $C_6^3 - C_4^3 = 16$ (种)情况,
所以选出的 3 辆中至少有 1 辆新能源车的概率为 $\frac{16}{20} = \frac{4}{5}$.
故选 C.

(2)**法一:**列举法

从五个活动中选三个的情况有
ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE, 共 10 种情况,
其中甲选到 A 有 6 种可能情况: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE,

则甲选到 A 的概率为 $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

乙选 A 活动有 6 种可能情况: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE,

其中再选择 B 有 3 种可能情况: ABC, ABD, ABE,

故乙选了 A 活动, 他再选择 B 活动的概率为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

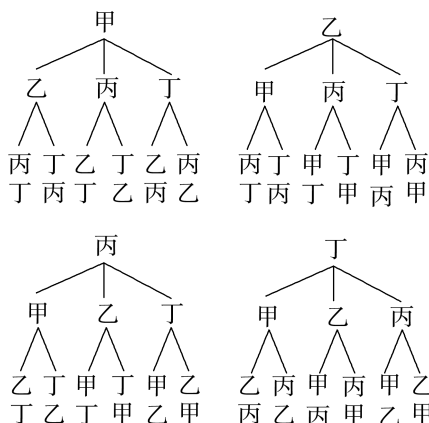
法二:设甲、乙选到 A 为事件 M, 乙选到 B 为事件 N,

则甲选到 A 的概率为 $P(M) = \frac{C_4^2}{C_5^2} = \frac{3}{5}$.

乙选了 A 活动, 他再选择 B 活动的概率为 $P(N|M) = \frac{C_3^1}{C_4^1} = \frac{1}{4}$.
 $\frac{P(MN)}{P(M)} = \frac{C_3^1}{C_4^1} = \frac{1}{4}$.]

多维变迁

B [画出树状图:



甲、乙、丙、丁四人排成一列共有 24 种排法, 其中丙不在排头, 且甲或乙在排尾的排法共有 8 种, 所以所求概率为 $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.
故选 B.]

考点三

典例 5 解: 设事件 A = “不派出医生”, 事件 B = “派出 1 名医生”, 事件 C = “派出 2 名医生”, 事件 D = “派出 3 名医生”, 事件 E = “派出 4 名医生”, 事件 F = “派出 5 名或 5 名以上医

梳必备·破题有方

知识点1 (1) $P(A)P(B)$ (2) B 知识点2 (2) $P(A)P(B|A)$

$$(3) 1 - 0 \leq P(B|A) \leq 1 \quad P(B|A) + P(C|A) \\ 1 - P(B|A)$$

知识点3 $\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$

链教材·夯基固本

1. C [掷两枚质地均匀的骰子, A = “第一枚出现奇数点”, B = “第二枚出现偶数点”, 事件 A 与 B 能同时发生, 故事件 A 与 B 既不是互斥事件, 也不是对立事件, 故 A, B 错误; $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(AB) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, 因为 $P(A) \cdot P(B) = P(AB)$, 所以 A 与 B 相互独立, 故 C 正确; 事件 A 与 B 不相等, 故 D 错误. 故选 C.]

2. A [甲、乙两人射击时相互独立, 则他们都中靶的概率为 $0.8 \times 0.7 = 0.56$.]

3. $\frac{18}{19}$ [由题意, 设该节能灯使用寿命超过 10 000 h 为事件 A , 则事件 A 的概率 $P(A) = 0.95$; 设该节能灯使用寿命超过 12 000 h 为事件 B , 则事件 B 的概率 $P(B) = 0.9$, 则 $P(AB) = P(B) = 0.9$, 所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.9}{0.95} = \frac{18}{19}$.]

4. 0.7 [设 A_1 = “第 1 天去 A 餐厅用餐”, B_1 = “第 1 天去 B 餐厅用餐”, A_2 = “第 2 天去 A 餐厅用餐”, 则 $\Omega = A_1 \cup B_1$, 且 A_1 与 B_1 互斥, 根据题意得, $P(A_1) = P(B_1) = 0.5$, $P(A_2|A_1) = 0.6$, $P(A_2|B_1) = 0.8$, 由全概率公式, 得 $P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(B_1)P(A_2|B_1) = 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.8 = 0.7$. 因此, 王同学第 2 天去 A 餐厅用餐的概率为 0.7.]

5. D [因为 $P(\bar{N}|M) = 0.5$, 由对立事件概率计算公式可得, $P(N|M) = 1 - 0.5 = 0.5$, 则 $P(MN) = P(M)P(N|M) = 0.4 \times 0.5 = 0.2$. 故选 D.]

考点深研·题型突破

考点一

考向1 典例1 B [事件甲发生的概率 $P(\text{甲}) = \frac{1}{6}$, 事件乙发生的概率 $P(\text{乙}) = \frac{1}{6}$, 事件丙发生的概率 $P(\text{丙}) = \frac{5}{6 \times 6} = \frac{5}{36}$, 事件丁发生的概率 $P(\text{丁}) = \frac{6}{6 \times 6} = \frac{1}{6}$. 事件甲与事件丙同时发生的概率为 0, $P(\text{甲丙}) \neq P(\text{甲})P(\text{丙})$, 故 A 错误; 事件甲与事件丁同时发生的概率为 $\frac{1}{6 \times 6} = \frac{1}{36}$, $P(\text{甲丁}) = P(\text{甲})P(\text{丁})$, 故 B 正确; 事件乙与事件丙同时发生的概率为 $\frac{1}{6 \times 6} = \frac{1}{36}$, $P(\text{乙丙}) \neq P(\text{乙})P(\text{丙})$, 故 C 错误; 事件丙与事件丁是互斥事件, 不是相互独立事件, 故 D 错误. 故选 B.]

生”, 则事件 A, B, C, D, E, F 彼此互斥, 且 $P(A) = 0.1$, $P(B) = 0.16$, $P(C) = 0.3$, $P(D) = 0.2$, $P(E) = 0.2$, $P(F) = 0.04$.

(1) “派出医生至多 2 人”的概率为 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0.1 + 0.16 + 0.3 = 0.56$.

(2) 法一: “派出医生至少 2 人”的概率为 $P(C \cup D \cup E \cup F) = P(C) + P(D) + P(E) + P(F) = 0.3 + 0.2 + 0.2 + 0.04 = 0.74$.

法二: “派出医生至少 2 人”的概率为 $1 - P(A \cup B) = 1 - (0.1 + 0.16) = 0.74$.

随堂·对点检测

1. C [对于选项 A, 若 $A \subseteq B \subseteq C$, 则 $P(A \cup B \cup C) = P(C) = 0.6 < 1$,

所以 $A \cup B \cup C$ 不是必然事件, 故 A 错误;

对于选项 B, 若 $A \subseteq B$, 则 $P(A \cap B) = P(A) = 0.4 \neq 0$, 所以 A 与 B 不是互斥事件, 故 B 错误;

对于选项 C, 由 $(A \cap B) \subseteq A$, 得 $P(A \cap B) \leq P(A) = 0.4$, 故 C 正确;

对于选项 D, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.9 - P(A \cap B)$,

而 $P(A \cap B) \geq 0$,

所以 $P(A \cup B) \leq 0.9$, 故 D 错误.

故选 C.]

2. B [对于 A, 抛掷一枚硬币, 正面朝上的概率为 0.5, 为定值, 故 A 错误;

对于 B, 甲同学的试验中, 正面朝上的频率为 0.517, 反面朝上的频率为 0.483, 故 B 正确;

对于 C, 抛掷一枚硬币, 反面朝上的概率为 0.5, 故 C 错误;

对于 D, 甲同学的试验中, 正面朝上的频率就是 0.517, 而不是接近 0.517, 故 D 错误.

故选 B.]

3. D [根据题意可知, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{3}$,

又 $P(A) = 3P(B)$,

所以 $P(B) = \frac{1}{6}$, 则 $P(\bar{B}) = \frac{5}{6}$.

故选 D.]

4. ACD [因为事件 A, B, C 两两互斥, 所以 $P(B \cap C) = 0$, 故 D 正确; 由 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{5} + P(B) = \frac{8}{15}$, 得

$P(B) = \frac{1}{3}$, 故 A 正确; 由 $P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{1}{5} +$

$P(C) = \frac{9}{20}$, 得 $P(C) = \frac{1}{4}$, 故 B 错误; $P(B \cup C) = P(B) +$

$P(C) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$, 故 C 正确. 故选 ACD.]

5. $\frac{5}{16}$ [根据题意, 设 A = “被选取的整数是质数”, 大于 1 且小于 50 的整数共有 48 个,

其中质数包含 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 共 15 个,

故 $P(A) = \frac{15}{48} = \frac{5}{16}$.]

考向 2 典例 2 解: 设甲、乙、丙三个小组攻克该技术难题分别为事件 A, B, C , 即 $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{2}{3}$, 且 A, B, C 相互独立.

(1) 甲、乙、丙三个小组均受到奖励的概率为 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.

(2) 只有甲小组受到奖励的概率为 $P(\overline{ABC}) = P(A)P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

(3) 设受到奖励的小组数为 X , 则 $P(X=2) = P(A)P(B)P(\overline{C}) + P(A)P(\overline{B})P(C) + P(\overline{A})P(B)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{12}$.

所以受到奖励的小组数是 2 的概率为 $\frac{5}{12}$.

考点二

典例 3 (1) D (2) A [(1) 由题意知 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A+B) = 0.6 + 0.7 - 0.9 = 0.4$,

所以 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.4}{0.7} = \frac{4}{7}$. 故选 D.

(2) 事件 A 表示“两个家庭至少一个家庭选择沈阳博物馆”, 事件 B 表示“两个家庭选择景点不同”, 两个家庭共有 $3^2 = 9$ (种) 选择,

则 $P(AB) = \frac{C_2^1 C_2^1}{9} = \frac{4}{9}$,

$P(A) = 1 - \frac{2^2}{9} = \frac{5}{9}$,

则 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{5}$.

故选 A.]

多维变迁

1. **A** [在不超过 20 的自然数中, 素数有 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 共 8 个, 其中“孪生素数”有 3 和 5, 5 和 7, 11 和 13, 17 和 19, 共 4 种情况,

则 $P(\overline{B}|A) = \frac{n(\overline{AB})}{n(A)} = \frac{4}{C_8^2} = \frac{1}{7}$,

故 $P(B|A) = 1 - P(\overline{B}|A) = \frac{6}{7}$.

故选 A.]

2. **ABD** [$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, 而 $P(A)$ 与

$P(B)$ 不一定相等, 故 A 不正确;

当 B, C 为互斥事件时, 等式成立, 故 B 不正确;

由概率的乘法公式知 C 正确;

$P(B|A)P(A) = P(AB) \leq P(A) + P(B)$, 故 D 不正确. 故选 ABD.]

考点三

典例 4 A [设事件 A 表示“随机抽一名教师, 该教师喜欢跑步”, 事件 B_1, B_2, B_3 分别表示“抽到的教师来自高一、高二、高三年级”,

由题意知 $P(B_1) = \frac{3}{3+3+4} = 0.3, P(B_2) = \frac{3}{3+3+4} = 0.3$,

$P(B_3) = \frac{4}{3+3+4} = 0.4$,

$P(A|B_1) = 0.4, P(A|B_2) = 0.3, P(A|B_3) = 0.35$,

根据全概率公式知 $P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) = 0.3 \times 0.4 + 0.3 \times 0.3 + 0.4 \times 0.35 = 0.35$. 故选 A.]

多维变迁

1. **C** [设事件 A 表示该园区水质每日发生化学污染, 事件 B 表示该监测系统每日发生警报,

由题意, 可得 $P(A) = 0.1, P(\overline{A}) = 0.9, P(B|A) = 0.95, P(B|\overline{A}) = 0.05$,

所以 $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = 0.1 \times 0.95 + 0.9 \times 0.05 = 0.14$.

故选 C.]

2. **解:** (1) 从该地区小学生中随机抽取 1 人, 该生感染甲型流感的概率为 $\frac{1}{2}$,

从该地区初中生中随机抽取 1 人, 该生感染甲型流感的概率为 $\frac{1}{8}$,

所以这 2 人中至多有一人感染甲型流感的概率为 $1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{15}{16}$.

(2) 设 A = “抽到小学生”, B = “抽到初中生”, C = “抽到高中生”, D = “该生感染甲型流感”,

则 $P(A) = \frac{5}{12}, P(B) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{4}$,

$P(D|A) = \frac{1}{2}, P(D|B) = \frac{1}{8}, P(D|C) = \frac{1}{12}$,

所以由全概率公式可知,

$P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) = \frac{5}{12} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} = \frac{13}{48}$.

所以该生感染甲型流感的概率为 $\frac{13}{48}$.

随堂·对点检测

1. **AB** [由于摸球过程是有放回地, 所以第一次摸球的结果对第二次摸球的结果没有影响, 故事件 A 与 B, A 与 C 均相互独立, 且 A 与 B, A 与 C 均有可能同时发生, 说明 A 与 B, A 与 C 均不互斥. 故选 AB.]

2. **A** [根据题意可知, 甲投中的概率为 0.7, 乙投中的概率为 0.8,

则甲、乙两人恰好有一人投中的概率为 $0.7 \times (1 - 0.8) + 0.8 \times (1 - 0.7) = 0.38$.

故选 A.]

3. **D** [由题意知, 事件 M 包含的基本事件有 30 个, 则 $P(M) = \frac{30}{6^2} = \frac{5}{6}$,

事件 MN 包含的基本事件有 8 个,

则 $P(MN) = \frac{8}{6^2} = \frac{2}{9}$,

所以 $P(N|M) = \frac{P(MN)}{P(M)} = \frac{4}{15}$.

故选 D.]

4. $\frac{1}{4}$ [$\because P(B|A) = \frac{3}{4}, P(A) = \frac{1}{3}$,

$\therefore P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.]

5. $\frac{3}{4}$ [设输入的问题表达清晰为事件 A, 回答被采纳为事件 B,

$$\text{则 } P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, P(\bar{A}) = \frac{1}{4},$$

$$P(B|A) = \frac{8}{9}, P(B|\bar{A}) = \frac{1}{3},$$

$$\text{根据全概率公式, } P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{4}.$$

第 73 课时 离散型随机变量及其分布列、数字特征

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1)唯一 (2)一一列举

知识点 2 (2) ≥ 1

知识点 3 (1) $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$

$$\sum_{i=1}^n x_i p_i \quad \text{均值 期望 平均水平} \quad aE(X) + b \quad p$$

$$(2) \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i \quad \text{偏离程度} \quad \sqrt{D(X)} \quad a^2 D(X) \quad p(1-p)$$

链教材·夯基固本

1. D [第一枚与第二枚的点数之差大于 4, 只有 D 项符合.]

2. C [因为随机变量 X 的可能取值为 1, 2, ..., n, 并且取 1, 2, ..., n 是等可能的,

$$\text{所以 } P(X < 4) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{3}{n} = 0.3, \text{解得 } n=10. \text{ 故选 C.}]$$

3. 2.8 10.4 [E(X) = 1 \times 0.1 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.4 + 4 \times 0.1 + 5 \times 0.1 = 2.8, E(3X+2) = 3E(X) + 2 = 3 \times 2.8 + 2 = 10.4.]

4. 0.84 $\frac{2\sqrt{21}}{5}$ [由题意知 E(X) = 1 \times 0.2 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.4 + 4 \times 0.1 = 2.4, 所以 D(X) = (1-2.4)^2 \times 0.2 + (2-2.4)^2 \times 0.3 + (3-2.4)^2 \times 0.4 + (4-2.4)^2 \times 0.1 = 0.84, D(2X+7) = 4D(X) = 4 \times 0.84 = 3.36, \sigma(2X+7) = \sqrt{3.36} = \frac{2\sqrt{21}}{5}.]

5. $\frac{91}{6}$ [因为 E(X) = $\frac{7}{2}$, D(X) = $\frac{35}{12}$,

$$\text{由 } D(X) = E(X^2) - (E(X))^2,$$

$$\text{得 } E(X^2) = D(X) + (E(X))^2 = \frac{35}{12} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6}.$$

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1) A (2) ABD [(1) 由分布列的性质得,

$$\begin{cases} 0 \leq 4a - 1 \leq 1, \\ 0 \leq 3a^2 + a \leq 1, \\ 4a - 1 + 3a^2 + a = 1, \end{cases} \quad \text{解得 } a = \frac{1}{3}. \text{ 故选 A.}$$

(2) 因为 0.1 + 0.2 + 0.4 + 0.2 + a = 1, 解得 a = 0.1, 故 A 正确;

由分布列知 P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0.1 + 0.2 + 0.4 = 0.7, 故 B 正确;

P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) = 0.2 + 0.1 = 0.3, 故 C 错误;

P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0.1 + 0.2 = 0.3, 故 D 正确.

故选 ABD.]

多维变迁

1. C [根据题意, P(\xi \geq 2) = 0.9, 则 P(\xi < 2) = 1 - 0.9 = 0.1, 又由 \eta = 3\xi + 1, 则 P(\eta < 7) = P(\xi < 2) = 0.1, 故选 C.]

2. ACD [由 P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = $\frac{a}{2} + \frac{a}{6} +$

$$\frac{a}{12} = 1, \text{解得 } a = \frac{4}{3}, \text{故 A 正确};$$

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{a}{6} + \frac{a}{12} = \frac{a}{4} = \frac{1}{3}, \text{故 B}$$

错误;

$$P(X^2 < 3) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{a}{2} + \frac{a}{6} = \frac{2a}{3} = \frac{8}{9}, \text{故 C}$$

正确;

由 B 项的分析, 知 P(X \geq 1) = $\frac{1}{3}$, 所以 0 \leq m < 1, 故 D 正确.

故选 ACD.]

考点二

典例 2 解: (1) 因为两次抽奖相互独立, 记“第 2 次抽到一等奖”为事件 A, 则 P(A) = $\frac{1}{5}$.

(2) 由题意知 Y 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4,

$$P(Y=4) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{25}, P(Y=3) = 2 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times 2 =$$

$$\frac{4}{25}, P(Y=2) = 3 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times 2 = \frac{6}{25}, P(Y=1) = 4 \times \frac{1}{5} \times$$

$$\frac{1}{5} \times 2 = \frac{8}{25}, P(Y=0) = 5 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5},$$

所以 Y 的分布列为

Y	4	3	2	1	0
P	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{5}$

$$\text{所以 } E(Y) = 4 \times \frac{2}{25} + 3 \times \frac{4}{25} + 2 \times \frac{6}{25} + 1 \times \frac{8}{25} + 0 \times \frac{1}{5} = \frac{8}{5}.$$

多维变迁

1. ABD [依题意, a + b + c = 3b = 0.75, 解得 b = 0.25, a + c =

$$0.5, D\left(\frac{1}{4}X + 1\right) = \frac{1}{16}D(X), \text{A 正确};$$

$$P(|X|=1) = P(X=-1) + P(X=1) = a + c = 0.5, \text{B 正确};$$

E(X) = -a + c + 0.5 = 1 - 2a, 则 E(aX) = aE(X) = a(1 - 2a) = 0.08, 解得 a = 0.1 或 a = 0.4, C 错误; 当 a = 0.3, c = 0.2 时, a - c = 0.1, D 正确. 故选 ABD.]

2. 解: (1) X 的可能取值为 0, 1, 2,

$$P(X=0) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}, P(X=1) = \frac{C_3^1 C_7^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}, P(X=2) =$$

$$\frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{15},$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$(2) \text{由 (1) 知, } E(X) = 0 \times \frac{7}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{3}{5},$$

$$\text{所以 } D(X) = \frac{7}{15} \times \left(0 - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{7}{15} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{15} \times$$

$$\left(2 - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{28}{75}.$$

考点三

典例 3 解: (1) 甲投篮 3 次得 2 分, 即只投进 1 次, 概率为 $P =$

$$C_3^1 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}.$$

(2) 由题意, 知 X 的所有可能取值为 0, 2, 4, 6.

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{50}, P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} +$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{25},$$

$$P(X=4) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} =$$

$$\frac{8}{25}, P(X=6) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{50}.$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	2	4	6
P	$\frac{9}{50}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{9}{50}$

$$E(X) = 0 \times \frac{9}{50} + 2 \times \frac{8}{25} + 4 \times \frac{8}{25} + 6 \times \frac{9}{50} = 3.$$

(3) 设甲投篮 3 次的得分为 Y , 则 $Y = 0, 2, 4, 6$, 且 $\frac{Y}{2} \sim$

$$B\left(3, \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{所以 } E(Y) = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3, D(Y) = 2^2 \times 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 3.$$

$$\text{由 (2), 得 } D(X) = 0^2 \times \frac{9}{50} + 2^2 \times \frac{8}{25} + 4^2 \times \frac{8}{25} + 6^2 \times \frac{9}{50} - 3^2 = \frac{97}{25}.$$

因为 $E(X) = E(Y)$, $D(X) > D(Y)$, $P(X=6) > P(Y=6) = \frac{1}{8}$, 所以从最终得分的均值方面分析, 甲、乙两人的投篮水平

相当; 从最终得分的方差方面分析, 甲的投篮水平更稳定; 从概率方面分析, 乙得 6 分的可能性更大. (答案不唯一, 言之有理即可)

多维变迁

解: (1) 由题意得, X 的所有可能取值为 0, 20, 100,

$$P(X=0) = 1 - 0.8 = 0.2,$$

$$P(X=20) = 0.8 \times (1 - 0.6) = 0.32,$$

$$P(X=100) = 0.8 \times 0.6 = 0.48,$$

所以 X 的分布列为

X	0	20	100
P	0.2	0.32	0.48

(2) 当小明先回答 A 类问题时, 由 (1) 可得 $E(X) = 0 \times 0.2 + 20 \times 0.32 + 100 \times 0.48 = 54.4$.

当小明先回答 B 类问题时, 记 Y 为小明的累计得分,

则 Y 的所有可能取值为 0, 80, 100,

$$P(Y=0) = 1 - 0.6 = 0.4,$$

$$P(Y=80) = 0.6 \times (1 - 0.8) = 0.12,$$

$$P(Y=100) = 0.6 \times 0.8 = 0.48,$$

所以 Y 的分布列为

Y	0	80	100
P	0.4	0.12	0.48

$$E(Y) = 0 \times 0.4 + 80 \times 0.12 + 100 \times 0.48 = 57.6.$$

因为 $57.6 > 54.4$, 即 $E(Y) > E(X)$, 所以为使累计得分的期望最大, 小明应选择先回答 B 类问题.

微点突破 14

典例 4 (1) D (2) B [(1) 由题意可知, $E(X) = 0 \times \frac{1}{3} +$

$$\frac{1}{3}a + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{a+2}{3}, \text{ 所以 } D(X) = \left(0 - \frac{a+2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} +$$

$$\left(a - \frac{a+2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(2 - \frac{a+2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \left[\frac{(a+2)^2}{9} +$$

$$\frac{(2a-2)^2}{9} + \frac{(4-a)^2}{9}\right] = \frac{2}{9}[(a-1)^2 + 3],$$

又因为 $0 < a < 2$,

所以当 $a \in (0, 1)$ 时, $D(X)$ 随着 a 的增大而减小; 当 $a \in (1, 2)$ 时, $D(X)$ 随着 a 的增大而增大.

故选 D.

(2) 因为 $a + b + c = 1$, 且 $a = b + c$,

$$\text{所以 } \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = \frac{1}{2} - c, \end{cases}$$

$$\text{可得 } 0 < c < \frac{1}{2},$$

$$\text{此时 } E(X) = 1 \times b - 1 \times c = \frac{1}{2} - 2c,$$

$$\text{所以 } D(X) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 2c\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - c\right) \times$$

$$\left(1 - \frac{1}{2} + 2c\right)^2 + c \times \left(-1 - \frac{1}{2} + 2c\right)^2 = \frac{1}{8} - c + 2c^2 +$$

$$\left(\frac{1}{2} - c\right)\left(\frac{1}{4} + 2c + 4c^2\right) + c \times \left(\frac{9}{4} - 6c + 4c^2\right) = -4c^2 +$$

$$2c + \frac{1}{4} = -4\left(c - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2},$$

则当 $c = \frac{1}{4}$ 时, $D(X)$ 取得最大值, 最大值为 $\frac{1}{2}$.

故选 B.]

随堂·对点检测

1. A [由离散型随机变量 X 的分布列, 得 $0.3 - q + 0.12 + 0.9 - 2q + 0.16 = 1$, 解得 $q = 0.16$,

满足 $0.3 - q > 0, 0.9 - 2q > 0$,

$\therefore q = 0.16$, 故选 A.]

2. C [因为 $E(3X+1) = 10$,

$$\text{所以 } 3E(X) + 1 = 10,$$

$$\text{解得 } E(X) = 3,$$

$$\text{因为 } D(\sqrt{2}X + \sqrt{2}) = 2,$$

$$\text{所以 } 2D(X) = 2, \text{ 解得 } D(X) = 1.$$

故选 C.]

3. 乙 [$E(X) = 0 \times 0.4 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.1 = 1$, $E(Y) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.2 = 0.9$,

$$\therefore E(Y) < E(X),$$

$\therefore$ 乙技术较好.]

4. $\frac{61}{25}$ [X 的所有可能取值为 1, 2, 3, 则 $P(X=1) = C_5^1 \left(\frac{1}{5}\right)^3 =$

$$\frac{5}{125} = \frac{1}{25}, P(X=2) = C_5^2 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times 6 = \frac{60}{125} = \frac{12}{25}, P(X=3) =$$

$$C_5^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times 6 = \frac{60}{125} = \frac{12}{25}, \text{ 所以 } X \text{ 的分布列为}$$

X	1	2	3
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{12}{25}$

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times \frac{1}{25} + 2 \times \frac{12}{25} + 3 \times \frac{12}{25} = \frac{61}{25}.$$

第 74 课时 二项分布、超几何分布与正态分布

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1)两个可能 n 重伯努利试验 (2) $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ 二项分布 $B(n, p)$ (3) np $np(1-p)$

知识点 3 (1)正态密度曲线 (2) $x=\mu$ $x=\mu$

1 (3) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (4)0.682 7 0.954 5 0.997 3

(5) μ σ^2

链教材·夯基固本

1. B [因为随机变量 $X \sim B(6, \frac{1}{3})$,

$$\text{所以 } D(X) = 6 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

故选 B.]

2. $\frac{63}{256}$ [设事件 A = “正面朝上”, 则 $P(A) = 0.5$. 用 X 表示事件 A 发生的次数, 则 $X \sim B(10, 0.5)$, 恰好出现 5 次正面朝上等价于 $X=5$, 于是 $P(X=5) = C_{10}^5 \times 0.5^{10} = \frac{252}{1\,024} = \frac{63}{256}$.]

3. $\frac{56}{165}$ [总共有 C_{12}^4 种选法, 甲班有 4 名候选人, 选择 2 名甲班同学和 2 名其他班同学的选法种数为 $C_4^2 C_8^2$, 则甲班恰有 2 名同学被选到的概率为 $\frac{C_4^2 C_8^2}{C_{12}^4} = \frac{56}{165}$.]

4. B [与 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 中对比可知 $\sigma=2$. 故选 B.]

$$5. f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad 0.5 \quad 0.682\,7 \quad 0.158\,7$$

[由题意知随机变量 $X \sim N(0, 1)$, 则 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \text{ 因为 } P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.682\,7, \text{ 根据}$$

正态密度曲线的对称性, 可得 $P(X \leq 0) = 0.5$, 所以 $P(|X| \leq 1) = P(-1 \leq X \leq 1) \approx 0.682\,7$, $P(X > 1) \approx \frac{1 - 0.682\,7}{2} \approx 0.158\,7$.]

6. 0.341 35 [由题意知随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.682\,7$, 根据正态密度曲线的对称性, 可得 $P(\mu \leq X \leq \mu + \sigma) = \frac{1}{2} P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx \frac{1}{2} \times 0.682\,7 = 0.341\,35$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 解: (1)由题意可得投到该杂志社的 1 篇稿件初审直接被录用的概率 $P_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

投到该杂志社的 1 篇稿件初审没有被录用, 复审被录用的概

$$\text{率 } P_2 = C_2^1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

故投到该杂志社的 1 篇稿件被录用的概率 $P = P_1 + P_2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$.

(2)由题意可知 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 且 $X \sim B\left(3, \frac{2}{9}\right)$,

$$P(X=0) = C_3^0 \times \left(\frac{7}{9}\right)^3 = \frac{343}{729},$$

$$P(X=1) = C_3^1 \times \frac{2}{9} \times \left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{98}{243},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{2}{9}\right)^2 \times \frac{7}{9} = \frac{28}{243},$$

$$P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{2}{9}\right)^3 = \frac{8}{729}.$$

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{343}{729}$	$\frac{98}{243}$	$\frac{28}{243}$	$\frac{8}{729}$

$$\text{故 } E(X) = 0 \times \frac{343}{729} + 1 \times \frac{98}{243} + 2 \times \frac{28}{243} + 3 \times \frac{8}{729} = \frac{2}{3}. \left(\text{或 } E(X) = 3 \times \frac{2}{9} = \frac{2}{3}\right)$$

多维变迁

1. B [质点从原点 O 出发, 移动到 1 处时, 向左移动了一次, 向右移动了两次,

记向左移动的次数为 X ,

$$\text{则 } P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

即经过 3 次移动后, 该质点位于 1 处的概率为 $\frac{4}{9}$.

故选 B.]

2. BCD [由 $X \sim B\left(6, \frac{1}{3}\right)$, 得 $P(X=k) =$

$$C_6^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{6-k}, k=0, 1, \dots, 6,$$

$$E(X) = 6 \times \frac{1}{3} = 2, D(X) = 6 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

对于 A, $P(X=2) = C_6^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 > C_6^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = P(X=4)$, 选项 A 错误;

对于 B, 由 $2X+Y=8$, 得 $Y=8-2X$,

则 $E(Y) = 8 - 2E(X) = 4$, 选项 B 正确;

对于 C, $D(Y) = D(8-2X) = 4D(X) = 4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$, 选项 C 正确;

对于 D, $E(X^2) = D(X) + (E(X))^2 = \frac{4}{3} + 2^2 = \frac{16}{3}$, 选项 D 正确.

故选 BCD.]

考点二

典例 2 解: (1)设事件 A 为“取出的是红球”, 事件 B_1 为“取到甲袋”, 事件 B_2 为“取到乙袋”,

因为甲袋中有 4 个红色小球, 2 个白色小球, 乙袋中有 3 个红色小球, 1 个白色小球,

$$\text{所以 } P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}, P(A|B_1) = \frac{2}{3}, P(A|B_2) = \frac{3}{4},$$

则 $P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2) \cdot$

$$P(A|B_2)=\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{17}{24}.$$

(2) 若将甲、乙两袋合为一袋,

此时共有 7 个红球和 3 个白球,

所以 X 的可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0)=\frac{C_7^0 C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120},$$

$$P(X=1)=\frac{C_7^1 C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{40},$$

$$P(X=2)=\frac{C_7^2 C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{21}{40},$$

$$P(X=3)=\frac{C_7^3 C_3^0}{C_{10}^3}=\frac{7}{24},$$

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{24}$

$$\text{故 } E(X)=0 \times \frac{1}{120} + 1 \times \frac{7}{40} + 2 \times \frac{21}{40} + 3 \times \frac{7}{24} = \frac{21}{10}.$$

多维变迁

解: (1) 记“取出的产品中次品不超过 1 件”为事件 A ,

$$\text{则 } P(A)=P(X=0)+P(X=1)$$

$$=\frac{C_3^0 C_{17}^{10}}{C_{20}^{10}} + \frac{C_3^1 C_{17}^9}{C_{20}^{10}} = \frac{2}{19} + \frac{15}{38} = \frac{19}{38} = \frac{1}{2},$$

即取出的产品中次品不超过 1 件的概率是 $\frac{1}{2}$.

$$(2) \because f(n)=P(X=3)=\frac{C_n^3 C_{20-n}^7}{C_{20}^{10}},$$

$$\therefore f(n-1)=\frac{C_{n-1}^3 C_{21-n}^7}{C_{20}^{10}},$$

$$\text{若 } \frac{f(n)}{f(n-1)} = \frac{C_n^3 C_{20-n}^7}{C_{n-1}^3 C_{21-n}^7} = \frac{n(14-n)}{(n-3)(21-n)} > 1,$$

则 $n(14-n) > (n-3)(21-n)$, 解得 $n < 6.3$;

故当 $n < 6.3$ 时, $f(n) > f(n-1)$; 当 $n > 6.3$ 时, $f(n) < f(n-1)$.

故当 $n=6$ 时, $f(n)$ 取得最大值.

考点三

考向 1 典例 3 D [对于 A, σ 越小, 正态分布的图象越瘦长, 总体分布越集中在对称轴附近, 故 A 正确. 对于 B, C , 由于正态分布图象的对称轴为 $\mu=10$, 显然 B, C 正确. D 显然错误. 故选 D .]

考向 2 典例 4 BC [因为 $X \sim N(1.8, 0.1^2)$, 所以 $P(X > 2) = P(X > 1.8 + 2 \times 0.1)$.

因为 $P(X < 1.8 + 0.1) \approx 0.8413$,

所以 $P(X > 1.8 + 0.1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587 < 0.2$,

而 $P(X > 2) = P(X > 1.8 + 2 \times 0.1) < P(X > 1.8 + 0.1) < 0.2$, B 正确, A 错误.

依题可知, $\bar{x}=2.1, s^2=0.01$,

所以 $Y \sim N(2.1, 0.1^2)$,

故 $P(Y > 2) = P(Y > 2.1 - 0.1) = P(Y < 2.1 + 0.1)$

$\approx 0.8413 > 0.5$, C 正确, D 错误.

故选 BC .]

考向 3 典例 5 解: (1) $\mu = \frac{1}{10} \times (87+87+88+92+95+97+$

$$98+99+103+104) = 95, \sigma^2 = \frac{1}{10} \times (64+64+49+9+0+$$

$$4+9+16+64+81) = 36, \text{ 则 } \sigma=6.$$

$$(2) \textcircled{1} \text{ 因为 } Z \sim N(95, 6^2), \text{ 所以 } P(Z > 107) = P(Z > \mu + 2\sigma) \approx 0.5 - \frac{0.9545}{2} = 0.02275.$$

故 $X \sim B(10, 0.02275)$, 所以 $D(X) = 10 \times 0.02275 \times (1 - 0.02275) \approx 0.2223$.

所以 $D(2X+1) = 4D(X) \approx 0.89$.

$\textcircled{2}$ 因为 $Z \sim N(95, 6^2)$, 所以 $P(77 \leq Z \leq 113) = P(\mu - 3\sigma \leq Z \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$.

所以 5 个零件的内径中恰有一个不在 $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 内发生的概率小于 0.3%, 为小概率事件.

因为 $76 \notin [77, 113]$, 所以根据 3σ 原则, 需要进一步调试.

微点突破 15

典例 6 解: (1) 质量超过 505 克的产品的频率为 $5 \times 0.05 + 5 \times 0.01 = 0.3$, 所以质量超过 505 克的产品数量为 $20 \times 0.3 = 6$ (件).

(2) 质量超过 505 的产品数量为 6 件, 则质量未超过 505 克的产品数量为 14 件,

X 的取值可能为 0, 1, 2, 3, X 服从超几何分布,

$$P(X=0)=\frac{C_{14}^3}{C_{20}^3}=\frac{364}{1140}=\frac{91}{285},$$

$$P(X=1)=\frac{C_6^1 C_{14}^2}{C_{20}^3}=\frac{6 \times 91}{1140}=\frac{91}{190},$$

$$P(X=2)=\frac{C_6^2 C_{14}^1}{C_{20}^3}=\frac{15 \times 14}{1140}=\frac{7}{38},$$

$$P(X=3)=\frac{C_6^3}{C_{20}^3}=\frac{20}{1140}=\frac{1}{57},$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{91}{285}$	$\frac{91}{190}$	$\frac{7}{38}$	$\frac{1}{57}$

(3) 由质量超过 505 克的产品的频率为 0.3,

故可估计从该流水线上任取 1 件产品质量超过 505 克的产品的概率为 0.3,

从流水线上任取 5 件产品互不影响, 该问题可看成 5 次独立重复试验, 即 $Y \sim B(5, 0.3)$,

则 $E(Y) = 5 \times 0.3 = 1.5, D(Y) = 5 \times 0.3 \times (1 - 0.3) = 1.05$.

随堂·对点检测

1. **B** [由随机变量 $X \sim N(90, 10^2)$,

$$\text{可得 } P(X \geq 80) = P(80 \leq X < 90) + P(X \geq 90) \approx \frac{1}{2} \times 0.6827 + 0.5 = 0.84135, \text{ 故选 B.}]$$

2. **D** [由题意知, 第 12 次取到红球, 前 11 次中恰有 9 次取到红球, 2 次取到白球, 由每次取到红球的概率为 $\frac{3}{8}$, 取到白球的

$$\text{概率为 } \frac{5}{8}, \text{ 得 } P(X=12) = C_{11}^9 \left(\frac{3}{8}\right)^9 \times \left(\frac{5}{8}\right)^2 \times \frac{3}{8} = C_{11}^9 \left(\frac{3}{8}\right)^{10} \left(\frac{5}{8}\right)^2. \text{ 故选 D.}]$$

3. **C** [由题意, X 服从超几何分布, 故 $P(X=2) = \frac{C_3^2 C_7^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{10}$.

故选 C .]

4. **AC** [由题意知 $P(X < \mu + \sigma) = P(X > \mu - \sigma)$, 故 A 正确;
 $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma) = P(\mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma)$, 故 B 错误;
 $P(X < \mu + \sigma)$ 为定值, 不随 μ, σ 的变化而变化, 故 C 正确;
 $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma)$ 为定值, 也不随 μ, σ 的变化而变化, 故 D 错误. 故选 AC.]
5. 95.45% [设误差为 X , 则 $X \sim N(0, 4)$, 所以 $P(|X| \leq 4) = P(-4 \leq X \leq 4) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$, 故合格率为 95.45%.]

规范答题六

典例 (1) 200 180 0.9

$$(2) \frac{1000 \times (20 \times 20 - 180 \times 780)^2}{800 \times 200 \times 200 \times 800} \text{ 不成立 有关}$$

【阶段二】

专题一 函数与导数

微专题 1 函数性质的综合应用

考点一

典例 1 **A** [当 $x > 0$ 时, $f(x) = 1 - e^x$, $-x < 0$, $f(-x) = e^{-(-x)} - 1 = e^x - 1 = -f(x)$;
 当 $x < 0$ 时, $f(x) = e^{-x} - 1$, $-x > 0$, $f(-x) = 1 - e^{-x} = -f(x)$,
 且当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, 易知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数,
 则 $f(2x) + f(x-3) > 0 \Leftrightarrow f(2x) > -f(x-3) = f(3-x) \Rightarrow 2x < 3-x \Rightarrow x < 1$,
 所以原不等式的解集为 $(-\infty, 1)$. 故选 A.]

考点二

典例 2 (1) **D** (2) **B** [(1) 因为 $y = f(x-2)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(-2, 0)$ 对称,
 即 $f(-x) + f(x-4) = 0$,
 又 $y = f(x)$ 的图象关于原点对称, 则 $f(-x) = -f(x)$,
 有 $f(x) = f(x-4) \Rightarrow f(x+4) = f(x)$,
 所以 $y = f(x)$ 的周期为 4,
 故 $f(2025) = f(1+4 \times 506) = f(1) = 2$.
 故选 D.
 (2) $\because f(x+2) = -f(x)$,
 $\therefore f(x+4) = f((x+2)+2) = -f(x+2) = f(x)$,
 $\therefore$ 函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,
 $\therefore f(6) = f(2) = -f(0) = f(0)$, $f\left(\frac{11}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right)$
 $= -f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(-7) = f(1)$.
 又当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x)$ 单调递增,
 $\therefore f(0) < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1)$,
 即 $f(6) < f\left(\frac{11}{2}\right) < f(-7)$. 故选 B.]

考点三

典例 3 **AC** [由 $f(1+x) = f(1-x)$, 可得 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=1$, 所以 $f(0) = f(2)$,
 又由 $f(1+x) = f(1-x)$, 可知 $f(2+x) = f(-x)$.
 因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称,
 即 $f(2+x) = -f(2-x)$, 故 $f(4+x) = -f(-x)$,
 所以 $-f(2+x) = f(4+x)$, 即 $-f(x) = f(2+x)$,
 所以 $f(x) = f(x+4)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 4,

所以 $f(-2) = f(2)$, 所以 $f(0) = f(-2)$, 故 A 正确, B 错误.
 因为 $f(x)$ 在 $(-1, 0]$ 上单调递增, 且周期为 4, 所以 $f(x)$ 在 $(3, 4]$ 上单调递增,
 又 $f(x)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称,
 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调递增,
 因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,
 所以 $f(x)$ 在 $(1, 2]$ 上单调递减,
 则函数 $f(x)$ 在 $(2, 3)$ 内单调递减, 故 C 正确.
 根据 $f(x)$ 的周期为 4, 可得 $f(2025) = f(1)$, $f(2026) = f(2)$, $f(2027) = f(3)$,
 因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,
 所以 $f(2) = f(0)$ 且 $f(3) = f(-1)$,
 即 $f(2025) = f(1)$, $f(2026) = f(0)$,
 $f(2027) = f(-1)$,
 由 C 选项的分析可知, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 0]$ 上单调递增, 确定的单调区间内均不包含 $x = \pm 1$, 若 $f(-1) = f(1) = 0$, 则 $f(2025) > f(2026) > f(2027)$ 不成立, 故 D 错误. 故选 AC.]

微专题 2 导数的几何意义、利用导数研究函数的性质

考点一

典例 1 (1) **A** (2) $y=1$ [(1) 设切点坐标为 (t, e^t) , 由 $y = e^x$, 得 $y' = e^x$, 则过切点的切线方程为 $y - e^t = e^t(x - t)$,
 把点 $(-1, 0)$ 代入切线方程得 $0 - e^t = e^t(-1 - t)$,
 即 $te^t = 0$, 又 $e^t > 0$, 所以 $t = 0$, 则 $e^t = 1$, 则切点坐标为 $(0, 1)$.
 故选 A.
 (2) $f(0) = e^0 + \ln 1 = 1$, 且 $f'(x) = e^x - \frac{1}{1-x}$, 则 $f'(0) = e^0 - \frac{1}{1-0} = 0$, 则切线方程为 $y - 1 = 0 \cdot (x - 0)$, 即 $y = 1$.]
 (3) 解: ① $g'(x) = \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2\right)' = 3x^2 - 3x - 6$.
 ② $f'(x) = (x^2 e^x)' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x$.
 ③ $y = \ln(5x+1)$ 可由 $y = \ln u$ 及 $u = 5x+1$ 复合而成,
 所以 $y'_x = y'_u \times 5 = (\ln u)' \times 5 = \frac{1}{u} \times 5 = \frac{5}{5x+1}$.
 ④ $y = \cos(1-2x)$ 可由 $y = \cos u$ 及 $u = 1-2x$ 复合而成,
 所以 $y'_x = y'_u \times (-2) = (\cos u)' \times (-2) = (-\sin u) \times (-2) = 2\sin(1-2x)$.

考点二

典例 2 (1) **D** [因为函数 $f(x) = e^x - ax$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 所以 $f'(x) = e^x - a \leq 0$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上恒成立, 即 $a \geq e^x$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上恒成立. 令 $g(x) = e^x$, $g(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 则 $g(x) < g(0) = 1$, 故 $a \geq 1$.]
 (2) 解: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a+2)x + 2a \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = x - (a+2) + \frac{2a}{x} = \frac{(x-a)(x-2)}{x}$,
 当 $a \leq 0$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 2$; 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 2$, 所以 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, 2)$ 内单调递减;
 当 $0 < a < 2$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < a$ 或 $x > 2$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $a < x < 2$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 和 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(a, 2)$ 内单调递减;
 当 $a = 2$ 时, $f'(x) = \frac{(x-2)^2}{x} \geq 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > 2$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 2$ 或 $x > a$;
 令 $f'(x) < 0$, 得 $2 < x < a$,
 所以 $f(x)$ 在 $(2, a)$ 内单调递减,
 在 $(0, 2)$ 和 $(a, +\infty)$ 上单调递增.
 综上可得, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增;
 当 $0 < a < 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(a, 2)$ 内单调递减, 在 $(0, a)$ 和 $(2, +\infty)$ 上单调递增;
 当 $a = 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;
 当 $a > 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(2, a)$ 内单调递减, 在 $(0, 2)$ 和 $(a, +\infty)$ 上单调递增.

考点三

典例 3 解: (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \ln x - 2x - \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$,

$$\text{则 } f'(x) = \frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{-2x^2 + x + 1}{x^2} = \frac{-(2x+1)(x-1)}{x^2},$$

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减,

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, 1)$, 单调递减区间是 $(1, +\infty)$,

函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(1) = -3$, 没有极小值.

$$(2) \text{ 由题意, 得 } f'(x) = \frac{a}{x} - 2 + \frac{a^2}{x^2} = -\frac{2x^2 - ax - a^2}{x^2} = -\frac{(x-a)(2x+a)}{x^2}.$$

若 $a \geq 1$, 当 $x \in (0, 1]$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上单调递增,

此时 $f(x)$ 的最大值为 $f(1) = -2 - a^2$;

若 $0 < a < 1$, 当 $x \in (0, a)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (a, 1]$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

此时 $f(x)$ 的最大值为 $f(a) = a \ln a - 3a$;

若 $-2 < a < 0$, 则 $0 < -\frac{a}{2} < 1$, 当 $x \in (0, -\frac{a}{2})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (-\frac{a}{2}, 1]$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

此时 $f(x)$ 的最大值为 $f(-\frac{a}{2}) = a \ln(-\frac{a}{2}) + 3a$;

若 $a \leq -2$, 则 $-\frac{a}{2} \geq 1$, 当 $x \in (0, 1]$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上单调递增,

此时 $f(x)$ 的最大值为 $f(1) = -2 - a^2$.

$$\text{综上, } f(x)_{\max} = \begin{cases} -2 - a^2, & a \geq 1, \\ -2 - a^2, & a \leq -2, \\ a \ln a - 3a, & 0 < a < 1, \\ a \ln(-\frac{a}{2}) + 3a, & -2 < a < 0. \end{cases}$$

微专题 3 导数的综合应用

考点一

典例 1 解: (1) $f'(x) = a e^x - 1$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > -\ln a$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $x < -\ln a$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

综上可得, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

(2) **证明: 法一 (最值法):** 由 (1) 得当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x) = a(e^x + a) - x$ 的最小值为 $f(-\ln a) = a(e^{-\ln a} + a) + \ln a = 1 + a^2 + \ln a$,

令 $g(a) = 1 + a^2 + \ln a - 2 \ln a - \frac{3}{2} = a^2 - \ln a - \frac{1}{2}$, $a \in (0, +\infty)$, 所以 $g'(a) = 2a - \frac{1}{a}$, 令 $g'(a) > 0$, 得 $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$; 令

$g'(a) < 0$, 得 $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$. 所以函数 $g(a)$ 在 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 内单调递减, 在 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 上单调递增,

所以函数 $g(a)$ 的最小值为 $g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} =$

$\ln \sqrt{2} > 0$, 所以当 $a > 0$ 时, $f(x) > 2 \ln a + \frac{3}{2}$ 成立.

法二 (分析法): 当 $a > 0$ 时, 由 (1) 得, $f(x)_{\min} = f(-\ln a) = 1 + a^2 + \ln a$.

故欲证 $f(x) > 2 \ln a + \frac{3}{2}$ 成立,

只需证 $1 + a^2 + \ln a > 2 \ln a + \frac{3}{2}$,

即证 $a^2 - \frac{1}{2} > \ln a$.

构造函数 $u(a) = \ln a - (a - 1)$ ($a > 0$),

则 $u'(a) = \frac{1-a}{a}$,

所以当 $a > 1$ 时, $u'(a) < 0$; 当 $0 < a < 1$ 时, $u'(a) > 0$.

所以函数 $u(a)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $u(a) \leq u(1) = 0$, 即 $\ln a \leq a - 1$,

故只需证 $a^2 - \frac{1}{2} > a - 1$, 即证 $a^2 - a + \frac{1}{2} > 0$,

因为 $a^2 - a + \frac{1}{2} = (a - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} > 0$ 恒成立,

所以当 $a > 0$ 时, $f(x) > 2 \ln a + \frac{3}{2}$ 成立.

考点二

典例 2 解: (1) 因为 $y = \frac{e^x}{4}$ 和 $y = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上均单调递增,

所以 $f'(x) = \frac{e^x}{4} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又因为 $f'(\frac{1}{4}) = \frac{e^{\frac{1}{4}}}{4} - 1 < 0$, $f'(1) = \frac{e}{4} - \frac{1}{2} > 0$,

所以 $\exists x_0 \in (\frac{1}{4}, 1)$, 使得 $f'(x_0) = 0$,

所以当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增.

又因为 $f(\frac{1}{100}) = \frac{e^{\frac{1}{100}}}{4} - \frac{1}{10} > 0$, $f(\frac{1}{4}) = \frac{e^{\frac{1}{4}}}{4} - \frac{1}{2} < 0$,

$$f(1) = \frac{e}{4} - 1 < 0, f(4) = \frac{e^4}{4} - 2 > 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{100}, \frac{1}{4})$ 和 $(1, 4)$ 上各有一个零点,

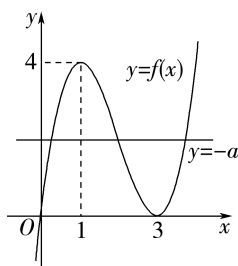
所以 $f(x)$ 的零点个数为 2.

(2) 令 $f(x) = x(x-3)^2$,

求导可得 $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x=1$ 或 $x=3$, 可得下表:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增



所以函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=4$, 极小值为 $f(3)=0$,

函数 $g(x) = f(x) + a$ 存在三个零点, 等价于函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = -a$ 存在三个交点,

由图可得 $0 < -a < 4$, 则 $-4 < a < 0$,

故实数 a 的取值范围为 $\{a | -4 < a < 0\}$.

考点三

典例 3 解: 由题意可知, $f(x)_{\max} < g(x)_{\max}$,

因为 $g(x) = x^2 - 3x + a$ ($a \in \mathbf{R}$) 的图象开口向上, 对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$,

则 $g(x)$ 在 $[1, \frac{3}{2}]$ 上单调递减, 在 $[\frac{3}{2}, 2]$ 上单调递增, 可得

$$g(x)_{\max} = g(1) = g(2) = a - 2,$$

设 $h(x) = f'(x)$,

则 $h(x) = -\cos x - x \sin x + 1$, 所以 $h'(x) = -x \cos x$, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $h'(x) < 0$;

当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $h'(x) > 0$,

则 $h(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递减,

在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内单调递增,

$$\text{且 } h(0) = 0, h(\frac{\pi}{2}) < 0, h(\pi) = 2,$$

可知 $f'(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内只有一个零点,

设零点为 x_0 , 则 $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in (x_0, \pi)$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 内单调递减, 在区间 (x_0, π) 内单调递增, 且 $f(0) = 0, f(\pi) = 0$, 可得当 $x \in [0, \pi]$ 时,

$f(x)_{\max} = 0$, 所以 $0 < a - 2$, 解得 $a > 2$,

所以实数 a 的取值范围是 $(2, +\infty)$.

专题二 三角函数与解三角形

微专题 4 三角函数

考点一

典例 1 (1) ACD (2) D (3) $\frac{1}{2}$ [(1) 角 θ 的终边经过点

$$(-2, -\sqrt{3}), \sin \theta = -\frac{\sqrt{21}}{7}, \text{A 正确};$$

θ 与 α 的终边关于 x 轴对称, 由题意得 α 的终边经过点 $(-2, \sqrt{3})$, α 为第二象限角, 不一定为钝角, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{7}}{7}$, B 错误, C 正确;

因为 $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0, \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7} > 0$, 所以点 $(\tan \theta, \sin \alpha)$ 在第一象限, D 正确.

(2) 因为 $a \parallel b$, 所以 $\sin^2(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \cos 2\alpha$, ①

又因为 a, b 为非零向量, 所以 $\begin{cases} \cos 2\alpha \neq 0, \\ \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \neq 0, \end{cases}$

$$\text{即 } \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k_1\pi}{2}, \\ \alpha \neq -\frac{\pi}{4} + k_2\pi \end{cases} \quad (k_1 \in \mathbf{Z}, k_2 \in \mathbf{Z}).$$

由①可得 $\frac{1 - \cos(2\alpha + \frac{\pi}{2})}{2} = \cos 2\alpha$, 即 $1 + \sin 2\alpha = 2\cos 2\alpha$,

$$\text{即 } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha = 2\cos^2 \alpha - 2\sin^2 \alpha,$$

又 $\cos 2\alpha = \sin^2(\alpha + \frac{\pi}{4}) > 0$, 即 $\cos^2 \alpha > \frac{1}{2}$, 故 $\cos \alpha \neq 0$,

所以两边同除以 $\cos^2 \alpha$,

可得 $3\tan^2 \alpha + 2\tan \alpha - 1 = 0$, 解得 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ 或 $\tan \alpha = -1$ (舍

去), 所以 $\sin 2\alpha = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{3}{5}$. 故

选 D.

(3) 由 $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, α 是锐角, 得 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - (\frac{1}{7})^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$. 因为 α, β 是锐角, 所以 $\alpha + \beta \in (0, \pi)$. 又

因为 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14}$, 所以 $\sin(\alpha + \beta) =$

$$\sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \sqrt{1 - (-\frac{11}{14})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14},$$

所以 $\cos \beta = \cos[(\alpha + \beta) - \alpha] = \cos(\alpha + \beta)\cos \alpha + \sin(\alpha + \beta)\sin \alpha$

$$= (-\frac{11}{14}) \times \frac{1}{7} + \frac{5\sqrt{3}}{14} \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{1}{2}.$$

考点二

典例 2 (1) B (2) ABC [(1) 将 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{12})$ 的图象

向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到 $y = \sin[\omega(x + \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{12}] =$

$\sin(\omega x + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi\omega}{6}) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{12})$ 的图象,

则 $\frac{\pi\omega}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $\omega = 3 + 12k, k \in \mathbf{Z}$, 又 $\omega > 0$,

所以 ω 的最小值为 3, 故选 B.

(2) 根据函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象,

可得 $f(0) = -1$, 即 $2\sin \varphi = -1$, 即 $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$,

所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, 故 A 正确;

再根据五点法作图, 可得 $\omega \cdot \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = 0$, 求得 $\omega = 2$, 故 B 正确;

故 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)\right]$
 $= 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) = 2\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$, 故 C 正确;

由题意可得 $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = 2\cos 2x$ 为偶函数, 故 D 错误.
 故选 ABC.]

考点三

典例 3 BC [根据函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + B$ ($A > 0, \omega >$

$0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象,

可得 $B = \frac{1+5}{2} = 3, A = \frac{5-1}{2} = 2$,

故有 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) + 3$.

把点 $(0, 2)$ 代入, 可得 $2\sin \varphi + 3 = 2$,

即 $\sin \varphi = -\frac{1}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{6}$, 故有 $f(x) = 2\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) + 3$.

再根据五点法作图, 可得 $\omega \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$,

$\therefore \omega = 2, f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 3$.

令 $x = \frac{\pi}{6}$, 求得 $f(x) = 4$, 故 $f(x)$ 的图象不关于点 $\left(\frac{\pi}{6}, 3\right)$

对称, 故 A 错误;

令 $x = \frac{\pi}{3}$, 求得 $f(x) = 5$, 为最大值, 故 $f(x)$ 的图象关于直

线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称, 故 B 正确;

当 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $f(x)$ 单调递减, 故 C 正确;

当 $x \in \left(-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right)$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} \in (-\pi, 0)$, $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \in [-1, 0)$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域为 $[1, 3)$, 故 D 错误. 故选 BC.]

微专题 5 三角函数中 ω 与 φ 的最值与范围问题

考点一

典例 1 (1) B (2) C [(1) 由题意得, $g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} +$

$2\varphi\right)$, 又因为直线 $x = -\frac{11\pi}{6}$ 是 $g(x)$ 图象的一条对称轴, 所

以 $k\pi + \frac{\pi}{2} = 2 \times \left(-\frac{11\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3} + 2\varphi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi = \frac{k\pi}{2} + \frac{23\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$,

当 $k = -1$ 时, $\varphi = \frac{17\pi}{12}$;

当 $k = -2$ 时, $\varphi = \frac{11\pi}{12}$;

当 $k = -3$ 时, $\varphi = \frac{5\pi}{12}$;

当 $k = -4$ 时, $\varphi = -\frac{\pi}{12}$,

因为 $\varphi > 0$, 所以 φ 的最小值为 $\frac{5\pi}{12}$.

(2) **法一**: 令 $\omega x + \frac{\pi}{6}$ 分别等于 $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$, 解得 $x = \frac{\pi}{3\omega}, x =$

$\frac{4\pi}{3\omega}, x = \frac{7\pi}{3\omega}$ 分别为 $y = f(x)$ 的图象在 y 轴右侧由左向右最近的三条对称轴.

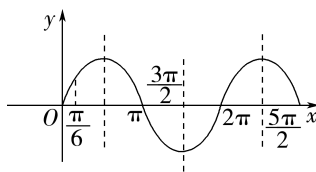
要满足图象在 $(0, \pi)$ 上有且仅有两条对称轴,

只需 $\begin{cases} 0 < \frac{\pi}{3\omega} < \pi, \\ 0 < \frac{4\pi}{3\omega} < \pi, \text{ 解得 } \frac{4}{3} < \omega \leq \frac{7}{3}. \\ \frac{7\pi}{3\omega} \geq \pi, \end{cases}$ 故选 C.

法二 (整体法): 因为 $0 < x < \pi, \omega > 0$, 所以 $\frac{\pi}{6} < \omega x + \frac{\pi}{6} <$

$\omega\pi + \frac{\pi}{6}$, 将 $\omega x + \frac{\pi}{6}$ 看成一个整体. 由 $y = \sin x$ 的图象分析

可知, $\frac{3\pi}{2} < \omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \frac{4}{3} < \omega \leq \frac{7}{3}$.



法三: 令 $\omega x + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

得 $x = \frac{(3k+1)\pi}{3\omega}, k \in \mathbf{Z}$,

依题意知, 满足 $0 < \frac{(3k+1)\pi}{3\omega} < \pi$, 即 $0 < 3k+1 < 3\omega$ 的整数 k 有 2 个,

所以 $k = 0, 1$, 则 $3 \times 1 + 1 < 3\omega \leq 3 \times 2 + 1$, 解得 $\frac{4}{3} < \omega \leq \frac{7}{3}$.

故选 C.]

考点二

典例 2 (1) C (2) $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$ [(1) 由 $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, 可得 $2x - \varphi$

$\in \left(-\varphi, \frac{2\pi}{3} - \varphi\right)$,

又 $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$, 则 $\frac{\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{3} - \varphi \leq \frac{7\pi}{6}$, 且 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递

增, 所以 $\begin{cases} \frac{2\pi}{3} - \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\varphi \geq -\frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 即 φ 的取值范围

为 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.

故选 C.

(2) **法一**: $\because f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,

$\therefore \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \leq \frac{T}{2}$, 即 $\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{\omega}$, $\therefore 0 < \omega \leq 6$,

$$\therefore \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \therefore 0 < \frac{\omega\pi}{3} \leq \omega x \leq \frac{\omega\pi}{2} \leq 3\pi,$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{\omega\pi}{3} \geq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\omega\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2}, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \omega \geq \frac{3}{2}, \\ \omega \leq 3, \end{cases}$$

$$\therefore \frac{3}{2} \leq \omega \leq 3.$$

法二: 令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $\frac{\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega} \leq x \leq$

$$\frac{3\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega} (k \in \mathbf{Z}),$$

因为函数 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$ 在区间 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减,

$$\text{所以} \begin{cases} \frac{\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega} \leq \frac{\pi}{3}, \\ \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}, \end{cases} k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } 6k + \frac{3}{2} \leq \omega \leq 4k + 3 (k \in \mathbf{Z}).$$

又 $\omega > 0$, 所以 $k \geq 0$, 又 $6k + \frac{3}{2} \leq 4k + 3$, 得 $0 \leq k \leq \frac{3}{4}$, 又 $k \in \mathbf{Z}$, 所以 $k = 0$.

$$\text{即 } \frac{3}{2} \leq \omega \leq 3.$$

法三: $\therefore \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \omega > 0$,

$$\therefore \frac{\pi\omega}{3} \leq \omega x \leq \frac{\pi\omega}{2},$$

又 $\therefore f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减,

$$\therefore \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{\pi\omega}{3}, \\ \frac{\pi\omega}{2} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \end{cases} k \in \mathbf{Z}, \text{解得 } 6k + \frac{3}{2} \leq \omega \leq 4k + 3 (k \in \mathbf{Z}).$$

$$\text{又 } \begin{cases} \omega > 0, \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \leq \frac{T}{2}, \end{cases} \therefore 0 < \omega \leq 6, \therefore k = 0,$$

$$\text{即 } \frac{3}{2} \leq \omega \leq 3.]$$

考点三

典例 3 A [因为 $\omega > 0$, 所以当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$\text{有 } \frac{\pi}{6} < \omega x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} \omega + \frac{\pi}{6}.$$

因为 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内有最大值, 但无最小值,

$$\text{结合函数图象(图略), 得 } \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \omega + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2},$$

$$\text{解得 } \frac{2}{3} < \omega \leq \frac{8}{3}. \text{ 故选 A.}]$$

考点四

典例 4 A [令 $t = \omega x + \frac{\pi}{4}, x \in (0, \pi)$, 则 $t \in (\frac{\pi}{4}, \omega\pi + \frac{\pi}{4})$.

设 $m(t) = \sin t$,

因为函数 $f(x) = 3\sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) (\omega > 0)$ 在 $(0, \pi)$ 上恰有两个零点, 两个极值点,

则 $m(t)$ 在 $t \in (\frac{\pi}{4}, \omega\pi + \frac{\pi}{4})$ 上恰有两个极值点和两个零点,

$$\text{可得 } 2\pi < \omega\pi + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{2},$$

$$\text{解得 } \frac{7}{4} < \omega \leq \frac{9}{4}.$$

故选 A.]

微专题 6 解三角形

考点一

典例 1 (1) $\frac{6}{5}$ $\frac{3+4\sqrt{3}}{5}$ [由 $\cos A = \frac{4}{5}$, 可知 A 为锐角, 则

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{3}{5}. \text{ 由正弦定理, 得 } a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{6}{5}.$$

$$\text{又 } \sin C = \sin[\pi - (A + B)] = \sin(A + B) = \sin A \cos B +$$

$$\cos A \sin B = \frac{3+4\sqrt{3}}{10}, \text{ 所以由正弦定理, 得 } c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

$$= \frac{3+4\sqrt{3}}{5}.]$$

(2) 解: (i) 因为 $\cos 2B + \cos 2C + 2\sin B \sin C = \cos 2A + 1$,

$$\text{所以 } 1 - 2\sin^2 B + 1 - 2\sin^2 C + 2\sin B \sin C = 1 - 2\sin^2 A + 1,$$

$$\text{化简得 } \sin B \sin C = \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A,$$

$$\text{所以 } bc = b^2 + c^2 - a^2.$$

$$\text{由余弦定理的推论, 得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2},$$

$$\text{因为 } A \in (0, \pi), \text{ 所以 } A = \frac{\pi}{3}.$$

$$(ii) \text{ 由 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ 解得 } bc = 6.$$

$$\text{由 (i) 可得 } b^2 + c^2 - a^2 = bc, \text{ 所以 } (b+c)^2 - 2bc - a^2 = bc,$$

$$\text{即 } (b+c)^2 - a^2 = 3bc, \text{ 所以 } 5^2 - a^2 = 3 \times 6, \text{ 解得 } a = \sqrt{7}$$

$$(a = -\sqrt{7} \text{ 舍去}).$$

考点二

典例 2 (1) $\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{7}$ [因为 $a = 2, b = 1, \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\text{所以 } \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{解得 } \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{因为 } 0 < C < \pi, \text{ 所以 } C = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } C = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{当 } C = \frac{\pi}{3} \text{ 时, 由余弦定理可得,}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 4 + 1 - 2 = 3, \text{ 即 } c = \sqrt{3}.$$

$$\text{当 } C = \frac{2\pi}{3} \text{ 时, 由余弦定理可得,}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 4 + 1 + 2 = 7, \text{ 即 } c = \sqrt{7}.$$

$$\text{综上, } c = \sqrt{3} \text{ 或 } c = \sqrt{7}.]$$

(2) 解: (i) 由 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$, 得

$$\frac{1}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A = 1, \text{ 即 } \sin(A + \frac{\pi}{3}) = 1,$$

$$\text{由于 } A \in (0, \pi), \text{ 所以 } A + \frac{\pi}{3} \in (\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}), \text{ 故 } A + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2},$$

所以 $A = \frac{\pi}{6}$.

(ii) 由题设条件和正弦定理得

$$\sqrt{2} \sin B \sin C = 2 \sin C \sin B \cos B,$$

又 $B, C \in (0, \pi)$, 则 $\sin B \sin C \neq 0$, 所以 $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以

$$B = \frac{\pi}{4}, \text{ 所以 } C = \pi - A - B = \frac{7\pi}{12}.$$

$$\sin C = \sin(\pi - A - B) = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A \\ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4},$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 可得 } \frac{2}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{b}{\sin \frac{\pi}{4}} =$$

$$\frac{c}{\sin \frac{7\pi}{12}}, \text{ 解得 } b = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{6} + \sqrt{2},$$

故 $\triangle ABC$ 的周长为 $2 + \sqrt{6} + 3\sqrt{2}$.

考点三

典例 3 (1) B (2) D [(1) 由题意, 在 $\triangle BCD$ 中, $\angle CBD = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ$,

$$\text{由正弦定理得 } \frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{CD}{\sin \angle CBD},$$

$$\text{即 } \frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{30}{\sin 60^\circ}, \text{ 解得 } BC = 10\sqrt{6},$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 60^\circ$,

所以 $AB = BC \tan 60^\circ = 10\sqrt{6} \times \sqrt{3} = 30\sqrt{2} \approx 42.42$ (米). 故选 B.

(2) 结合题意作出图形, $AC = BC = 18$, $AB = 14$, $\angle CBA = \angle CAB = \theta$, $\angle MAB = \frac{\theta}{2}$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理的推论, 得

$$\cos \theta = \frac{18^2 + 14^2 - 18^2}{2 \times 18 \times 14} = \frac{7}{18},$$

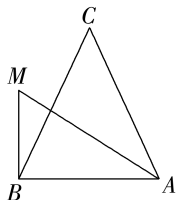
$$\text{因为 } \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} = \frac{25}{36},$$

$$\text{且 } \cos \frac{\theta}{2} > 0, \text{ 所以 } \cos \frac{\theta}{2} = \frac{5}{6},$$

在 $\triangle ABM$ 中, 由余弦定理的推论, 得

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{5}{6} = \frac{14^2 + 18^2 - MB^2}{2 \times 14 \times 18}, \text{ 解得 } MB = 10 \text{ (负值舍去).}$$

故选 D.]



微专题 7 解三角形中的高线、中线、角平分线问题

考点一

典例 1 解: (1) 因为 $\cos A = -\frac{1}{3}$, $A \in (0, \pi)$,

$$\text{所以 } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 得 } a \sin C = c \sin A = 4\sqrt{2},$$

$$\text{所以 } c = \frac{4\sqrt{2}}{\sin A} = \frac{4\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 6.$$

(2) 若 $\triangle ABC$ 存在, 则设其 BC 边上的高为 AD .

若选①: $a = 6$, 因为 $c = 6$, 所以 $C = A$, 因为 $\cos A = -\frac{1}{3} < 0$,

这表明此时 $\triangle ABC$ 有两个钝角,

而这是不可能的, 所以此时 $\triangle ABC$ 不存在, 故 BC 边上的高也不存在.

若选②: $a \sin B = \frac{10\sqrt{2}}{3}$, 由 $a \sin C = 4\sqrt{2}$, 得 $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\frac{10\sqrt{2}}{3}}{4\sqrt{2}} =$

$$\frac{5}{6}, \text{ 由正弦定理得 } \frac{b}{c} = \frac{5}{6}, \text{ 由 (1) 知 } c = 6, \text{ 所以 } b = 5,$$

所以由余弦定理得 $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$

$$= \sqrt{25 + 36 - 2 \times 5 \times 6 \times \left(-\frac{1}{3}\right)} = 9,$$

此时 $\triangle ABC$ 是存在的, 且唯一确定,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} BC \cdot AD,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2} \times 9AD,$$

$$\text{所以 } BC \text{ 边上的高 } AD = \frac{20\sqrt{2}}{9}.$$

若选③: $\triangle ABC$ 的面积是 $10\sqrt{2}$, 由 (1) 知 $c = 6$, $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} b \times 6 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 10\sqrt{2},$$

解得 $b = 5$,

由余弦定理可得 $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$

$$= \sqrt{25 + 36 - 2 \times 5 \times 6 \times \left(-\frac{1}{3}\right)} = 9,$$

此时 $\triangle ABC$ 是存在的, 且唯一确定, 则 BC 边上的高满足:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot AD = \frac{9}{2} AD = 10\sqrt{2}, \text{ 即 } AD = \frac{20\sqrt{2}}{9}.$$

考点二

典例 2 解: (1) 因为 D 为 BC 的中点,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ADC} = 2 \times \frac{1}{2} \times AD \times DC \times \sin \angle ADC = 2 \times$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times DC \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

解得 $DC = 2$,

所以 $BD = DC = 2$, $a = 4$.

$$\text{因为 } \angle ADC = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } \angle ADB = \frac{2\pi}{3}.$$

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理, 得 $c^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos \angle ADB = 1 + 4 + 2 = 7$, 所以 $c = \sqrt{7}$.

在 $\triangle ADC$ 中, 由余弦定理, 得 $b^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cos \angle ADC = 1 + 4 - 2 = 3$,

所以 $b = \sqrt{3}$.

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理的推论, 得 } \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} =$$

$$\frac{7 + 16 - 3}{2 \times 4 \times \sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14},$$

$$\text{所以 } \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{21}}{14},$$

$$\text{所以 } \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

(2) 法一: 因为 D 为 BC 的中点, 所以 $BD = DC$.

因为 $\angle ADB + \angle ADC = \pi$,

所以 $\cos \angle ADB = -\cos \angle ADC$,

则在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 中, 由余弦定理的推论, 得

$$\frac{AD^2 + BD^2 - c^2}{2AD \cdot BD} = -\frac{AD^2 + DC^2 - b^2}{2AD \cdot DC},$$

$$\text{得 } 1 + BD^2 - c^2 = -(1 + BD^2 - b^2),$$

$$\text{所以 } 2BD^2 = b^2 + c^2 - 2 = 6, \text{ 所以 } BD = \sqrt{3}, \text{ 所以 } a = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理的推论, 得 } \cos \angle BAC = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8 - 12}{2bc} = -\frac{2}{bc},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \angle BAC$$

$$= \frac{1}{2}bc \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} = \frac{1}{2}bc \sqrt{1 - \left(-\frac{2}{bc}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 - 4} = \sqrt{3}, \text{ 解得 } bc = 4.$$

$$\text{则由 } \begin{cases} bc = 4, \\ b^2 + c^2 = 8, \end{cases} \text{ 解得 } b = c = 2.$$

法二: 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 D 为 BC 的中点,

$$\text{则 } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{4}(c^2 + b^2 + 2bc \cos A),$$

$$\text{又 } AD = 1, b^2 + c^2 = 8, \text{ 则 } 1 = \frac{1}{4}(8 + 2bc \cos A),$$

$$\text{所以 } bc \cos A = -2, \text{ ①}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{3}, \text{ 即 } bc \sin A = 2\sqrt{3}, \text{ ②}$$

$$\text{由 ①② 解得 } \tan A = -\sqrt{3}, \text{ 所以 } A = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{所以 } bc = 4, \text{ 又 } b^2 + c^2 = 8, \text{ 所以 } b = c = 2.$$

法三: 在 $\triangle ABC$ 中, 由中线长公式可得 $2(BD^2 + AD^2) = AB^2 + AC^2$,

$$\text{又 } BD = \frac{1}{2}BC, AD = 1, b^2 + c^2 = 8,$$

$$\text{则 } (2AD)^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2),$$

$$\text{即 } 2^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2) = 16, \text{ 所以 } a^2 = 12.$$

$$\text{又 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{3}, \text{ 因而 } bc \sin A = 2\sqrt{3},$$

$$\text{又由余弦定理 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$\text{得 } 12 = 8 - 2bc \cos A, \text{ 所以 } bc \cos A = -2,$$

$$\text{故 } \tan A = -\sqrt{3} \Rightarrow \cos A = -\frac{1}{2}, \text{ 所以 } bc = 4,$$

$$\text{又 } b^2 + c^2 + 2bc = 8 + 8 = 16 = (b + c)^2,$$

$$b^2 + c^2 - 2bc = 8 - 8 = 0 = (b - c)^2, \text{ 故 } b = c = 2.$$

考点三

典例 3 解: (1) 由 $2b - c = 2a \cos C$,

$$\text{可得 } 2\sin B - \sin C = 2\sin A \cos C,$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } \sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C,$$

$$\text{所以 } 2(\sin A \cos C + \cos A \sin C) - \sin C = 2\sin A \cos C, \text{ 整理得 } \sin C(2\cos A - 1) = 0,$$

$$\text{因为 } C \in (0, \pi), \text{ 所以 } \sin C \neq 0, \text{ 所以 } \cos A = \frac{1}{2}, \text{ 结合 } A \in$$

$$(0, \pi), \text{ 可得 } A = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 由 } AD \text{ 平分 } \angle BAC, \text{ 可得 } \angle BAD = \angle CAD = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{由 } S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABC}, \text{ 得 } \frac{1}{2}AB \cdot AD \sin \angle BAD + \frac{1}{2}AC \cdot$$

$$AD \sin \angle CAD = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin \angle BAC,$$

$$\text{即 } \frac{1}{4}c + \frac{1}{4}b = \frac{\sqrt{3}}{4}bc, \text{ 整理得 } b + c = \sqrt{3}bc, \text{ ①}$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理得 } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot$$

$$AC \cos \frac{\pi}{3} = 6,$$

$$\text{即 } b^2 + c^2 - bc = 6, \text{ 即 } (b + c)^2 - 3bc = 6, \text{ 将 ① 代入得 } 3(bc)^2 - 3bc = 6, \text{ 解得 } bc = 2 (\text{舍负}),$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

微专题 8 三角形中的最值(范围)问题

考点一

典例 1 (1)ABC (2)ABD [(1)对于 A, 由正弦定理, 得 $2R =$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \text{ 可得 } \triangle ABC \text{ 外接圆的半径 } R = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{对于 B, 由余弦定理, 得 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \text{ 所以 } 4 = a^2 + b^2 - ab \geq 2ab - ab = ab, \text{ 即 } ab \leq 4, \text{ 当且仅当 } a = b = 2 \text{ 时, 等号}$$

$$\text{成立. 所以 } \triangle ABC \text{ 面积的最大值为 } S_{\max} = \frac{1}{2} \times 4 \times \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \text{ 故 B 正确;}$$

$$\text{对于 C, 由 } C = \frac{\pi}{3}, \text{ 可得 } A + B = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{则 } \sin B = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A.$$

$$\text{由正弦定理, 可得 } a + 2b = 2R \sin A + 2 \times 2R \sin B = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$(2\sin A + \sqrt{3} \cos A) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{7} \left(\frac{2}{\sqrt{7}} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cos A \right)$$

$$= \frac{4\sqrt{21}}{3} \sin(A + \varphi) \left(\text{其中 } \tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 且 } 0 < A < \frac{2\pi}{3} \right). \text{ 当}$$

$$A + \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } a + 2b \text{ 取得最大值 } \frac{4\sqrt{21}}{3}, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{对于 D, 由余弦定理, 得 } 4 = a^2 + b^2 - ab \geq a^2 + b^2 - \frac{a^2 + b^2}{2} =$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2}, \text{ 得 } a^2 + b^2 \leq 8, \text{ 当且仅当 } a = b = 2 \text{ 时, 等号成立, 所以}$$

$$a^2 + b^2 \text{ 的最大值为 } 8, \text{ 故 D 错误.}$$

故选 ABC.

$$(2) \text{ 因为 } a = 4, \text{ 且 } 8 \cos A = c, \text{ 所以 } 2a \cos A = c,$$

$$\text{由正弦定理得 } 2\sin A \cos A = \sin C, \text{ 所以 } \sin 2A = \sin C.$$

$$\text{因为 } \triangle ABC \text{ 是锐角三角形, } a \neq b, \text{ 排除 } C = \pi - 2A,$$

$$\text{所以 } 2A = C, \text{ 则 } \begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < 2A < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \pi - 3A < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{4},$$

$$\text{所以 } \frac{\pi}{3} < C < \frac{\pi}{2}, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\sin(\pi - 3A)} = \frac{a}{\sin A},$$

$$\text{所以 } b = \frac{a \sin(\pi - 3A)}{\sin A} = \frac{4 \sin 3A}{\sin A} = \frac{4 \sin(2A + A)}{\sin A} =$$

$$16 \cos^2 A - 4.$$

$$\text{因为 } \frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{4}, \text{ 所以 } \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos A < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

专题三 数列

微专题9 等差数列、等比数列

考点一

典例1 (1)**C** (2)**AD** (3)-3 10 [(1){ a_n }是公差为0的等差数列, $a_1=-2$,且 a_3, a_4, a_6 成等比数列,设公差为 d ($d \neq 0$),则 $a_4^2=a_3 a_6$,即 $(-2+3d)^2=(-2+2d)(-2+5d)$,整理得 $d^2-2d=0$,解得 $d=2$ 或 $d=0$ (舍去),所以 $a_{10}=a_1+9d=-2+9 \times 2=16$,故选C.]

(2)根据 $S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{a_3}{q^2}+\frac{a_3}{q}+a_3=\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1=7$,得 $6q^2-q-1=0$,即 $(2q-1)(3q+1)=0$,因为 $q>0$,所以 $q=\frac{1}{2}$,故A正确;

$a_5=a_3 q^2=1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,故B错误;

因为 $a_1=\frac{a_3}{q^2}=4$,所以 $S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{4\left(1-\frac{1}{32}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{4}$,故

C错误;

$a_n=a_1 q^{n-1}=4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2^2}{2^{n-1}}=2^{3-n}$, $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=8\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=8-\frac{2^3}{2^n}=8-2^{3-n}$,所以

$a_n+S_n=8$,故D正确.

故选AD.

(3)由题意得
$$\begin{cases} \frac{n\left(a_1+\frac{3}{2}\right)}{2}=-\frac{15}{2}, & \text{①} \\ a_1+(n-1) \times \frac{1}{2}=\frac{3}{2}. & \text{②} \end{cases}$$

由②,得 $a_1=-\frac{1}{2}n+2$.

代入①后化简,得 $n^2-7n-30=0$,

解得 $n=10$ 或 $n=-3$ (舍去),从而 $a_1=-3$.]

考点二

典例2 (1)**B** (2)**ACD** [(1)由等差数列 $\{a_n\}$ 得 $a_2+a_5+a_8=3a_5$,

则 $a_2+a_5+a_8=3(a_5+a_6)=18$,

即 $a_5+a_6=6$,

由等差数列的前 n 项和公式可得,

$$S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=5(a_5+a_6)=30.$$

故选B.

(2)由数列 $\{a_n\}$ 是等比数列,易得 $a_5 a_{11}=a_8^2$,A正确;

由 $a_i a_{18-i}=a_9^2$,得 $T_{17}=a_1 a_2 \cdots a_{17}=a_9^{17}$,B错误;

由 $a_8 a_{11}=a_9 a_{10}=a_{11}$,得 $a_8=1$,所以 $T_8=T_7$,C正确;

因为 $\sqrt[n]{T_{2n}}=a_1 a_{2n}$,所以 $\frac{\sqrt[n+1]{T_{2n+2}}}{\sqrt[n]{T_{2n}}}=\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}=q^2$,

所以 $\{\sqrt[n]{T_{2n}}\}$ 是等比数列,D正确.故选ACD.]

(3)解:设等差数列的项数为 $2n-1$,设所有的奇数项和为 S ,

$$\text{则 } S=\frac{n(a_1+a_{2n-1})}{2}=na_n;$$

所以 $\frac{1}{2}<\cos^2 A<\frac{3}{4}$,则 $4<16\cos^2 A-4<8$,即 b 的取值范围是 $(4,8)$,故B正确;

$b+c=16\cos^2 A+8\cos A-4$,设 $t=\cos A \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

则 $y=16t^2+8t-4$ 在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 上单调递增,

所以 $y \in (4+4\sqrt{2}, 8+4\sqrt{3})$,

即 $b+c \in (4+4\sqrt{2}, 8+4\sqrt{3})$,因为 $a=4$,

所以 $\triangle ABC$ 周长的取值范围是 $(8+4\sqrt{2}, 12+4\sqrt{3})$,故C错误;

因为 $c=8\cos A$,所以 $\frac{c}{b}=\frac{8\cos A}{16\cos^2 A-4}=\frac{8}{16\cos A-\frac{4}{\cos A}}$.因

为 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos A<\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $4\sqrt{2}<16\cos A-\frac{4}{\cos A}<\frac{16\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{8}{16\cos A-\frac{4}{\cos A}}<\sqrt{2}$,即 $\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{c}{b}<\sqrt{2}$,

故D正确.

故选ABD.]

考点二

典例2 (1) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ [由正弦定理及题意,得 $\sin C \cos B + \sin B \cos C = a \sin A$,即 $\sin(B+C) = \sin A = a \sin A$.因为 $0 < A < \pi$,所以 $\sin A \neq 0$,所以 $a=1$.若 $A=\frac{\pi}{3}$,则由余弦定理的推论,得 $\cos A = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.由 $b>0, c>0$,得 $b^2+c^2=bc+1 \geq 2bc$,即 $bc \leq 1$,当且仅当 $b=c$ 时,等号成立.所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}bc \sin A \leq \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$,所以 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.]

(2)解:(i)由 $\frac{a}{4b}=\frac{\sin B}{\sin A}$ 及正弦定理得 $\frac{a}{4b}=\frac{b}{a}$,化简得 $a=2b$,

因为 $C=\frac{\pi}{2}, c=5$,所以 $a^2+b^2=c^2=25$,即 $4b^2+b^2=25$,解

得 $b=\sqrt{5}$ (舍负),所以 $a=2b=2\sqrt{5}$.

(ii)根据 $ab=20, c=5$,由余弦定理的推论得 $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{1}{40}(a^2+b^2-25) \geq \frac{1}{40}(2ab-25) = \frac{3}{8}$,

当且仅当 $a=b$ 时,等号成立.

所以 $\cos^2 C \geq \frac{9}{64}$,即 $1-\sin^2 C \geq \frac{9}{64}$,

可得 $\sin^2 C \leq \frac{55}{64}$,

结合 $\sin C > 0$,解得 $0 < \sin C \leq \frac{\sqrt{55}}{8}$.

因为 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ab \sin C = 10 \sin C \leq 10 \times$

$$\frac{\sqrt{55}}{8} = \frac{5\sqrt{55}}{4},$$

所以当 $a=b=2\sqrt{5}$ 时, $\triangle ABC$ 的面积取得最大值 $\frac{5\sqrt{55}}{4}$.

设所有的偶数项和为 T , 则 $T = \frac{(n-1)(a_2 + a_{2n-2})}{2}$

$$= (n-1)a_n,$$

$$\text{则 } \frac{T}{S} = \frac{n-1}{n} = \frac{261}{290} = \frac{9}{10}, \text{ 解得 } n=10,$$

则该数列的项数为 $2n-1=19$, 中间项为 a_{10} .

由 $S=10a_{10}=290$, 得 $a_{10}=29$,

所以此数列中间一项是 29, 总项数为 19.

考点三

典例 3 证明: (1) 易知 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3^n a_{n+1} - \frac{1}{4}}{3^{n-1} a_n - \frac{1}{4}}$

$$= \frac{3^n \left(\frac{1}{3^n} - a_n \right) - \frac{1}{4}}{3^{n-1} a_n - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4} - 3^n a_n}{3^{n-1} a_n - \frac{1}{4}} = -3,$$

$$\text{又 } b_1 = a_1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \neq 0,$$

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{3}{4}$ 为首项, -3 为公比的等比数列.

$$(2) \text{法一: 由 (1) 知 } b_n = 3^{n-1} a_n - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \times (-3)^{n-1},$$

$$\text{所以 } 3^{n-1} a_n = \frac{3}{4} \times (-3)^{n-1} + \frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } S_n = \frac{n}{4} + \frac{\frac{3}{4} \times (1 - (-3)^n)}{1 + 3} = \frac{n}{4} + \frac{3}{16} [1 - (-3)^n],$$

$$\text{即 } 4S_n = n + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \times (-3)^n,$$

$$\text{又 } 3^n a_n = -\frac{3}{4} \times (-3)^n + \frac{3}{4}, \text{ 所以 } 4S_n - 3^n a_n = n,$$

$$\text{所以当 } n \geq 2 \text{ 时, } 4S_n - 3^n a_n - (4S_{n-1} - 3^{n-1} a_{n-1}) = 1,$$

$$\text{又 } 4S_1 - 3^1 a_1 = 1,$$

所以数列 $\{4S_n - 3^n a_n\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列.

法二: 由 $S_n = a_1 + 3a_2 + 3^2 a_3 + \cdots + 3^{n-1} a_n$, 得

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = a_1 + 3a_2 + 3^2 a_3 + \cdots + 3^{n-2} a_{n-1},$$

$$\text{以上两式相减得 } S_n - S_{n-1} = 3^{n-1} a_n,$$

$$\text{所以 } 4S_n - 3^n a_n - (4S_{n-1} - 3^{n-1} a_{n-1})$$

$$= 4(S_n - S_{n-1}) - 3^n a_n + 3^{n-1} a_{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1} a_n - 3^n a_n +$$

$$3^{n-1} a_{n-1} = 3^{n-1} (a_n + a_{n-1}) = 3^{n-1} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} = 1,$$

$$\text{又 } 4S_1 - 3^1 a_1 = 1,$$

所以数列 $\{4S_n - 3^n a_n\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列.

微专题 10 数列的通项与求和

考点一

典例 1 (1)B (2)ACD [(1) $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 是“等比差”数列,

$$\therefore \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{a_n} = d (n \in \mathbb{N}^*).$$

$$\therefore a_1 = a_2 = 1, a_3 = 3, \therefore d = \frac{a_3}{a_2} - \frac{a_2}{a_1} = 2,$$

$$\therefore \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2, \frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2, \dots, \frac{a_3}{a_2} - \frac{a_2}{a_1} = 2, \text{ 由累加法}$$

$$\text{得 } \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{a_2}{a_1} = 2n, \text{ 即 } \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 2n + 1, \text{ 即 } \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2n - 3 (n \geq 2, n$$

$$\in \mathbb{N}^*),$$

$$\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2n - 3, \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = 2n - 5, \dots, \frac{a_2}{a_1} = 1,$$

$$\text{由累乘法得 } \frac{a_n}{a_1} = (2n-3)(2n-5)\cdots 1,$$

$$\therefore a_n = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3),$$

$$\therefore \frac{a_{24}}{a_{22}} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 41 \times 43 \times 45}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 41} = 1\,935.$$

故选 B.

$$(2) \text{A 项, } \because a_{n+1} - a_n = n + 1,$$

$$\therefore a_{20} = (a_{20} - a_{19}) + (a_{19} - a_{18}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = 20 + 19 + 18 + \cdots + 2 + 2 = 211, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{B 项, } \because a_{n+1} = 2a_n + 3, \therefore a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3),$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n + 3\}$ 是以 $a_1 + 3 = 4$ 为首项, 2 为公比的等比数列,

$$\therefore a_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1},$$

故 $a_n = 2^{n+1} - 3$, 故 B 错误;

$$\text{C 项, } \because a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 3a_n}, a_1 = 1, \text{ 则 } a_n \neq 0,$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1 + 3a_n}{a_n} = \frac{1}{a_n} + 3, \therefore \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 3,$$

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 $\frac{1}{a_1} = 1$ 为首项, 3 为公差的等差数列,

$$\therefore \frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2, \therefore a_n = \frac{1}{3n-2}, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{D 项, } \because 2(n+1)a_n - na_{n+1} = 0, \therefore \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{2a_n}{n},$$

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是以 $\frac{a_1}{1} = 2$ 为首项, 2 为公比的等比数列,

$$\therefore \frac{a_n}{n} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n, \therefore a_n = n \cdot 2^n, \text{ 故 D 正确.}]$$

$$(3) \text{解: (i) 证明: 由 } a_1 = 1 \text{ 及 } S_{n+1} = 4a_n + 2,$$

$$\text{有 } a_1 + a_2 = 4a_1 + 2, a_2 = 3a_1 + 2 = 5,$$

$$\therefore b_1 = a_2 - 2a_1 = 3,$$

$$\text{由 } S_{n+1} = 4a_n + 2, \text{ ①}$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, 有 } S_n = 4a_{n-1} + 2, \text{ ②}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1},$$

$$\therefore a_{n+1} - 2a_n = 2(a_n - 2a_{n-1}).$$

$$\text{又 } \because b_n = a_{n+1} - 2a_n, \therefore b_n = 2b_{n-1},$$

$\therefore \{b_n\}$ 是首项 $b_1 = 3$, 公比为 2 的等比数列.

$$(ii) \text{证明: 由 (i) 知, } b_n = 3 \cdot 2^{n-1}, \therefore c_n = \frac{a_n}{2^n}, \therefore c_{n+1} - c_n =$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n+1} - 2a_n}{2^{n+1}} = \frac{b_n}{2^{n+1}} = \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{3}{4},$$

$$\text{又 } c_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2},$$

$\therefore \{c_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, $\frac{3}{4}$ 为公差的等差数列.

$$(iii) \text{由 (ii) 可知, } c_n = \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} + (n-1) \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}n - \frac{1}{4},$$

$$\therefore a_n = (3n-1) \cdot 2^{n-2}.$$

考点二

典例 2 (1) $\frac{n}{2n+1}$ (2) $2 - \frac{2n+2}{3^n}$ [(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公

$$\text{差为 } d, \text{ 由已知, 得 } \begin{cases} 2a_2 + a_3 + a_5 = 4a_1 + 8d = 20, \\ 10a_1 + \frac{10 \times 9}{2}d = 10a_1 + 45d = 100. \end{cases}$$

$$\text{解得 } a_1 = 1, d = 2, \text{ 所以 } a_n = 2n - 1.$$

$$\text{所以 } b_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$T_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}.$$

(2) 当 $n=1$ 时, $2S_1 = a_1 + 2$, 解得 $a_1 = 2$,

$2S_n = n(a_n + 2)$, 当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = (n-1)(a_{n-1} + 2)$,

两式相减可得 $2a_n = na_n - (n-1)a_{n-1} + 2$,

即 $(n-2)a_n = (n-1)a_{n-1} - 2$, ①

则 $(n-1)a_{n+1} = na_n - 2$, ②

②-①可得 $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$,

由于 $a_2 - a_1 = 4$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公差为 4 的等差数列,

则 $a_n = 2 + 4(n-1) = 4n - 2$.

设 $b_n = \frac{a_n}{3^n} = (4n-2) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$,

所以 $T_n = \frac{2}{3} + \frac{6}{3^2} + \cdots + \frac{4n-2}{3^n}$, ③

$\frac{1}{3}T_n = \frac{2}{3^2} + \frac{6}{3^3} + \cdots + \frac{4n-6}{3^n} + \frac{4n-2}{3^{n+1}}$, ④

③-④可得 $\frac{2}{3}T_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \cdots + \frac{4}{3^n} - \frac{4n-2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} + \frac{\frac{4}{3^2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right]}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{4n-2}{3^{n+1}}$,

化简可得 $T_n = 2 - \frac{2n+2}{3^n}$.

(3) 解: (i) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

因为 $b_n = \begin{cases} a_n - 6, & n \text{ 为奇数}, \\ 2a_n, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$

所以 $b_1 = a_1 - 6$, $b_2 = 2a_2 = 2a_1 + 2d$, $b_3 = a_3 - 6 = a_1 + 2d - 6$.

因为 $S_4 = 32$, $T_3 = 16$,

所以 $\begin{cases} 4a_1 + 6d = 32, \\ (a_1 - 6) + (2a_1 + 2d) + (a_1 + 2d - 6) = 16, \end{cases}$

整理, 得 $\begin{cases} 2a_1 + 3d = 16, \\ a_1 + d = 7, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 5, \\ d = 2, \end{cases}$

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n + 3$.

(ii) 证明: 由 (i) 知 $a_n = 2n + 3$,

所以 $S_n = \frac{n[5 + (2n+3)]}{2} = n^2 + 4n$,

$b_n = \begin{cases} 2n-3, & n \text{ 为奇数}, \\ 4n+6, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$

当 n 为奇数时,

$$T_n = (-1+14) + (3+22) + (7+30) + \cdots + [(2n-7) + (4n+2)] + 2n-3 = [-1+3+7+\cdots+(2n-7) + (2n-3)] + [14+22+30+\cdots+(4n+2)] = \frac{n+1}{2}(-1+2n-3) + \frac{n-1}{2}(14+4n+2) \\ = \frac{3n^2+5n-10}{2}.$$

当 $n > 5$ 时, $T_n - S_n = \frac{3n^2+5n-10}{2} - (n^2 + 4n) =$

$$\frac{n^2-3n-10}{2} = \frac{(n-5)(n+2)}{2} > 0,$$

所以 $T_n > S_n$.

当 n 为偶数时, $T_n = (-1+14) + (3+22) + (7+30) + \cdots + [(2n-5) + (4n+6)] = [-1+3+7+\cdots+(2n-5)] + [14+22+30+\cdots+(4n+6)] = \frac{\frac{n}{2}(-1+2n-5)}{2} +$

$$\frac{\frac{n}{2}(14+4n+6)}{2} = \frac{3n^2+7n}{2}.$$

当 $n > 5$ 时, $T_n - S_n = \frac{3n^2+7n}{2} - (n^2 + 4n) = \frac{n^2-n}{2} =$

$$\frac{n(n-1)}{2} > 0,$$

所以 $T_n > S_n$.

综上所述, 当 $n > 5$ 时, $T_n > S_n$.

微专题 11 数列的重构与创新应用

考点一

典例 1 (1)B (2)C [(1) $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 的奇数项成等差数列, 首项为 1, 公差为 1; 偶数项成等比数列, 首项为 2, 公比为 2.

$\therefore a_{2n-1} = n, a_{2n} = 2^n$,

$b_n = (\log_2 a_{2n})^2 \cdot \sin\left(a_{2n-1} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = n^2 \cdot \sin \frac{n\pi}{2}$,

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 的前 100 项和为 $1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + \cdots + 97^2 - 99^2 = -2(1+3+5+7+\cdots+97+99) = -2 \times \frac{1}{2} \times 50(1+99) = -5\ 000$.

故选 B.

(2) 根据题意, 数列 $\{3n-1\}$ 是首项为 2, 公差为 3 的等差数列,

数列 $\{6n+5\}$ 是首项为 11, 公差为 6 的等差数列,

设数列 $\{3n-1\}$ 中第 i 项与数列 $\{6n+5\}$ 中第 j 项相同, 则有 $3i-1=6j+5$,

所以 $i=2j+2$, 即数列 $\{3n-1\}$ 中的第 4 项, 第 6 项, 第 8 项, $\cdots$ 与数列 $\{6n+5\}$ 中的项是相同的, 均被剔除.

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项为 2, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50.

所以数列 $\{a_n\}$ 前 10 项的和为 $5 + \frac{2+50}{2} \times 9 = 239$.

故选 C.]

(3) 解: (i) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由题意知, 当 $n=1$ 时, $a_1 q = 2a_1 + 2$, ①

当 $n=2$ 时, $a_1 q^2 = 2(a_1 + a_1 q) + 2$, ②

联立①②, 解得 $a_1 = 2, q = 3$.

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2 \times 3^{n-1}$.

(ii) 由 (i) 知 $a_n = 2 \times 3^{n-1}, a_{n+1} = 2 \times 3^n$.

所以 $a_{n+1} = a_n + (n+2-1)d_n$.

所以 $d_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{n+1} = \frac{4 \times 3^{n-1}}{n+1}$.

设数列 $\{d_n\}$ 中存在 3 项 d_m, d_k, d_p (其中 m, k, p 成等差数列) 成等比数列, 则 $d_k^2 = d_m \cdot d_p$,

所以 $\left(\frac{4 \times 3^{k-1}}{k+1}\right)^2 = \frac{4 \times 3^{m-1}}{m+1} \cdot \frac{4 \times 3^{p-1}}{p+1}$,

即 $\left(\frac{4 \times 3^{k-1}}{k+1}\right)^2 = \frac{4^2 \times 3^{m+p-2}}{(m+1)(p+1)}$.

又因为 m, k, p 成等差数列, 所以 $2k = m + p$,

所以 $(k+1)^2 = (m+1)(p+1)$,

化简得 $k^2 + 2k = mp + m + p$, 所以 $k^2 = mp$,

又 $2k=m+p$, 所以 $k=m=p$, 与已知矛盾.

所以在数列 $\{d_n\}$ 中不存在 3 项 d_m, d_k, d_p 成等比数列.

考点二

典例 2 (1)BCD (2)68 [(1)由 $a_{n+1}-2a_n=2^{n+1}$, 且 $a_1=2$,

可得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=1$,

所以数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是首项和公差均为 1 的等差数列,

可得 $\frac{a_n}{2^n}=1+n-1=n$, 即 $a_n=n \cdot 2^n$,

可得 $a_2=8$, 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 故 A 正确, BC 错误;

由 $S_n=1 \cdot 2^1+2 \cdot 2^2+3 \cdot 2^3+\cdots+n \cdot 2^n$, ①

$2S_n=1 \cdot 2^2+2 \cdot 2^3+3 \cdot 2^4+\cdots+n \cdot 2^{n+1}$, ②

由 ①-② 可得 $-S_n=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n-n \cdot 2^{n+1}=$

$\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n \cdot 2^{n+1}=(1-n) \cdot 2^{n+1}-2$,

化为 $S_n=(n-1) \cdot 2^{n+1}+2$, 故 D 错误.

故选 BCD.

(2)每行最后一个数的排列为 1, 5, 11, 19, 29, ...

第 n 行最后一个数的通项公式为 $b_n=n(n+1)-1$, 其中 $b_{44}=44 \times 45-1=1979 < 2025$, $b_{45}=45 \times 46-1=2069 > 2025$.

所以 2025 位于第 45 行, 且 $(2025-1979) \div 2=23$,

所以 2025 位于第 45 行、第 23 列, 所以 $i=45, j=23, i+j=45+23=68$.]

专题四 立体几何

微专题 12 空间几何体

考点一

典例 1 (1)A (2) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}\pi a^2$ $\frac{5\pi a^3}{96}$ (3) $\frac{7\sqrt{6}}{6}$

[(1)正六棱柱的六个侧面面积之和为 $2 \times 6 \times 6=72(\text{dm}^2)$, 正

六棱柱的底面面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times 6=6\sqrt{3}(\text{dm}^2)$, 正六棱柱的斜高

为 $=\sqrt{1^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2}=2(\text{dm})$,

故正六棱柱的侧面积为 $\frac{1}{2} \times (4+2) \times 2 \times 6=36(\text{dm}^2)$,

又正六棱柱的上底面面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 \times 6=24\sqrt{3}(\text{dm}^2)$,

所以该花灯的表面积为 $72+6\sqrt{3}+36+24\sqrt{3}=108+30\sqrt{3}(\text{dm}^2)$. 故选 A.

(2)圆锥 PO 的底面半径为 $\frac{a}{2}$, 高为 a , 则圆柱 OO' 的底面半

径是 $\frac{a}{4}$, 高为 $\frac{a}{2}$,

圆锥的表面积为

$\pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \pi \times \frac{a}{2} \times \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}\pi a^2$,

圆柱的侧面积为 $2\pi \times \frac{a}{4} \times \frac{a}{2} = \frac{\pi a^2}{4}$.

所以剩下几何体的表面积为

$\frac{\sqrt{5}+1}{4}\pi a^2 + \frac{\pi a^2}{4} = \frac{\sqrt{5}+2}{4}\pi a^2$;

圆锥的体积 $V_{PO} = \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 \times a = \frac{\pi}{12}a^3$,

$V_{\text{圆柱}} = \pi \times \left(\frac{a}{4}\right)^2 \times \frac{a}{2} = \frac{\pi}{32}a^3$,

所以剩下几何体的体积是 $\frac{\pi a^3}{12} - \frac{\pi a^3}{32} = \frac{5\pi a^3}{96}$.

(3)法一(直接法):如图,记上底面、下底面的中心分别为 O_1 , O , 则四边形 AOO_1A_1 为直角梯形. 由题意可知 $AO=2A_1O_1=$

$\sqrt{2}$, 则棱台的高 $h=OO_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以棱台的体积 $V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{2} (4+1+\sqrt{4 \times 1}) = \frac{7\sqrt{6}}{6}$.

法二(割补法):如图,将正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 补形,得到正四棱锥 $O-ABCD$. 由 $AB=2A_1B_1$, $AA_1=\sqrt{2}$, 可得 $OA=2\sqrt{2}$, 所以正四棱锥 $O-ABCD$ 的高 $h=\sqrt{6}$, 其体积 $V_1 = \frac{1}{3} \times$

$4 \times \sqrt{6} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$. 同理, 可得正四

棱锥 $O-A_1B_1C_1D_1$ 的高 $h = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 其体积 $V_2 = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{\sqrt{6}}{2} =$

$\frac{\sqrt{6}}{6}$, 则该棱台的体积 $V = V_1 - V_2 = \frac{7\sqrt{6}}{6}$.]

考点二

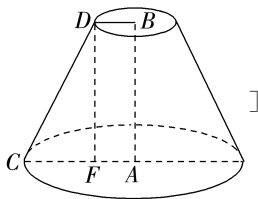
技法 1 典例 2 D [如图所示, 因为母线与底面所成的角为 60° , 则圆台的高 $DF=2\sqrt{3}$, 上底面半径 $BD=1$, 下底面半径 $AC=3$,

设外接球的半径为 R , 球心到上底面的距离为 h ,

则 $\begin{cases} R^2 = h^2 + 1, \\ R^2 = (2\sqrt{3}-h)^2 + 9, \end{cases}$ 解得 $h = \frac{5\sqrt{3}}{3}$,

所以 $R^2 = h^2 + 1 = \frac{28}{3}$, 所以 $S = 4\pi R^2 = \frac{112\pi}{3}$.

故选 D.



技法 2 典例 3 A [因为三棱锥 $S-ABC$ 底面是边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形, $SA \perp$ 平面 ABC , 且 $SA=2\sqrt{3}$,

所以可将三棱锥 $S-ABC$ 补成三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 点 S 与 A_1 重合,

所以正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球即为三棱锥 $S-ABC$ 的外接球,

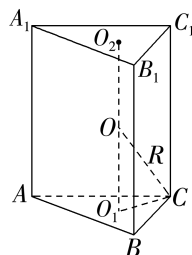
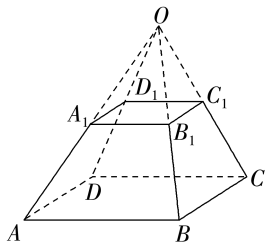
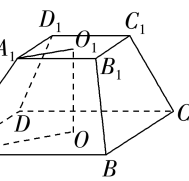
设球心为 O , 半径为 R ,

设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 外接圆的圆心分别为 O_1 和 O_2 , 其半径为 r ,

由正弦定理得 $r = \frac{\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ} = 1$, 由 O 为

O_1O_2 的中点,

所以 $R = \sqrt{r^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$,



所以该三棱锥的外接球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\pi}{3}$.

故选 A.]

考点三

典例 4 (1)A (2) $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ [(1)已知直三棱柱底面为直角三角

形,且直角边分别为 6 m 和 8 m,

根据勾股定理,底面三角形的斜边为 10 m,

设底面三角形的内切圆半径为 r ,根据三角形面积公式 $S = \frac{1}{2}ab$ (其中 a, b 为三角形直角边),

又三角形面积公式 $S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$ (其中 a, b, c 为三角形三边, r 为内切圆半径),

所以 $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a+b+c)r$, 即 $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = \frac{1}{2}(6+8+10)r$,

解得 $r=2$,

所以直径为 4 m, 小于直三棱柱的高.

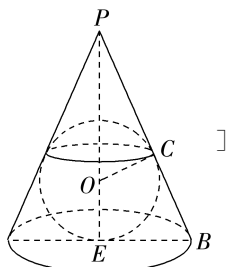
因为球要完全包含在直三棱柱内, 所以球的直径不能超过底面三角形的内切圆直径, 也不能超过直三棱柱的高,

所以球的最大半径为 2 m, 故选 A.

(2)易知半径最大的球即为该圆锥的内切球. 圆锥 PE 及其内切球 O 如图所示, 设内切球的半径为 R , 则 $\sin \angle BPE = \frac{R}{OP} = \frac{BE}{PB} = \frac{1}{3}$, 所以 $OP = 3R$, 所以 $PE = 4R =$

$\sqrt{PB^2 - BE^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$, 所以 $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以内切球

的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi$, 即该圆锥内半径最大的球的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$.



微专题 13 空间位置关系、空间角与空间距离的计算(几何法)

考点一

典例 1 (1)AC [(1)若 $n \subset \alpha$, 因为 $m \parallel n, m \subset \beta$, 则 $n \parallel \beta$,

若 $n \subset \beta$, 因为 $m \parallel n, m \subset \alpha$, 则 $n \parallel \alpha$,

若 n 不在 α 也不在 β 内,

因为 $m \parallel n, m \subset \alpha, m \subset \beta$,

所以 $n \parallel \alpha$ 且 $n \parallel \beta$, 故 A 正确;

若 $m \perp n$, 则 n 与 α, β 不一定垂直, 故 B 错误;

过直线 n 分别作平面, 与 α, β 分别相交于直线 a , 直线 b ,

因为 $n \parallel \alpha$, 过直线 n 的平面与平面 α 相交于直线 a , 所以 $n \parallel a$, 同理可得 $n \parallel b$, 所以 $a \parallel b$,

因为 $a \subset \beta, b \subset \beta$, 则 $a \parallel \beta$, 因为 $a \subset \alpha, \alpha \cap \beta = m$, 则 $a \parallel m$,

又因为 $n \parallel a$, 则 $m \parallel n$, 故 C 正确;

若 n 与 α 和 β 所成的角相等, 则 m 和 n 不一定垂直, 故 D 错误.

综上只有 AC 正确. 故选 AC.]

(2)证明: (i) $\because D, E$ 分别是 AB, PB 的中点,

$\therefore DE \parallel PA$.

又 $\because PA \subset$ 平面 $PAC, DE \not\subset$ 平面 PAC ,

$\therefore DE \parallel$ 平面 PAC .

(ii) $\because PC \perp$ 平面 $ABC, AB \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore PC \perp AB$,

$\because AB \perp BC, PC \cap BC = C, PC \subset$ 平面 $PBC, BC \subset$ 平面 PBC ,

$\therefore AB \perp$ 平面 $PBC, \because PB \subset$ 平面 PBC ,

$\therefore AB \perp PB$.

考点二

典例 2 解: (1)证明: 因为 $AD = AB = \frac{1}{2}BC = 2, \angle BAD =$

90° , 则 $BD = CD = 2\sqrt{2}$,

可得 $BD^2 + CD^2 = BC^2$, 则 $BD \perp CD$.

又因为平面 $PBD \perp$ 平面 BCD , 且平面 $PBD \cap$ 平面 $BCD = BD, CD \subset$ 平面 BCD ,

可得 $CD \perp$ 平面 PBD ,

且 $PB \subset$ 平面 PBD ,

所以 $CD \perp PB$.

(2)过点 P 作 $PE \perp BD$, 交 BD 于点 E .

因为 $PB = PD$, 则 E 为 BD 的中点,

又因为平面 $PBD \perp$ 平面 BCD , 平面 $PBD \cap$ 平面 $BCD = BD, PE \subset$ 平面 PBD ,

所以 $PE \perp$ 平面 BCD .

连接 CE , 则 $\angle PCE$ 为 PC 与平面 BCD 所成的角.

由(1)知 $BD = CD = 2\sqrt{2}$,

因为 $PE = \sqrt{2}, CE = \sqrt{CD^2 + DE^2} = \sqrt{10}$,

则 $PC = \sqrt{PE^2 + CE^2} = 2\sqrt{3}$,

所以直线 PC 与平面 BCD 所成的角的正弦值 $\sin \angle PCE =$

$\frac{PE}{PC} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

(3)由(2)知 $PE \perp$ 平面 $BCD, BC \subset$ 平面 BCD , 所以 $PE \perp BC$.

过点 E 作 $EF \perp BC$ 交 BC 于点 F ,

连接 PF ,

因为 $PE \cap EF = E, PE, EF \subset$ 平面 PEF , 所以 $BC \perp$ 平面 PEF ,

又 $PF \subset$ 平面 PEF , 所以 $BC \perp PF$,

可知 $\angle PFE$ 为二面角 $P-BC-D$ 的平面角.

在 $\triangle BCD$ 中, $EF = \frac{1}{4}BC = 1$, 则 $PF = \sqrt{PE^2 + EF^2} = \sqrt{3}$,

可得 $\cos \angle PFE = \frac{EF}{PF} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以二面角 $P-BC-D$ 的平面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

考点三

典例 3 (1)C (2)C [(1)因为 $PA = PB = PC = 2\sqrt{3}$,

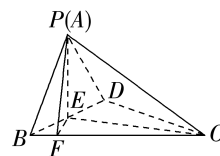
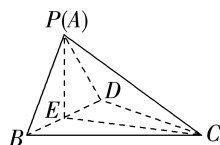
且底面 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $AB = BC$,

所以点 P 在平面 ABC 上的射影 O 为边 AC 的中点,

则 $PO = 3$, 在直角三角形 PAO 中, 由勾股定理,

得 $AO = \sqrt{3}$, 所以 $AC = 2\sqrt{3}$.

又因为底面 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,



所以 $AB=BC=\sqrt{6}$,

$$\text{所以 } V_{P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PO = \frac{1}{3} \times$$

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times 3 = 3.$$

设点 B 到平面 PAC 的距离为 d , 则

$$\text{有 } V_{P-ABC} = V_{B-PAC} = \frac{1}{3} S_{\triangle PAC} \cdot d =$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3d = 3,$$

解得 $d=\sqrt{3}$, 故点 B 到平面 PAC 的距离为 $\sqrt{3}$.

故选 C.

(2) 延长 MN 交 DC 延长线于点

Q , 连接 A_1Q, C_1Q, AC , 因为 $M,$

N 分别是 AB 和 BC 的中点, 则

$MN \parallel AC$,

由正方体的性质可得 $AC \parallel$

A_1C_1 , 所以 $MN \parallel A_1C_1$,

又 $A_1C_1 \subset$ 平面 A_1C_1D , $MN \not\subset$ 平面 A_1C_1D , 所以 $MN \parallel$ 平面 A_1C_1D , 所以 MN 到平面 A_1C_1D 的距离即点 Q 到平面 A_1C_1D 的距离, 设为 h , 则 $V_{Q-A_1C_1D} = V_{A_1-QDC_1}$.

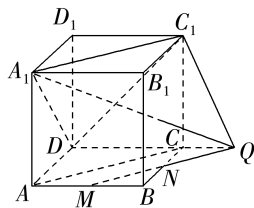
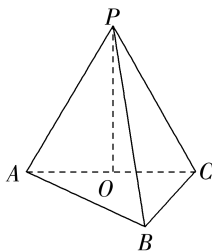
因为正方体的棱长为 1, 所以 $DQ = \frac{3}{2}, A_1D = DC_1 = A_1C_1 =$

$\sqrt{2}$, 所以 $\frac{1}{3} S_{\triangle A_1C_1D} \cdot h = \frac{1}{3} S_{\triangle DQC_1} \cdot A_1D_1$, 即 $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times$

$$(\sqrt{2})^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 1 \times 1,$$

解得 $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选 C.]



微专题 14 空间向量与空间角

考点一

典例 1 (1) A (2) $\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{4}$ [(1) 法一(向量法): 取 BC 中

点 D ,

连接 AD , 因为 $AB=AC$,

所以 $DA \perp DC$,

以 D 为原点, DA, DC 所在直线分别

为 x, y 轴, 过点 D 且垂直于平面

BAC 的直线为 z 轴, 建立如图所示

的空间直角坐标系,

不妨设 $AB=AC=AA_1=1$, 而

$\angle BAC=120^\circ$, 所以 $BD=DC=$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, AD = \frac{1}{2},$$

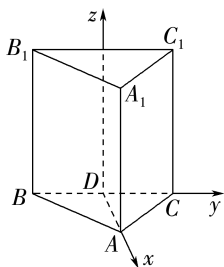
$$\text{所以 } B\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), A_1\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right), A\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right),$$

$$C_1\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BA_1} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right), \overrightarrow{AC_1} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right),$$

所以异面直线 BA_1 与 AC_1 所成角的余弦值为

$$|\cos \langle \overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{AC_1} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{AC_1}|}{|\overrightarrow{BA_1}| |\overrightarrow{AC_1}|}$$



$$= \frac{\left| -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1}} = \frac{3}{4}.$$

法二(几何法): 如图所示,

设 E, F, G, H 分别是线段 $A_1B_1, AB,$

AA_1, A_1C_1 的中点.

连接 EF, FH, HG, EH, FG , 易知

$FG \parallel BA_1, GH \parallel AC_1$,

故 $\angle FGH$ 或其补角是异面直线 BA_1

与 AC_1 所成的角.

设 $AB=AC=AA_1=2$, 由于 $\angle BAC$

$=120^\circ$,

所以 $B_1C_1=2\sqrt{3}, EH=\sqrt{3}, EF=2$,

则 $FH=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{7}$,

又 $FG=\frac{1}{2}BA_1=\sqrt{2}, GH=\frac{1}{2}AC_1=\sqrt{2}$,

在 $\triangle FGH$ 中, 由余弦定理得

$$\cos \angle FGH = \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}} = -\frac{3}{4}.$$

所以异面直线 BA_1 与 AC_1 所成角的余弦值为 $\frac{3}{4}$.

(2) 法一(向量法): 如图, 以 D 为

坐标原点, $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD'}$ 的方向

分别为 x, y, z 轴的正方向建立

空间直角坐标系, 设正方体的棱

长为 2, 则 $A(2, 0, 0), C(0, 2, 0),$

$D'(0, 0, 2), M(2, 2, 1), N(1, 2,$

$2), \overrightarrow{MN} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{CD'} = (0, -2, 2), \overrightarrow{DA} = (2, 0, 0)$. 因为

MN 和 CD' 所成角的范围为 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $|\cos \langle \overrightarrow{MN},$

$$\overrightarrow{CD'} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD'}|}{|\overrightarrow{MN}| |\overrightarrow{CD'}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{8}} = \frac{1}{2}, \text{ 故 } MN \text{ 和 } CD' \text{ 所成的}$$

角的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

因为 MN 和 AD 所成角的范围为 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $|\cos \langle \overrightarrow{MN},$

$$\overrightarrow{DA} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DA}|}{|\overrightarrow{MN}| |\overrightarrow{DA}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 故 } MN \text{ 和 } AD \text{ 所成角的}$$

大小为 $\frac{\pi}{4}$.

法二(几何法): 如图所示, 连接

AD', BC' ,

$\because M, N$ 分别是 BB' 和 $B'C'$ 的中点,

$\therefore MN \parallel BC' \parallel AD'$,

$\therefore \angle AD'C$ 是异面直线 MN 和 CD' 所

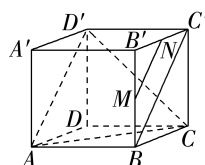
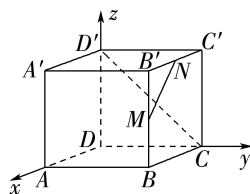
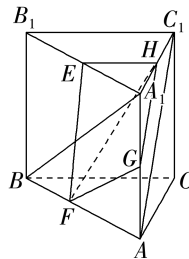
成的角, $\angle D'AD$ 是异面直线 MN 和 AD 所成的角. 连接

AC , 易知 $\triangle AD'C$ 为等边三角形,

$\therefore \angle AD'C = \frac{\pi}{3}$, 在 $\triangle AD'D$ 中, $\angle D'AD = \frac{\pi}{4}$.

所以 MN 和 CD' 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$, MN 和 AD 所成角的大

小为 $\frac{\pi}{4}$.]



考点二

典例 2 解: (1) 证明: 取 PA 的中点 N , PB 的中点 M , 连接 FN, MN, GM ,

因为 $\triangle ACD$ 与 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle BAC = 90^\circ$,

不妨设 $AD = CD = 2$, 所以 $AC = AB = 2\sqrt{2}$,

所以 $BC = 4$,

因为 E, F 分别为 BC, PD 的中点,

所以 $FN = \frac{1}{2}AD = 1, BE = \frac{1}{2}BC = 2$,

因为 G 为 PE 的中点,

所以 $GM = \frac{1}{2}BE = 1$,

因为 $\angle DAC = 45^\circ, \angle ACB = 45^\circ$,

所以 $AD \parallel BC$,

所以 $FN \parallel GM$,

又 $FN = GM$,

所以四边形 $FGMN$ 为平行四边形,

所以 $FG \parallel MN$,

因为 $FG \not\subset$ 平面 $PAB, MN \subset$ 平面 PAB ,

所以 $FG \parallel$ 平面 PAB .

(2) 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,

所以以 A 为原点, AC, AB, AP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

设 $AD = CD = 2$, 则 $A(0, 0, 0)$,

$B(0, 2\sqrt{2}, 0), C(2\sqrt{2}, 0, 0)$,

$D(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0), P(0, 0, 2\sqrt{2})$,

所以 $\overrightarrow{AB} = (0, 2\sqrt{2}, 0), \overrightarrow{DC} =$

$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), \overrightarrow{CP} = (-2\sqrt{2}, 0,$

$2\sqrt{2})$.

设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \overrightarrow{DC} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{CP} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0, \\ -2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}z = 0, \end{cases} \quad \text{取 } x = 1, \text{ 所以 } y = -1, z = 1,$$

所以 $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$,

设 AB 与平面 PCD 所成的角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AB}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{AB}| |\mathbf{n}|}$$

$$= \frac{|0 \times 1 + 2\sqrt{2} \times (-1) + 0 \times 1|}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

即 AB 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

考点三

典例 3 (1) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ [作 $AO \perp BC$ 于点 O , 连接 DO 易得 OD ,

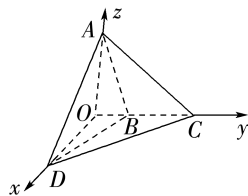
OC, OA 互相垂直,

以 O 为原点, $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}$ 的方向分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $AB = 1$, 则 $O(0, 0, 0), D(\frac{\sqrt{3}}{2},$

$0, 0), B(0, \frac{1}{2}, 0), C(0, \frac{3}{2}, 0),$

$A(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$.



显然 $\mathbf{n}_1 = (0, 0, 1)$ 为平面 BCD 的一个法向量,

设平面 ABD 的法向量 $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$,

$$\because \overrightarrow{AB} = (0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{AD} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}),$$

$$\therefore \begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0, \end{cases}$$

令 $z = 1$, 得 $\mathbf{n}_2 = (1, \sqrt{3}, 1)$ 为平面 ABD 的一个法向量.

设二面角 $A-BD-C$ 的大小为 θ , 则

$$|\cos \theta| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$\therefore$ 二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(2) (i) 证明: 由题意可得正四棱锥所有棱长均为 $\sqrt{2}$, 而 P 是 SD 的中点,

所以 $CP \perp SD, AP \perp SD$,

又因为 $AP \cap CP = P$, 且 $AP, CP \subset$ 平面 PAC , 所以 $SD \perp$ 平面 PAC ,

又因为 $SD \subset$ 平面 SAD , 所以平面 $SAD \perp$ 平面 PAC .

(ii) 解: 如图, 连接 OB , 易知

OB, OC, OS 两两互相垂直, 分

别以 OB, OC, OS 所在直线为

x 轴、 y 轴、 z 轴,

建立如图所示的空间直角坐标

系 $Oxyz$,

则 $A(0, -1, 0), B(1, 0, 0),$

$C(0, 1, 0), S(0, 0, 1), D(-1,$

$0, 0)$, 可得 $\overrightarrow{AC} = (0, 2, 0), \overrightarrow{SD} = (-1, 0, -1)$.

$$\text{由 } \overrightarrow{SP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{SD}, \text{ 得 } \overrightarrow{SP} = (-\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}),$$

$$\text{所以 } P(-\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}), \text{ 进而 } \overrightarrow{AP} = (-\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{4}).$$

设平面 PAC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{4}x + y + \frac{3}{4}z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2y = 0, \end{cases}$$

令 $z = 1$, 则 $x = 3$, 所以平面 PAC 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (3, 0, 1)$.

易知平面 SAC 的一个法向量为 $\overrightarrow{OB} = (1, 0, 0)$,

设平面 SAC 与平面 ACP 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = |\cos \langle \overrightarrow{OB},$

$$\mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{OB} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{OB}| |\mathbf{n}|} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

故平面 SAC 与平面 ACP 夹角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

考点一

典例 1 BCD [根据题意可建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0),$ $A_1(0,0,1), B_1(1,0,1),$ $C_1(1,1,1), D_1(0,1,1).$ 则 $E(\frac{1}{2}, 0, 1), O(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1).$ 又 $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} +$ $\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$, 故 $P(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}).$ 对于 A, $\overrightarrow{BE} = (-\frac{1}{2}, 0, 1), \overrightarrow{BA} = (-1, 0, 0),$

故点 A 到直线 BE 的距离为

$$\sqrt{|\overrightarrow{BA}|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{BE}|}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

故 A 错误;

对于 B, $\overrightarrow{AD_1} = (0, 1, 1), \overrightarrow{C_1O} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0),$ 设平面 ABC_1D_1 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1),$

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BA} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} y_1 + z_1 = 0, \\ -x_1 = 0, \end{cases} \quad \text{取 } y_1 = 1,$$

则 $\mathbf{m} = (0, 1, -1),$ 故点 O 到平面 ABC_1D_1 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{C_1O} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4},$ 故 B

正确;

对于 C, $\overrightarrow{BA_1} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{CD_1} = (-1, 0, 1),$ 故 $\overrightarrow{BA_1} \parallel \overrightarrow{CD_1},$ 而 B, A_1, C, D_1 不共线, 故 $\overrightarrow{BA_1} \parallel \overrightarrow{CD_1}.$ 因为 $\overrightarrow{BA_1} \not\subset$ 平面 $B_1CD_1, \overrightarrow{CD_1} \subset$ 平面 $B_1CD_1,$ 故 $\overrightarrow{BA_1} \parallel$ 平面 $B_1CD_1,$ 同理 $\overrightarrow{BD} \parallel$ 平面 $B_1CD_1,$ 而 $\overrightarrow{BD} \cap \overrightarrow{BA_1} = B, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA_1} \subset$ 平面 $DBA_1,$ 所以平面 $DBA_1 \parallel$ 平面 $B_1CD_1,$ 故平面 DBA_1 到平面 B_1CD_1 的距离即为点 B_1 到平面 DBA_1 的距离.又 $\overrightarrow{BD} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{B_1A_1} = (-1, 0, 0),$ 设平面 DBA_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2),$

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BA_1} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -x_2 + y_2 = 0, \\ -x_2 + z_2 = 0, \end{cases} \quad \text{取 } y_2 = 1, \text{ 则 } \mathbf{n} = (1, 1, 1),$$

1),

故点 B_1 到平面 DBA_1 的距离为 $\frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{B_1A_1}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{3},$ 故 C

正确;

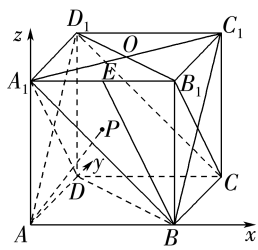
对于 D, $\overrightarrow{AP} = (\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}), \overrightarrow{AB} = (1, 0, 0),$

故点 P 到直线 AB 的距离为

$$\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{4} + \frac{4}{9} - \frac{9}{16}} = \frac{5}{6}, \text{ 故 D}$$

正确.

故选 BCD.]



考点二

典例 2 (1)证明:依题意可知 E 为 PC 的中点, $PD = CD = 2,$ 所以 $DE \perp PC,$ 又 $DE \perp BC, BC \cap PC = C, BC, PC \subset$ 平面 $PCB,$ 所以 $DE \perp$ 平面 $PCB.$ 又 $PB \subset$ 平面 $PCB,$ 所以 $DE \perp PB.$ 依题意可知 $CD \perp PD, CD \perp BD, BD \cap PD = D, BD, PD \subset$ 平面 $PDB,$ 所以 $CD \perp$ 平面 $PDB,$ 又 $PB \subset$ 平面 $PDB,$ 所以 $CD \perp PB.$ 因为 $CD \cap DE = D, CD, DE \subset$ 平面 $PCD,$ 所以 $PB \perp$ 平面 $PCD.$ 又 $PC \subset$ 平面 $PCD,$ 所以 $PB \perp PC.$ (2)解:由题意,得 $PC = AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$ 由(1)知 $PB \perp PC,$ 所以 $PB = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}.$ 以 D 为原点, DP, DC 所在直线分别为 x 轴、z 轴, 过点 D 且平行于 PB 的直线为 y 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,则 $D(0,0,0), P(2,0,0), C(0,0,$ $2), E(1,0,1), B(2,2\sqrt{3},0),$ 所以 $\overrightarrow{CP} = (2,0,-2), \overrightarrow{DP} = (2,0,0), \overrightarrow{DE} = (1,0,1), \overrightarrow{BC} = (-2, -2\sqrt{3}, 2).$ 设 $\overrightarrow{BF} = t\overrightarrow{BC} = (-2t, -2\sqrt{3}t, 2t) (0 \leq t \leq 1),$ 则 $F(2-2t, 2\sqrt{3}-2\sqrt{3}t, 2t), \overrightarrow{DF} = (2-2t, 2\sqrt{3}-2\sqrt{3}t, 2t),$ 若存在点 F, 使得 $CP \perp DF,$ 则 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DF} = 4 - 8t = 0,$ 解得 $t = \frac{1}{2},$ 则 $F(1, \sqrt{3}, 1),$ 即存在点 F 使得 $CP \perp DF,$ 则 $\overrightarrow{DF} = (1, \sqrt{3}, 1),$ 设平面 PDF 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1),$

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DF} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DP} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 + \sqrt{3}y_1 + z_1 = 0, \\ 2x_1 = 0, \end{cases}$$

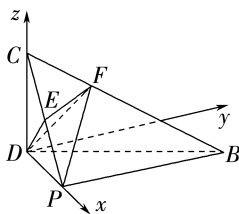
令 $y_1 = 1,$ 得 $x_1 = 0, z_1 = -\sqrt{3},$ 所以 $\mathbf{m} = (0, 1, -\sqrt{3})$ 为平面 PDF 的一个法向量,设平面 DEF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2),$

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DE} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DF} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_2 + z_2 = 0, \\ x_2 + \sqrt{3}y_2 + z_2 = 0, \end{cases}$$

令 $x_2 = 1,$ 得 $y_2 = 0, z_2 = -1,$ 所以 $\mathbf{n} = (1, 0, -1)$ 为平面 DEF 的一个法向量,所以 $|\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4},$

所以平面 PDF 与平面 DEF 夹角的正弦值为

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$



专题五 解析几何

微专题 16 直线与圆

考点一

典例 1 (1)ABD (2)ABD (3) $-\frac{1}{3}$ 或 $-\frac{7}{9}$

[(1)直线 $l_1: x+ay+1=0$, $l_2: (a-1)x+y+a=0$,
对于 A, 当 $a=1$ 时, 直线 $l_1: x+y+1=0$, 故斜率 $k=-1$, 则
倾斜角为 135° , A 正确;

对于 B, $l_1 \perp l_2$ 等价于 $a-1+a=0$, 解得 $a=-\frac{1}{2}$, 故 B 正确;

对于 C, 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 $a(a-1)-1=0$ 且 $a \neq a-1$, 故 $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, 故 C 错误;

对于 D, $l_1: x+ay+1=0$, 令 $y=0$, 得 $x+1=0$, 解得 $x=-1$, $y=0$,

故直线 l_1 恒过点 $(-1, 0)$, D 正确. 故选 ABD.

(2)对于 A, 直线 l 的方程为 $x-y\sin\theta+2=0$, 设直线 l 的倾斜角为 α ,

①当 $\sin\theta=0$ 时, $\alpha=\frac{\pi}{2}$, ②当 $\sin\theta \neq 0$ 时, 直线 l 的斜率 $k = \tan\alpha = \frac{1}{\sin\theta}$,

所以 $\tan\alpha \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$,

所以 $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$,

综上所述, $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, 故 A 正确;

对于 B, 过点 $(2\sqrt{3}, 2)$, 与直线 $\sqrt{3}x-y+2=0$ 平行的直线方程为 $y-2=\sqrt{3}(x-2\sqrt{3})$, 即 $\sqrt{3}x-y-4=0$, B 正确;

对于 C, 当截距为 0 时, 设直线方程为 $y=kx$, 又直线过点 $P(1, 2)$,

代入直线方程可得 $k=2$, 所以直线方程为 $y=2x$,

当截距不为 0 时, 设直线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$, 又直线过点 $P(1, 2)$,

代入直线方程可得 $a=3$, 所以直线方程为 $x+y-3=0$,

所以过点 $P(1, 2)$ 且在 x 轴、 y 轴上的截距相等的直线方程为 $x+y-3=0$ 或 $y=2x$, 故 C 错误;

对于 D, 经过平面内任意相异两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的直线, 当斜率等于 0 时, $y_1=y_2, x_1 \neq x_2$, 方程为 $y=y_1$, 能用方程 $(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$ 表示;

当斜率不存在时, $y_1 \neq y_2, x_1=x_2$, 方程为 $x=x_1$, 能用方程 $(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$ 表示;

当斜率不为 0 且斜率存在时, 直线方程为 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$,

也能用方程 $(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1) \cdot (x-x_1)$ 表示, 故 D 正确. 故选 ABD.

(3)法一: 因为 $A(-3, -4), B(6, 3)$ 两点到直线 l 的距离相等, 所以 $\frac{|-3a-4+1|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|6a+3+1|}{\sqrt{a^2+1}}$, 于是 $|3a+3| = |6a+4|$, 所以 $27a^2+30a+7=0$, 解得 $a=-\frac{1}{3}$ 或 $a=-\frac{7}{9}$.

法二: $\because$ 点 $A(-3, -4), B(6, 3)$ 到直线 l 的距离相等,

$\therefore$ 分两种情况:

①当直线 AB 与直线 l 平行时,

$\therefore k_{AB}=k_l$, 即 $\frac{3-(-4)}{6-(-3)}=-a, \therefore a=-\frac{7}{9}$.

②当直线 l 过线段 AB 的中点 $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 时,

$\therefore \frac{3}{2}a - \frac{1}{2} + 1 = 0, \therefore a = -\frac{1}{3}$.

综上, 实数 a 的值为 $-\frac{1}{3}$ 或 $-\frac{7}{9}$.

考点二

典例 2 (1)C (2) $x^2+y^2-x+7y-32=0$ (3) $(x-2)^2+(y-3)^2=13$ 或 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 或 $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{65}{9}$ 或 $\left(x-\frac{8}{5}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{169}{25}$ (从这四个方程中任选一个作答即可)

[(1)法一: 令 $x-y=k$, 则 $x=k+y$, 代入原式化简得 $2y^2+(2k-6)y+k^2-4k-4=0$,

因为存在实数 y , 所以 $\Delta \geq 0$, 即 $(2k-6)^2-4 \times 2(k^2-4k-4) \geq 0$,
化简得 $k^2-2k-17 \leq 0$, 解得 $1-3\sqrt{2} \leq k \leq 1+3\sqrt{2}$,

故 $x-y$ 的最大值是 $3\sqrt{2}+1$. 故选 C.

法二: 由 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$,

整理得 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$,

令 $x=3\cos\theta+2, y=3\sin\theta+1$, 其中 $\theta \in [0, 2\pi]$,

则 $x-y=3\cos\theta-3\sin\theta+1=3\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1$.

因为 $\theta \in [0, 2\pi]$, 所以 $\theta+\frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$, 则当 $\theta+\frac{\pi}{4}=2\pi$,

即 $\theta=\frac{7\pi}{4}$ 时, $x-y$ 取得最大值 $3\sqrt{2}+1$. 故选 C.

法三: 由 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$ 可得 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$, 设 $x-y=k$, 则圆心到直线 $x-y=k$ 的距离 $d = \frac{|2-1-k|}{\sqrt{2}} \leq 3$, 解得 $1-3\sqrt{2} \leq k \leq 1+3\sqrt{2}$, 故 $x-y$ 的最大值是 $3\sqrt{2}+1$.

故选 C.

(2)设经过两圆交点的圆的方程为 $x^2+y^2+6x-4+\lambda(x^2+y^2+6y-28)=0$ ($\lambda \neq -1$), 即 $(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2+6x+6\lambda y-28\lambda-4=0$, 圆心坐标为 $\left(\frac{-3}{1+\lambda}, \frac{-3\lambda}{1+\lambda}\right)$, 将其代入直线 $x-y-4=0$, 解得 $\lambda=-7$. 故所求圆的方程为 $x^2+y^2-x+7y-32=0$.

(3)依题意设圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,

若过 $(0, 0), (4, 0), (-1, 1)$ 三点,

则 $\begin{cases} F=0, \\ 16+4D+F=0, \\ 1+1-D+E+F=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} F=0, \\ D=-4, \\ E=-6, \end{cases}$

易得 $D^2+E^2-4F>0$,

所以过这三点的圆的方程为 $x^2+y^2-4x-6y=0$, 即 $(x-2)^2+(y-3)^2=13$;

若过 $(0, 0), (4, 0), (4, 2)$ 三点,

则 $\begin{cases} F=0, \\ 16+4D+F=0, \\ 16+4+4D+2E+F=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} F=0, \\ D=-4, \\ E=-2, \end{cases}$

易得 $D^2+E^2-4F>0$,

所以过这三点的圆的方程为 $x^2+y^2-4x-2y=0$, 即 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$;

若过 $(0, 0), (-1, 1), (4, 2)$ 三点,

$$\begin{cases} F=0, \\ 1+1-D+E+F=0, \\ 16+4+4D+2E+F=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F=0, \\ D=-\frac{8}{3}, \text{ 易得 } D^2+E^2-4F>0, \\ E=-\frac{14}{3}, \end{cases}$$

所以过这三点的圆的方程为 $x^2+y^2-\frac{8}{3}x-\frac{14}{3}y=0$, 即

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9};$$

若过 $(-1,1), (4,0), (4,2)$ 三点,

$$\begin{cases} 1+1-D+E+F=0, \\ 16+4D+F=0, \\ 16+4+4D+2E+F=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F=-\frac{16}{5}, \\ D=-\frac{16}{5}, \text{ 易得 } D^2+E^2-4F>0, \\ E=-2, \end{cases}$$

所以过这三点的圆的方程为 $x^2+y^2-\frac{16}{5}x-2y-\frac{16}{5}=0$, 即

$$\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}.$$

考点三

典例 3 (1)C (2)ABD (3) $y=4$ 或 $3x+4y-13=0$

[(1)圆 $x^2+(y+1)^2=1$ 的圆心和半径分别为 $C(0,-1)$, $R=1$,

圆心 $C(0,-1)$ 到直线 $l:y=-x+1$ 的距离 $d=\frac{|0-1-1|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$,

$$|AB|=2|PA|\sin\angle APC=2|PA|\cdot\frac{R}{|PC|}=2\frac{|PA|}{|PC|}=\frac{2\sqrt{|PC|^2-R^2}}{|PC|}$$

$$=2\sqrt{\frac{|PC|^2-R^2}{|PC|^2}}=2\sqrt{1-\frac{1}{|PC|^2}},$$

故当 $|PC|$ 最小时, $|AB|$ 最小, 又知 $|PC|$ 的最小值为 $d=\sqrt{2}$,

故 $|AB|_{\min}=\sqrt{2}$.

故选 C.

(2) 对于 A, 由圆 $C_1:(x-1)^2+(y-2a)^2=9$, 圆 $C_2:x^2+y^2-8x+2ay+a^2+12=0, a\in\mathbf{R}$,

可知 $C_1(1,2a)$, 半径 $r_1=3, C_2(4,-a)$, 半径 $r_2=2$,

故直线 C_1C_2 的方程为 $y+a=-a(x-4)$,

即 $y=-a(x-3)$, 所以直线 C_1C_2 恒过定点 $(3,0)$, A 正确.

对于 B, 当圆 C_1 和圆 C_2 外切时,

$$|C_1C_2|=r_1+r_2, \text{ 即 } \sqrt{(1-4)^2+(2a+a)^2}=3+2,$$

$$\text{解得 } a=\pm\frac{4}{3},$$

当 $a=\frac{4}{3}$ 时, 如图所示, 当 P, C_1, C_2 ,

Q 四点共线时,

$$\begin{aligned} |PQ|_{\max} &= |C_1C_2|+r_1+r_2 \\ &= \sqrt{(1-4)^2+\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{3}\right)^2} \\ &\quad +5=10; \end{aligned}$$

同理求得当 $a=-\frac{4}{3}$ 时, $|PQ|_{\max}=10$, B 正确.

对于 C, 若圆 C_1 和圆 C_2 共有 2 条公切线, 则两圆相交,

$$\text{则 } |r_1-r_2|<|C_1C_2|<r_1+r_2,$$

$$\text{即 } 1<\sqrt{(1-4)^2+(2a+a)^2}<5, \text{ 解得 } -\frac{4}{3}<a<\frac{4}{3}, \text{ C}$$

错误.

对于 D, 当 $a=\frac{1}{3}$ 时, 两圆相交,

$$C_1:(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=9,$$

$$C_2:(x-4)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=4,$$

将两方程相减可得公共弦方程为 $6x-2y-\frac{59}{3}=0$,

则 $C_1\left(1, \frac{2}{3}\right)$ 到 $6x-2y-\frac{59}{3}=0$ 的距离为

$$\frac{\left|6-\frac{4}{3}-\frac{59}{3}\right|}{\sqrt{6^2+(-2)^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{4}, \text{ 则圆 } C_1 \text{ 与圆 } C_2 \text{ 相交弦的弦长为}$$

$$2\sqrt{9-\left(\frac{3\sqrt{10}}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{6}}{2}, \text{ D 正确.}$$

(3) 法一: 当直线 l 垂直于 x 轴

时, 直线 $l:x=-1$ 与圆相离, 不

满足条件. 当直线 l 不垂直于 x

轴时, 可设直线 l 的方程为 $y-$

$4=k(x+1)$, 即 $kx-y+(k+$

$4)=0$. 如图, 因为直线与圆相

切, 所以圆心 $(2,3)$ 到直线 l 的距离等于圆的半径, 从而

$$\frac{|2k-3+(k+4)|}{\sqrt{k^2+1}}=1, \text{ 解得 } k=0 \text{ 或 } k=-\frac{3}{4}. \text{ 因此, 所求直}$$

线 l 的方程是 $y=4$ 或 $3x+4y-13=0$.

法二: 当直线 l 垂直于 x 轴时, 直线 $l:x=-1$ 与圆相离, 不

满足条件. 当直线 l 不垂直于 x 轴时, 可设直线 l 的方程为 $y-$

$4=k(x+1)$. 因为直线 l 与圆相切, 所以方程组

$$\begin{cases} y-4=k(x+1), \\ (x-2)^2+(y-3)^2=1 \end{cases} \text{ 仅有一组解. 由方程组消去 } y, \text{ 得到}$$

关于 x 的一元二次方程 $(1+k^2)x^2+(2k^2+2k-4)x+k^2+$

$2k+4=0$. 依题意, 这个一元二次方程有两个相等的实数根,

所以可得判别式 $\Delta=(2k^2+2k-4)^2-4(1+k^2)(k^2+2k+$

$$4)=0, \text{ 解得 } k=0 \text{ 或 } k=-\frac{3}{4}. \text{ 因此, 所求直线 } l \text{ 的方程是}$$

$y=4$ 或 $3x+4y-13=0$.]

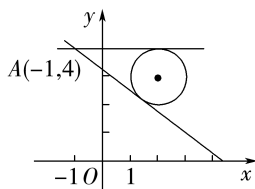
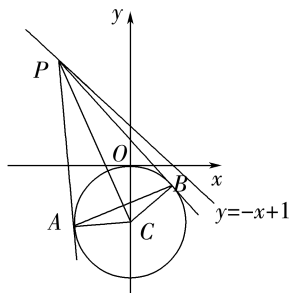
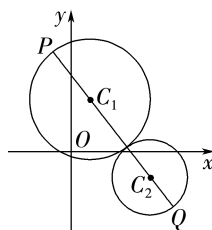
微专题 17 圆锥曲线的定义、方程及性质

考点一

典例 1 (1)BCD (2)AC (3)9 [(1)对于选项 A, 满足

$|PA|=|PF|$ 的点 P 位于线段 AF 的垂直平分线上, 其方程

为 $y=\frac{3}{2}$, 与 C 仅有一个交点, 故 A 选项错误;



对于选项 B, 设点 P 到直线 AF 的距离为 d ,

$$S_{\triangle PAF} = \frac{1}{2} |AF| \cdot d = \frac{3}{2}, \text{ 则 } d=1,$$

所以点 P 在直线 $x=2$ 或 y 轴上, 这样的点 P 有三个, 故 B 选项正确;

对于选项 C, 如图 1, 点 A 在抛物线外, $|PF| + |PA| \geq |AF|$, 故 $|PA| + |PF|$ 的最小值为 $|FA|=3$, 故 C 选项正确;

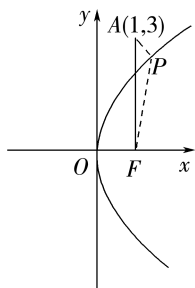


图1

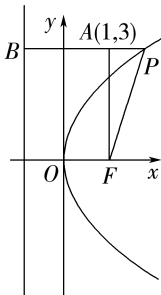


图2

对于选项 D, 如图 2, 过点 A 作 x 轴的平行线, 与准线交于点 B , 与抛物线交于点 P ,

根据抛物线定义, $|PB| = |PF|$, 此时 $|PA| - |PF|$ 有最小值 $-|AB| = -2$, 故 D 选项正确, 故选 BCD.

(2) 对于选项 A, 因为椭圆 C 的左、右焦点分别为 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$, 离心率为 $\frac{1}{2}$,

所以 $c=1$, $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 解得 $a=2$, 又 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$,

则椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 故选项 A 正确;

对于选项 B, 当点 M 与点 B 重合时, $|MF_2|$ 取最小值为 1, 故选项 B 错误;

对于选项 C, 设 $M(x_0, y_0)$, 此时 $k_{MA} k_{MB} = \frac{y_0}{x_0 + 2}$.

$$\frac{y_0}{x_0 - 2} = \frac{y_0^2}{x_0^2 - 4},$$

因为点 M 在椭圆 C 上,

$$\text{所以 } \frac{y_0^2}{3} = 1 - \frac{x_0^2}{4} = \frac{4 - x_0^2}{4},$$

$$\text{则 } \frac{y_0^2}{x_0^2 - 4} = -\frac{3}{4},$$

故选项 C 正确;

对于选项 D, 在 $\triangle F_1MF_2$ 中,

$$\text{由余弦定理得 } |F_1M|^2 + |F_2M|^2 - 2|F_1M| \cdot |F_2M| \cdot \frac{4}{5} = 4c^2 = 4,$$

因为 $|F_1M| + |F_2M| = 2a = 4$, 即 $(|F_1M| + |F_2M|)^2 = 16$,

$$\text{所以 } \frac{18}{5} |F_1M| \cdot |F_2M| = 12, \text{ 解得 } |F_1M| |F_2M| = \frac{10}{3},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle F_1MF_2} = \frac{1}{2} |F_1M| |F_2M| \sin \angle F_1MF_2 = \frac{1}{2} \times \frac{10}{3} \times$$

$$\frac{3}{5} = 1, \text{ 故选项 D 错误. 故选 AC.}$$

(3) 由题意得, 焦距 $2c=8$, 可得 $c=4$, 在双曲线中, $c^2 = a^2 + b^2$, 所以 $a^2 = c^2 - b^2 = 16 - 12 = 4$, 解得 $a=2$, 根据双曲线定义可得 $||MF_1| - |MF_2|| = 2a = 4$, 所以 $|5 - |MF_2|| = 4$, 解得 $|MF_2| = 1$ 或 $|MF_2| = 9$, 当 $|MF_2| = 1$ 时, $|MF_1| + |MF_2| = 6 < 8$, 不满足题意, 故舍去; 当 $|MF_2| = 9$ 时, $|MF_1| + |MF_2| = 14 > 8$, 满足题意, 所以 $|MF_2| = 9$.

考点二

典例 2 (1) AC (2) BCD (3) $(\frac{\sqrt{5}}{5}, 1)$ $(1, \frac{3\sqrt{5}}{5})$ [(1) 将

$A(1,2)$ 代入双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中, 可得 $\frac{1}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$,

对于 A, $\frac{1}{a^2} = \frac{4}{b^2} + 1 > 1$, 故 $a^2 < 1$, 因此 $0 < a < 1$, 所以 $2a < 2$, 即 C 的实轴长小于 2, 故 A 正确;

对于 B, 双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 若渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{3}x$, 则 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$,

结合 $\frac{1}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$ 可得 $\frac{1}{a^2} - \frac{4}{3a^2} = 1$, 则 $\frac{1}{3a^2} = -1$, 该方程无实数根,

故渐近线方程不可能为 $y = \pm \sqrt{3}x$, 故 B 错误;

对于 C, 离心率为 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + (\frac{4}{b^2} + 1)b^2} = \sqrt{5 + b^2} > \sqrt{5}$, 故 C 正确;

对于 D, 若焦距为 4, 则 $2c = 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{\frac{b^2}{b^2 + 4} + b^2} = 4$,

$$\text{故 } b^2 = \frac{-1 + \sqrt{65}}{2} < c^2,$$

故焦距可能为 4, 故 D 错误.

故选 AC.

(2) 对于选项 A, 因为椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,

所以 $a=2$, 则椭圆 C 的长轴为 $2a=4$, 故选项 A 错误;

对于选项 B, 易知 $c=\sqrt{3}$, 所以 $F(\sqrt{3}, 0)$, $-2 \leq m \leq 2$,

因为点 P 在椭圆 C 上, 所以 $\frac{m^2}{4} + n^2 = 1$, 即 $n^2 = 1 - \frac{m^2}{4}$,

$$\text{所以 } |PF|^2 = (m - \sqrt{3})^2 + n^2 = (m - \sqrt{3})^2 + 1 - \frac{m^2}{4} =$$

$$\frac{3}{4}m^2 - 2\sqrt{3}m + 4,$$

易知函数 $y = \frac{3}{4}m^2 - 2\sqrt{3}m + 4$ 图象的对称轴为直线 $m =$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} > 2,$$

所以该函数在 $[-2, 2]$ 上单调递减,

则当 $m=-2$ 时, 函数取到最大值, 最大值为 $7 + 4\sqrt{3}$,

因为 $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$, 所以 $|PF|$ 的最大值为 $2 + \sqrt{3}$, 故选项 B 正确;

对于选项 C, 易知 $-1 \leq n \leq 1$, $|OF| = \sqrt{3}$,

$$\text{所以 } S_{\triangle OFP} = \frac{1}{2} |OF| |n| = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times |n| \leq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

则 $\triangle OFP$ 的面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故选项 C 正确;

对于选项 D, 由 $a=2, c=\sqrt{3}$, 可得 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故选项 D 正确.

故选 BCD.

(3) 设椭圆和双曲线的半焦距分别为 c_1, c_2 , 由题意得双曲线

的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 所以 $0 < \frac{b}{a} < \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $0 < \frac{b^2}{a^2} <$

$$\frac{4}{5}, \text{ 所以 } e_1 = \frac{c_1}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \in \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 1\right), e_2 = \frac{c_2}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \in \left(1, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right).]$$

考点三

典例 3 (1)ABD (2)BD [(1)因为抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 经过点 $M(1, 2)$,

所以 $2^2 = 2p$, 解得 $p = 2$, 故 A 正确;

所以抛物线方程为 $y^2 = 4x$, 则焦点 $F(1, 0)$, 依题意, 直线 l 的斜率不为 0,

设直线 $l: x = my + 1$, 联立 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ x = my + 1, \end{cases}$ 消去 x 整理得 $y^2 - 4my - 4 = 0$,

则 $\Delta = 16m^2 + 16 > 0$, 所以 $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4$,

则 $x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 2 = 4m^2 + 2$,

$x_1 x_2 = (my_1 + 1)(my_2 + 1) = m^2 y_1 y_2 + m(y_1 + y_2) + 1 = 1$,

所以 $|AB| = x_1 + x_2 + 2 = 4m^2 + 4 \geq 4$, 故 B 正确;

因为 $\vec{OA} = (x_1, y_1), \vec{OB} = (x_2, y_2)$, 所以 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = -3$, 故 C 错误;

由题意知, $x_1 \neq 0$ 且 $x_2 \neq 0$, 所以 $k_1 k_2 = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -4$, 故 D 正确.

故选 ABD.

(2)对于 A, 由题可得, 焦点 $F(1, 0)$, 准线 $l: x = -1$,

设直线 AB 的方程为 $x = my + 1$,

联立 $\begin{cases} x = my + 1, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 化简得 $y^2 - 4my - 4 = 0$,

则 $\Delta = 16m^2 + 16 > 0$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

所以 $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4$,

又 $|FA| = x_1 + 1, |FB| = x_2 + 1, |FA| = 3|FB|$,

所以 $x_1 + 1 = 3(x_2 + 1)$,

即 $\begin{cases} my_1 + 2 = 3(my_2 + 2), \\ y_1 y_2 = -4, \\ y_1 + y_2 = 4m, \end{cases}$

解得 $m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$,

则直线 AB 的斜率 $k = \pm \sqrt{3}$, 所以倾斜角为 60° 或 120° , 故 A 错误;

对于 B, 如图, 设 AB 的中点为 M , 过 A, B, M 分别作准线 l 的垂线, 垂足分别为 A', B', M' ,

根据抛物线的定义, $|AA'| = |FA|, |BB'| = |FB|$,

则 $|MM'| = \frac{1}{2}(|AA'| + |BB'|) =$

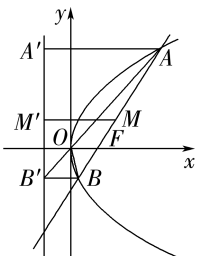
$\frac{1}{2}(|FA| + |FB|) = \frac{1}{2}|AB|$,

所以以线段 AB 为直径的圆与 l 相切, 故 B 正确;

对于 C, $\vec{OA} = (x_1, y_1), \vec{OB} = (x_2, y_2)$,

若 $OA \perp OB$, 则 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$,

由 $y_1^2 = 4x_1, y_2^2 = 4x_2$, 可得 $x_1 x_2 = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} = 1$, 则 $1 - 4 = -3 \neq 0$, 所以不存在直线 AB 使得 $OA \perp OB$, 故 C 错误;



对于 D, 直线 AO 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1}x$, 令 $x = -1$, 得 $y = -\frac{y_1}{x_1}$,

故 D 点坐标为 $\left(-1, -\frac{y_1}{x_1}\right)$,

因为 $y_1^2 = 4x_1$, 所以 $y = -\frac{y_1}{x_1} = -\frac{4}{y_1}$,

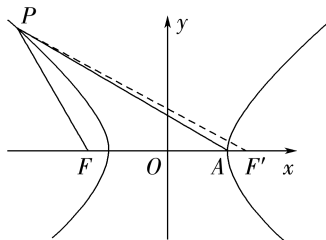
又 $y_1 y_2 = -4$, 则 $y = y_2$, 所以 D 点的纵坐标与 B 点的纵坐标相同, 即 $BD \perp l$, 故 D 正确.

故选 BD.]

微专题 18 圆锥曲线中的离心率问题

考点一

典例 1 (1)D (2)D [(1)设双曲线的右焦点为 F' , 半焦距为 c , 如图, 连接 PF' . 因为 $|FA| = |FP|$, $\angle FAP = 30^\circ$, 所以 $\angle PFA = 120^\circ, |FA| = |FP| = a + c$. 由双曲线的定义, 可知 $|PF'| - |PF| = 2a$, 所以 $|PF'| = 3a + c$. 在 $\triangle PF'F$ 中, 由余弦定理可得 $|PF'|^2 = |FP|^2 + |FF'|^2 - 2|FP| \times |FF'| \times \cos 120^\circ$, 即 $(3a + c)^2 = (a + c)^2 + (2c)^2 - 2(a + c) \times 2c \times \cos 120^\circ$, 得 $4a^2 + ac - 3c^2 = 0$, 得 $3e^2 - e - 4 = 0$ (e 为双曲线的离心率), 得 $e = \frac{4}{3}$ 或 $e = -1$ (舍去). 故选 D.



(2)设 $|AF_1| = m$, 由椭圆的定义可得 $|AF_2| = 2a - m$,

又因为 $|AF_1| = |AB|$, 所以 $|BF_2| = m - |AF_2| = 2m - 2a$,

再由椭圆的定义可得 $|BF_1| + |BF_2| = 2a$,

而 $|BF_1| = a$, 所以 $2m - 2a + a = 2a$,

可得 $m = \frac{3}{2}a, |AF_2| = \frac{1}{2}a$,

在 $\triangle ABF_1$ 中, 由余弦定理的推论可得

$$\cos A = \frac{|AF_1|^2 + |AB|^2 - |BF_1|^2}{2|AF_1| \cdot |AB|}$$

$$= \frac{\frac{9}{4}a^2 + \frac{9}{4}a^2 - a^2}{2 \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{3}{2}a} = \frac{7}{9},$$

在 $\triangle AF_1F_2$ 中, 由余弦定理的推论可得

$$\cos A = \frac{|AF_1|^2 + |AF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|AF_1| \cdot |AF_2|},$$

$$\text{即 } \frac{7}{9} = \frac{\frac{9}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 - 4c^2}{2 \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{1}{2}a}, \text{ 整理可得 } 3c^2 = a^2,$$

解得 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选 D.]

考点二

典例 2 (1)B (2)A [(1)根据题意可知, 点 P 在双曲线的右支上,

由双曲线的定义可得, $|PF_1| - |PF_2| = 2a, |PF_2| \geq c - a$,

又 $|PF_1| = 3|PF_2|$, 故 $|PF_2| = a$,

设 $a^2=9t, t>0$, 则 $c^2=8t$, 所以 $b^2=t$.

又 $|AB|^2=a^2+b^2=10t=10$,

所以 $t=1$, 所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$.

(2)(i) 设 $R(x, y)$, 由(1)知 $A(0, -1)$, 又 $P(m, n), m \neq 0$,

所以 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR} = (m, n+1) \cdot (x, y+1) = mx + (n+1)(y+1) = |\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AR}| \cdot \cos 0 = 3$. ①

由 $k_{AP} = k_{AR}$, 得 $\frac{n+1}{m} = \frac{y+1}{x}$, ②

由①②, 得 $x = \frac{3m}{m^2+(n+1)^2}, y = \frac{n+2-m^2-n^2}{m^2+(n+1)^2}$,

故 R 的坐标为 $(\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}, \frac{n+2-m^2-n^2}{m^2+(n+1)^2})$.

(ii) 由(i)得 $k_{OR} = \frac{n+2-m^2-n^2}{3m} = 3k_{OP} = \frac{3n}{m}$, 整理得 $m^2 + n^2 + 8n - 2 = 0$,

即 $m^2 + (n+4)^2 = 18$.

所以点 P 的轨迹方程为 $m^2 + (n+4)^2 = 18 (m \neq 0)$.

由题设 $Q(3\cos \theta, \sin \theta), K(0, -4)$,

则 $|KQ|^2 = (3\cos \theta)^2 + (\sin \theta + 4)^2 = -8\sin^2 \theta + 8\sin \theta + 25$,

设 $s = \sin \theta$, 则 $|KQ|^2 = -8s^2 + 8s + 25 = -8(s - \frac{1}{2})^2 + 27$

$(-1 \leq s \leq 1)$,

当 $s = \sin \theta = \frac{1}{2}$ 时, $|KQ|$ 取得最大值, 且 $|KQ|_{\max} = 3\sqrt{3}$,

故 $|PQ|$ 的最大值为 $|KQ|_{\max} + 3\sqrt{2} = 3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

考点二

典例 2 解: (1) $\because PF$ 的斜率为 $\frac{1}{3}$,

$\therefore |PA| = \frac{1}{3}|FA|$,

$\therefore S_{\triangle PFA} = \frac{1}{2} \times |PA| \times |FA| = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times (a+c)^2 = \frac{3}{2}$,

得 $a+c=3$,

又 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, $\therefore a=2, c=1$, 则 $b=\sqrt{3}$,

$\therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 证明: 由(1)知 $F(-1, 0), P(2, 1)$, 则直线 PF 的方程为

$y = \frac{1}{3}(x+1)$,

易知直线 PB 的斜率存在, 设 PB 的方程为 $y-1=k(x-2)$,

由 $\begin{cases} y-1=k(x-2), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 得 $(4k^2+3)x^2 - 8k(2k-1)x + 8(2k^2 -$

$2k-1) = 0$,

$\because PB$ 与椭圆仅有一个交点,

$\therefore \Delta = 64k^2(2k-1)^2 - 32(4k^2+3)(2k^2-2k-1) = 0$, 解

得 $k = -\frac{1}{2}$,

$\therefore x_B = -\frac{-8k(2k-1)}{2(4k^2+3)} = 1$, 则 $y_B = \frac{3}{2}$,

$\therefore B(1, \frac{3}{2})$,

$\therefore$ 直线 BF 的斜率为 $\frac{\frac{3}{2}-0}{1-(-1)} = \frac{3}{4}$.

$\because \tan 2\angle PFA = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - (\frac{1}{3})^2} = \frac{3}{4}$, $\therefore \angle BFA = 2\angle PFA$,

即 PF 平分 $\angle AFB$.

多维变迁

解: (1) 由题意可得, $2b=4, e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}, a^2=b^2+c^2$,

解得 $b=2, a^2=9$,

$\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 证明: $A(0, 2), B(-3, 0), C(0, -2), D(3, 0)$,

直线 BC 的方程为 $2x+3y+6=0$.

设直线 AP 的方程为 $y=kx+2(k<0)$, $\therefore N(\frac{-4}{k}, -2)$.

联立 $\begin{cases} y=kx+2, \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases}$ 消去 y 整理得, $(4+9k^2)x^2 + 36kx = 0$,

解得 $x=0$ 或 $x = -\frac{36k}{4+9k^2}$,

$\therefore P(-\frac{36k}{4+9k^2}, \frac{8-18k^2}{4+9k^2})$.

直线 PD 的方程为 $y = \frac{18k^2-8}{27k^2+36k+12}(x-3)$,

与 $2x+3y+6=0$ 联立, 解得 $x = \frac{-6k-4}{3k^2+2k}, y = \frac{8-18k^2}{9k^2+6k}$.

$\therefore M(\frac{-6k-4}{3k^2+2k}, \frac{8-18k^2}{9k^2+6k})$.

$\therefore k_{MN} = \frac{\frac{8-18k^2}{9k^2+6k} + 2}{\frac{-6k-4}{3k^2+2k}} = \frac{2}{3}$,

又 $k_{CD} = \frac{2}{3}$, 且直线 CD 与直线 MN 不重合,

$\therefore MN \parallel CD$.

微专题 20 定点(定线)、定值问题

考点一

典例 1 (1) 证明: 由题意知, 直线 PQ 的斜率存在且不为 0, 设直线 $PQ: y-3=k(x+2), P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} y-3=k(x+2), \\ \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1, \end{cases}$ 得 $(4k^2+9)x^2 + (16k^2+24k)x +$

$16k^2+48k=0$,

则 $\Delta = (16k^2+24k)^2 - 4(4k^2+9)(16k^2+48k) = -36 \times 48k > 0$, 则 $k < 0$,

故 $x_1+x_2 = -\frac{16k^2+24k}{4k^2+9}, x_1x_2 = \frac{16k^2+48k}{4k^2+9}$.

直线 $AP: y = \frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$,

令 $x=0$, 解得 $y_M = \frac{2y_1}{x_1+2}$,

同理得 $y_N = \frac{2y_2}{x_2+2}$,

则 $y_M + y_N = 2 \times \frac{y_1(x_2+2) + y_2(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}$
 $= 2 \times \frac{(kx_1+2k+3)(x_2+2) + (kx_2+2k+3)(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}$

$$\begin{aligned}
&= 2 \times \frac{2kx_1x_2 + (4k+3)(x_1+x_2) + 8k+12}{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4} \\
&= 2 \times \frac{2k(16k^2+48k) + (4k+3)(-16k^2-24k) + (8k+12)(4k^2+9)}{16k^2+48k+2(-16k^2-24k)+4(4k^2+9)} \\
&= 2 \times \frac{108}{36} = 6,
\end{aligned}$$

所以 MN 的中点的纵坐标为 3.

所以线段 MN 的中点为定点 $(0, 3)$.

(2)(i)解: 因为 $|MF| = 2$,

由抛物线的定义得 $t + \frac{p}{2} = 2$,

又 $2pt = 4$, 所以 $t = \frac{2}{p}$,

因此 $\frac{2}{p} + \frac{p}{2} = 2$, 即 $p^2 - 4p + 4 = 0$, 解得 $p = 2$,

从而抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$.

(ii)证明: 由(i)知点 M 的坐标为 $M(1, 2)$,

因为 $\angle AMB$ 的平分线与 x 轴垂直,

所以直线 MA, MB 的倾斜角互补,

即直线 MA, MB 的斜率互为相反数,

$$k_{MA} = \frac{y_1 - 2}{x_1 - 1} = \frac{y_1 - 2}{\frac{y_1^2}{4} - 1} = \frac{4}{y_1 + 2},$$

$$\text{同理 } k_{MB} = \frac{4}{y_2 + 2},$$

$$\text{则 } k_{MA} + k_{MB} = \frac{4}{y_1 + 2} + \frac{4}{y_2 + 2} = 0,$$

化简得 $y_1 + y_2 = -4$,

$$\text{则 } y_N = \frac{y_1 + y_2}{2} = -2,$$

所以点 N 在定直线 $y = -2$ 上.

考点二

典例 2 解: (1) 因为点 $A(4, 3)$ 在双曲线 C 上且离心率为 $\frac{\sqrt{7}}{2}$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{2}, \\ \frac{16}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1, \\ c^2 = a^2 + b^2, \end{cases}$$

解得 $a^2 = 4, b^2 = 3$,

则双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$.

(2)证明: 易知直线 l 的斜率存在,

设直线 l 的方程为 $y = kx + m, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并整理得 } (3 - 4k^2)x^2 - 8kmx - 4m^2 - 12 = 0,$$

$$\Delta = 64k^2m^2 + 4(3 - 4k^2)(4m^2 + 12) > 0,$$

即 $m^2 - 4k^2 + 3 > 0$.

$$\text{得 } x_1 + x_2 = \frac{8km}{3 - 4k^2}, x_1x_2 = \frac{-4m^2 - 12}{3 - 4k^2},$$

因为 $\angle PAQ$ 的平分线与 x 轴垂直,

$$\text{所以 } k_{AP} + k_{AQ} = \frac{y_1 - 3}{x_1 - 4} + \frac{y_2 - 3}{x_2 - 4} = 0,$$

$$\text{即 } (x_2 - 4)(y_1 - 3) + (x_1 - 4)(y_2 - 3) = 0,$$

$$\text{可得 } (x_2 - 4)(kx_1 + m - 3) + (x_1 - 4)(kx_2 + m - 3) = 0,$$

$$\text{整理得 } 2kx_1x_2 + (m - 4k - 3)(x_1 + x_2) - 8(m - 3) = 0,$$

$$\text{所以 } 2k \times \frac{-4m^2 - 12}{3 - 4k^2} + (m - 4k - 3) \times \frac{8km}{3 - 4k^2} - 8(m - 3) = 0,$$

$$\text{整理得 } (k + 1)(4k + m - 3) = 0,$$

因为直线 l 不过点 $A(4, 3)$, 所以 $4k + m - 3 \neq 0$,

解得 $k = -1$.

则直线 l 的倾斜角为定值, 定值为 $\frac{3\pi}{4}$.

专题六 概率与统计

微专题 21 计数原理与概率

考点一

典例 1 (1)B (2)C (3)96 [(1)若甲没有被选中, 则不同的安排方法有 $A_4^3 = 24$ (种);

若甲被选中, 且只能参加数学知识竞答, 则需要从剩下 4 人选两人参加物理和化学知识竞答, 安排方法有 $A_4^2 = 12$ (种),

则不同的安排方法有 $24 + 12 = 36$ (种).

故选 B.

(2)根据题设中的要求, 每名志愿者只分配到 1 个项目, 每个项目至少分配 1 名志愿者, 可分两步进行安排: 第一步, 将 5 名志愿者分成 4 组, 其中 1 组 2 人, 其余每组 1 人, 共有 C_5^2 种分法; 第二步, 将分好的 4 组安排到 4 个项目中, 有 A_4^4 种安排方法. 故满足题意的分配方案共有 $C_5^2 \cdot A_4^4 = 240$ (种).

(3)从 4 种不同颜色中选择若干种颜色, 给正四面体 $A-BCD$ 的每条棱染色, 要求每条棱只染一种颜色,

若所有相对的棱涂同一种颜色, 共用 3 种颜色, 有 $A_4^3 = 24$ (种)方法,

若所有相对的 3 对棱中有 2 对对棱涂同色, 共用 4 种颜色, 有 $C_3^2 A_4^4 = 72$ (种)方法,

所以共有 $24 + 72 = 96$ (种)方法.]

考点二

典例 2 (1) $-26x^2$ (2)18 564 (3)14 或 23

(4)135 (5)30 [(1)由 $(1 - 2x)^5 = C_5^0 \cdot 1^5 \cdot (-2x)^0 + C_5^1 \cdot 1^4 \cdot (-2x)^1 + \cdots + C_5^5 \cdot 1^0 \cdot (-2x)^5$, $(1 + 3x)^4 = C_4^0 \cdot 1^4 \cdot (3x)^0 + C_4^1 \cdot 1^3 \cdot (3x)^1 + \cdots + C_4^4 \cdot 1^0 \cdot (3x)^4$, 得 $(1 - 2x)^5(1 + 3x)^4$ 展开式中按 x 的升幂排列后, 第 3 项为含有 x^2 的多项式,

即为 $C_5^0(-2x)^0 C_4^2(3x)^2 + C_5^1(-2x)^1 C_4^1(3x)^1 + C_5^2(-2x)^2 C_4^0(3x)^0 = 54x^2 + (-10x) \times (12x) + 40x^2 = -26x^2$.

(2) $\left(9x + \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ 的展开式的通项为

$$T_{k+1} = C_{18}^k (9x)^{18-k} \left(\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^k = C_{18}^k \cdot 3^{36-3k} \cdot x^{18-\frac{3}{2}k} \quad (k=0, 1, 2, \cdots, 18),$$

由 $18 - \frac{3}{2}k = 0$, 得 $k = 12$,

所以常数项为 $C_{18}^{12} = 18\ 564$.

(3) 由 $2C_n^9 = C_n^8 + C_n^{10}$, 得 $\frac{2n!}{9!(n-9)!} = \frac{n!}{8!(n-8)!} + \frac{n!}{10!(n-10)!}$, 化简得 $n^2 - 37n + 322 = 0$, 解得 $n = 14$ 或 $n = 23$.

(4) 由 $(1-x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (-x)^k$,
得 $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 的展开式中 x^4 的系数为
 $C_{10}^4 (-1)^4 + C_{10}^3 (-1)^3 + C_{10}^2 (-1)^2 = 135$.

(5) $(x^2+x+y)^5 = [y+(x^2+x)]^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot y^{5-k} \cdot (x^2+x)^k$,

$x^5 y^2$ 中 y 的次数为 2, 故 $5-k=2$, 得 $k=3$,

而 $(x^2+x)^3$ 中, 含有 x^5 的项为 $C_3^1 (x^2)^2 \cdot x^1 = 3x^5$,

所以 $(x^2+x+y)^5$ 的展开式中, $x^5 y^2$ 的系数为 $C_5^3 \times 3 = 30$.]

考点三

典例 3 (1)B (2) $\frac{3}{8}$ (3)0.052 5 $\frac{2}{7}$

[(1) 根据题意, 对于其四边 AB, BC, CD, DA ,

按顺序分别抛掷一枚质地均匀的硬币,

共有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ (种) 情况,

要从 A 出发沿着尚未擦去的边能到达点 C ,

若保留 AB, BC 两条边, 则 CD, DA 可保留也可擦去,

共有 $2 \times 2 = 4$ (种) 情况;

若保留 AD, DC 两条边, 则 AB, BC 可保留也可擦去,

共有 $2 \times 2 - 1 = 3$ (种) 情况 (其中有一种情况 AD, DC, AB, BC 都保留与上面重复),

则要从 A 出发沿着尚未擦去的边能到达点 C , 共有 7 种情况,

所以可以到达 C 点的概率为 $\frac{7}{16}$.

故选 B.

(2) 法一: 每天玩手机不超过 1 h 且近视的学生有 $40\% - 20\% \times 50\% = 30\%$, 记“该学生每天玩手机不超过 1 h”为事件 A , “该学生近视”为事件 B , 则 $P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$,

$P(AB) = 0.3$, 所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.8} = \frac{3}{8}$.

法二: 设该校学生共有 1 000 人, 则近视的有 $1\,000 \times 40\% = 400$ (人), 每天玩手机超过 1 h 的人数为 200, 其中近视的有 100 人, 所以每天玩手机不超过 1 h 的学生有 $1\,000 - 200 = 800$ (人), 近视的有 $400 - 100 = 300$ (人), 从玩手机不超过 1 h 的学生中任取 1

名学生, 该学生近视的概率 $P = \frac{300}{800} = \frac{3}{8}$.

(3) 设 $B =$ “任取一个零件为次品”, $A_i =$ “零件为第 i 台车床加工” ($i = 1, 2, 3$), 则 $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, 且 A_1, A_2, A_3 两两互斥. 根据题意得

$P(A_1) = 0.25, P(A_2) = 0.3, P(A_3) = 0.45$,

$P(B|A_1) = 0.06, P(B|A_2) = P(B|A_3) = 0.05$.

第一空: 由全概率公式, 得

$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = 0.25 \times 0.06 + 0.3 \times 0.05 + 0.45 \times 0.05 = 0.052\,5$.

第二空: “如果取到的零件是次品, 计算它是第 1 台车床加工的概率”, 就是计算在 B 发生的条件下, 事件 A_1 发生的概率.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} \\ = \frac{0.25 \times 0.06}{0.052\,5} = \frac{2}{7}.$$

微专题 22 随机变量及其分布

考点一

典例 1 (1)D [由 $a + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, 得 $a = \frac{1}{2}$,

所以 $E(X) = -1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$,

$D(X) = \left(-1 + \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(0 + \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{9}$,

所以 $D(Y) = a^2 D(X) = \frac{1}{4} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{36}$.]

(2) 解: (i) 设事件 F 为“质点 M 移动 2 次后到达的点所对应的积分为 0”,

由题意可知质点 M 移动两次后在点 C , 又起点为点 C , 即 M

的移动一次向左一次向右, 所以 $P(F) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$.

(ii) X 的所有可能取值为 $-400, -200, 0, 200, 400$,

$P(X = -400) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{256}$,

$P(X = -200) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} \times 2 = \frac{3}{64}$,

$P(X = 0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times 2 + \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{27}{128}$,

$P(X = 200) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{8} \times 2 = \frac{27}{64}$,

$P(X = 400) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{81}{256}$,

所以随机变量 X 的分布列为

X	-400	-200	0	200	400
P	$\frac{1}{256}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{81}{256}$

$E(X) = -400 \times \frac{1}{256} + (-200) \times \frac{3}{64} + 0 \times \frac{27}{128} + 200 \times \frac{27}{64} + 400 \times \frac{81}{256} = 200$.

考点二

典例 2 解: (1) 甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分, 则甲第一阶段至少投中 1 次, 乙第二阶段也至少投中 1 次,

$\therefore$ 比赛成绩不少于 5 分的概率

$P = (1 - 0.6^3)(1 - 0.5^3) = 0.686$.

(2) (i) 若甲参加第一阶段比赛, 则甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率为 $P_{\text{甲}} = [1 - (1 - p)^3]q^3$,

若乙参加第一阶段比赛, 则甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率为 $P_{\text{乙}} = [1 - (1 - q)^3]p^3, \because 0 < p < q$,

$\therefore P_{\text{甲}} - P_{\text{乙}} = q^3 - (q - pq)^3 - p^3 + (p - pq)^3$
 $= (q - p)(q^2 + pq + p^2) + (p - q)[(p - pq)^2 + (q - pq)^2 + (p - pq)(q - pq)]$

$$=(p-q)(3p^2q^2-3p^2q-3pq^2)$$

$$=3pq(p-q)(pq-p-q)$$

$$=3pq(p-q)[(1-p)(1-q)-1]>0,$$

∴ $P_{\text{甲}} > P_{\text{乙}}$, ∴ 应该由甲参加第一阶段比赛.

(ii) 若甲参加第一阶段比赛, 比赛成绩 X 的所有可能取值为 0, 5, 10, 15,

$$P(X=0)=(1-p)^3+[1-(1-p)^3] \cdot (1-q)^3,$$

$$P(X=5)=[1-(1-p)^3] \cdot C_3^1 q(1-q)^2,$$

$$P(X=10)=[1-(1-p)^3] \cdot C_3^2 q^2(1-q),$$

$$P(X=15)=[1-(1-p)^3] \cdot q^3,$$

$$\therefore E(X)=15[1-(1-p)^3]q=15(p^3-3p^2+3p) \cdot q;$$

若乙参加第一阶段比赛, 比赛成绩 Y 的所有可能取值为 0, 5, 10, 15,

$$\text{同理 } E(Y)=15(q^3-3q^2+3q) \cdot p,$$

$$\therefore E(X)-E(Y)=15[pq(p+q)(p-q)-3pq(p-q)]=15pq(p-q)(p+q-3),$$

$$\therefore 0 < p < q,$$

$$\therefore p-q < 0, p+q-3 < 1+1-3=-1 < 0,$$

$$\therefore pq(p-q)(p+q-3) > 0, E(X) > E(Y),$$

∴ 应该由甲参加第一阶段比赛.

微专题 23 概率模型的构建

考点一

典例 1 解: 设甲、乙、丙三人 100 米跑成绩合格分别为事件 A, B, C , 显然事件 A, B, C 相互独立,

且 $P(A)=\frac{2}{5}, P(B)=\frac{3}{4}, P(C)=\frac{1}{3}$, 设恰有 k 人合格的概率为 $P_k (k=0, 1, 2, 3)$, 则

$$(1) \text{三人都合格的概率 } P_3=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}=\frac{1}{10}.$$

$$(2) \text{三人都合格的概率 } P_0=P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})=\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}=\frac{1}{10}.$$

$$(3) \text{三人中恰有两人合格的概率 } P_2=P(ABC)+P(AB\bar{C})+P(\bar{A}BC)=\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}=\frac{23}{60}.$$

考点二

典例 2 解: (1) 设事件 M = “选取的 2 位学生分数不同”,

$$\text{则 } P(M)=1-P(\bar{M})=1-\frac{C_3^2+C_9^2+C_5^2+C_3^2}{C_{20}^2}=\frac{69}{95},$$

故所选的 2 位学生分数不同的概率为 $\frac{69}{95}$.

$$(2) \text{设 } A = \text{“学生分数不小于 3”}, \text{则 } P(A)=\frac{5+3}{20}=\frac{2}{5},$$

X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 由题意可得 $X \sim B\left(3, \frac{2}{5}\right)$,

$$\text{又 } P(X=0)=\left(1-\frac{2}{5}\right)^3=\frac{27}{125},$$

$$P(X=1)=C_3^1 \times \frac{2}{5} \times \left(1-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{54}{125},$$

$$P(X=2)=C_3^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{36}{125},$$

$$P(X=3)=\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

由于 $X \sim B\left(3, \frac{2}{5}\right)$, 则 $E(X)=3 \times \frac{2}{5}=\frac{6}{5}$.

考点三

典例 3 解: (1) 设“从乙家选 2 间民宿, 选到的 2 间民宿为普通型”为事件 A ; “从丙家选 2 间民宿, 选到的 2 间民宿为普通型”为事件 B ,

所以选出的 4 间均为普通型民宿的概率为 $P(AB)=P(A) \cdot$

$$P(B)=\frac{C_5^2}{C_6^2} \times \frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{4}{15}.$$

(2) 这 10 家民宿, 其中普通型民宿的房间不低于 17 间的有 4 家, 随机变量 X 的可能取值有 0, 1, 2, 3, 4,

$$\text{则 } P(X=0)=\frac{C_6^4}{C_{10}^4}=\frac{15}{210}=\frac{1}{14},$$

$$P(X=1)=\frac{C_4^1 C_6^3}{C_{10}^4}=\frac{80}{210}=\frac{8}{21},$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2 C_6^2}{C_{10}^4}=\frac{90}{210}=\frac{3}{7},$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3 C_6^1}{C_{10}^4}=\frac{24}{210}=\frac{4}{35},$$

$$P(X=4)=\frac{C_4^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{210},$$

即 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

$$\text{所以 } E(X)=0 \times \frac{15}{210} + 1 \times \frac{80}{210} + 2 \times \frac{90}{210} + 3 \times \frac{24}{210} + 4 \times$$

$$\frac{1}{210}=\frac{336}{210}=1.6.$$

考点四

典例 4 (1) **B** (2) 1 200 [(1) ∵ $X \sim N(3, \sigma^2)$,

$$\therefore P(X \geq 3)=0.5,$$

$$\therefore P(X > 2)=P(2 < X < 3)+P(X \geq 3)=0.7,$$

$$\therefore P(2 < X < 3)=0.2,$$

$$\therefore P(3 < X < 4)=P(2 < X < 3)=0.2.$$

故选 B.

$$(2) \text{因为正态密度函数为 } f(x)=\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-85)^2}{2\sigma^2}}, \text{ 则 } \mu=85,$$

$$\text{由 } P(70 \leq X \leq 100)=0.7 \text{ 得 } P(X > 100)=\frac{1-0.7}{2}=0.15,$$

所以超过 100 分的人数大约为 $8\,000 \times 0.15=1\,200$.]

考点一

典例 1 解: (1) 由频率分布直方图可知,

年龄在 40 岁以下的居民所占比例为 $10 \times (0.010 + 0.025 + 0.030) = 0.65$,

年龄在 50 岁以下的居民所占比例为 $0.65 + 10 \times 0.020 = 0.85$,

所以 75% 分位数位于 $[40, 50)$ 内,

由 $40 + 10 \times \frac{0.75 - 0.65}{0.85 - 0.65} = 45$,

所以样本数据的 75% 分位数为 45.

(2)(i) 由题知, 2×2 列联表为

单位: 人

对该程序 的态度	年龄		合计
	青年	非青年	
喜欢	90	20	110
不喜欢	60	30	90
合计	150	50	200

零假设为

H_0 : 年龄与喜欢该程序无关联.

根据列联表中的数据, 可得

$$\chi^2 = \frac{200 \times (90 \times 30 - 60 \times 20)^2}{150 \times 50 \times 110 \times 90} \approx 6.061 > 3.841 = x_{0.05}.$$

根据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 我们推断 H_0 不成立, 即认为年龄与喜欢该程序有关联, 此推断犯错误的概率不大于 0.05.

(ii) 按照分层随机抽样, 青年居民应抽取 $8 \times \frac{3}{4} = 6$ (人), 非青年居民应抽取 2 人.

设从中随机抽取的 4 名居民中青年居民的人数为 X ,

$$P(X=3) = \frac{C_6^3 C_2^1}{C_8^4} = \frac{4}{7}, P(X=4) = \frac{C_6^4}{C_8^4} = \frac{3}{14},$$

$$\text{所以 } P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) = \frac{11}{14},$$

所以这 4 名居民中至少有 3 人为青年居民的概率为 $\frac{11}{14}$.

考点二

典例 2 解: (1) 记“第 2 次投篮的人是乙”为事件 A , “第 1 次投篮的人是甲”为事件 B , 则 $A = BA + \bar{B}A$,

$$\text{所以 } P(A) = P(BA + \bar{B}A) = P(BA) + P(\bar{B}A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) = 0.5 \times (1 - 0.6) + 0.5 \times 0.8 = 0.6.$$

(2) 设第 i 次投篮的人是甲的概率为 p_i , 由题意可知, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_{i+1} = p_i \times 0.6 + (1 - p_i) \times (1 - 0.8)$, 即 $p_{i+1} = 0.4p_i + 0.2 = \frac{2}{5}p_i + \frac{1}{5}$,

$$\text{所以 } p_{i+1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \left(p_i - \frac{1}{3} \right),$$

又 $p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, 所以数列 $\left\{ p_i - \frac{1}{3} \right\}$ 是以 $\frac{1}{6}$ 为首项, $\frac{2}{5}$ 为公比的等比数列,

$$\text{所以 } p_i - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5} \right)^{i-1},$$

$$\text{所以 } p_i = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5} \right)^{i-1}.$$

(3) 设第 i 次投篮时甲投篮的次数为 X_i , 则 X_i 的可能取值为 0 或 1, 当 $X_i = 0$ 时, 表示第 i 次投篮的人是乙, 当 $X_i = 1$ 时, 表示第 i 次投篮的人是甲, 所以 $P(X_i = 1) = p_i$, $P(X_i = 0) = 1 - p_i$, 所以 $E(X_i) = p_i$.

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n,$$

$$\text{则 } E(Y) = E(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n,$$

$$\text{由 (2) 知, } p_i = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5} \right)^{i-1},$$

$$\text{所以 } E(Y) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = \frac{n}{3} + \frac{1}{6} \times$$

$$\left[1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} \right] = \frac{n}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n}{1 - \frac{2}{5}} =$$

$$\frac{n}{3} + \frac{5}{18} \times \left[1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right].$$

考点三

典例 3 解: (1) 设 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 模型的样本相关系数为 r_1 , $\hat{y} =$

$\hat{d} \ln x + \hat{c}$ 模型的样本相关系数为 r_2 ,

$$\text{所以 } r_1 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{39}{\sqrt{10} \times \sqrt{161.2}} \approx 0.975,$$

$$r_2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{15.9}{\sqrt{1.6} \times \sqrt{161.2}} \approx 0.994,$$

由于 $0 < r_1 < r_2$, 所以 $\hat{y} = \hat{d} \ln x + \hat{c}$ 模型拟合效果更好, 即 $\hat{y} = \hat{d} \ln x + \hat{c}$ 模型更适合刻画日销售额 y 关于日产量 x 的关系.

(2)(i) 由 (1) 知 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = \hat{d} \ln x + \hat{c}$,

$$\text{由题可得 } \hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})^2} = \frac{15.9}{1.6} = 9.9375 \approx 10, \hat{c} =$$

$$\bar{y} - \hat{d}\bar{u} = \frac{73}{5} - 10 \times \frac{4.8}{5} = 5,$$

$$\text{所以 } \hat{y} = 10 \ln x + 5.$$

(ii) 由题可得 $r(x) = 10 \ln x + 5 - \frac{1}{2}x - 3 = 10 \ln x - \frac{1}{2}x + 2$ ($x \geq 1$),

$$\text{所以 } r'(x) = \frac{10}{x} - \frac{1}{2} = \frac{20 - x}{2x}, \text{ 令 } r'(x) = \frac{20 - x}{2x} = 0, \text{ 解得 } x = 20.$$

当 $1 \leq x < 20$ 时, $r'(x) > 0$, 当 $x > 20$ 时, $r'(x) < 0$, 则 $r(x)$ 在 $[1, 20)$ 内单调递增, 在 $(20, +\infty)$ 上单调递减, 所以当 $x = 20$ 时, 日利润 $r(x)$ 最大.

多维进阶测评部分

【阶段一】

课时作业(一)

1. C [因为 $A = \left\{ \sin \frac{7\pi}{6}, \cos \frac{5\pi}{3}, \tan \frac{5\pi}{4} \right\} = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$, $B = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right\}$, 所以 $A \cap B = \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}$.

故选 C.]

2. A [$\because A = \{1, 2\}$, $B = \{x^2 - y^2 \mid x, y \in A\}$,
 $\therefore B = \{-3, 0, 3\}$, $\therefore 1 \notin B, 0 \in B, 3 \in B, -3 \in B$, A 错误.

故选 A.]

3. D [根据题意, A 是 $\{1, 2, 3\}$ 的真子集, 且 A 中至少有一个奇数,

则这样的集合 A 有 $\{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}$, 共 5 个,

故选 D.]

4. D [阴影部分表示的集合为 $(\complement_U A) \cap B = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\} \cap \{x \mid -2 \leq x \leq 3\} = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$.]

5. D [由题可得 $B = \{-1, 0, 1\}$, 所以 $A \cap B = \{0, 1\}$, 故选 D.]

6. C [由题意, 集合 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \mid m+1 \leq x \leq 2m-1\}$, 且 $B \subseteq A$,

当 $B = \emptyset$ 时, 则 $m+1 > 2m-1$,

解得 $m < 2$;

当 $B \neq \emptyset$ 时, 则 $\begin{cases} m+1 \leq 2m-1, \\ m+1 \geq -2, \\ 2m-1 \leq 5, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m+1 \leq 2m-1, \\ m+1 > -2, \\ 2m-1 \leq 5, \end{cases}$

解得 $2 \leq m \leq 3$.

综上所述, m 的取值范围是 $\{m \mid m \leq 3\}$.

故选 C.]

7. CD [10 以内的质数组成的集合是 $\{2, 3, 5, 7\}$, 故 A 正确;

2, 3 组成的集合可表示为 $\{2, 3\}$ 或 $\{3, 2\}$, 故 B 正确;

$x^2 - 4x + 4 = 0$ 的所有解组成的集合是 $\{2\}$, 故 C 错误;

$\emptyset$: 不含有任何元素的集合, $\{\emptyset\}$: 仅含有一个元素 $\emptyset$ 的集合, 故 D 错误.

故选 CD.]

8. BC [对于 A, 若 $-1 \in M$, 则 $\frac{-1}{-1} = 1 \in M$, 则 $1 + (-1) = 0 \in M$, 显然 $0 \notin M$, A 错误;

对于 B, M 是非空集合, 若 $x \in M$, 则 $\frac{x}{x} = 1 \in M$, $1 + 1 = 2 \in M$, $1 + 2 = 3 \in M$, 所以 $2025 \in M$, B 正确;

对于 C, 因为 $1 \in M, y \in M$, 所以 $\frac{1}{y} \in M$, 所以 $\frac{x}{\frac{1}{y}} = xy \in M$, C 正确;

对于 D, 若 $x = 1, y = 2$, 则 $x - y = -1 \notin M$, D 错误. 故选 BC.]

正确;

对于 D, 若 $x = 1, y = 2$, 则 $x - y = -1 \notin M$, D 错误. 故选 BC.]

9. BCD [由 $M = \{x \mid x \geq 2\}$, $N = \{x \mid y = \ln(2x - 6)\} = \{x \mid x > 3\}$,

$M \cap N = \{x \mid x > 3\} = N$, A 错误,

$M \cup N = \{x \mid x \geq 2\} = M$, B 正确,

$\complement_{\mathbf{R}} M = \{x \mid x < 2\}$, $\complement_{\mathbf{R}} N = \{x \mid x \leq 3\}$,

$(\complement_{\mathbf{R}} N) \cap M = \{x \mid x \leq 3\} \cap \{x \mid x \geq 2\} = \{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$, C

正确,

$(\complement_{\mathbf{R}} M) \cap N = \{x \mid x < 2\} \cap \{x \mid x > 3\} = \emptyset$, D 正确.

故选 BCD.]

10. $\{x \mid -2 \leq x \leq -1, \text{ 或 } 0 \leq x \leq 2\}$ [$\because$ 全集 $U = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$, 集合 $A = \{x \mid -1 < x < 0, \text{ 或 } 2 < x \leq 3\}$,

$\therefore \complement_U A = \{x \mid -2 \leq x \leq -1, \text{ 或 } 0 \leq x \leq 2\}$.]

11. 4 [根据题意, $A \cap B$ 中的元素是直线 $x + y = 8$ 上满足 $x, y \in \mathbf{N}^*$ 且 $y \geq x$ 的点, 即点 $(1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4)$, 共 4 个.]

12. 18 [当 $x = 0$ 时, $y = 2, 3$, 对应的 $z = 0$;

当 $x = 1$ 时, $y = 2, 3$, 对应的 $z = 6, 12$,

即集合 $A \odot B = \{0, 6, 12\}$,

故集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为 18.]

课时作业(二)

1. C [命题“ $\forall x > 0, e^x + 1 \leq 3x$ ”为全称量词命题,

根据全称量词命题的否定可得原命题的否定为 $\exists x > 0, e^x + 1 > 3x$.

故选 C.]

2. A [$x > 0 \Rightarrow x^2 + 3x > 0, x^2 + 3x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ 或 $x < -3 \nRightarrow x > 0$. 故“ $x > 0$ ”是“ $x^2 + 3x > 0$ ”的充分不必要条件.]

3. D [$x = \sqrt{2}$ 是无理数, $x^2 = 2$ 是有理数, A 错误;

当 $x = -2, y = -1$ 时, $xy > 0$, 但 $x + y = -3 < 0$, 不是充要条件, B 错误;

命题“ $\exists x \in \mathbf{R}$, 使得 $x^2 + 1 > 0$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 \leq 0$ ”, C 错误;

“ $1 < x < 3$ ”的必要不充分条件是“ $m - 2 < x < m + 2$ ”, 则

$\begin{cases} m - 2 \leq 1, \\ m + 2 \geq 3, \end{cases}$ 两个不等式的等号不同时取到, 解得 $1 \leq m \leq 3$, D

正确.]

4. C [因为命题“ $\forall x \in [0, 2], x^2 - m \geq 0$ ”是假命题,

则 $\exists x \in [0, 2], x^2 - m < 0$ ”是真命题,

即 $\exists x \in [0, 2], m > x^2$,

又 $0 \leq x^2 \leq 4$,

则当 $x \in [0, 2]$ 时, $m > (x^2)_{\min} = 0$.

故选 C.]

5. C [对于命题 $q, x^3 = x$,

解得 $x = 0, x = -1$ 或 $x = 1 > 0$,

所以 $q: \exists x > 0, x^3 = x$, 为真命题, $\neg q$ 为假命题;

对于命题 p , 当 $x = 0$ 时, $|x| = 0$,

所以 $p: \forall x \in \mathbf{R}, |x| > 0$ 为假命题, $\neg p$ 为真命题;

所以 $\neg p$ 和 q 都是真命题.

故选 C.]

6. B [由 $x^2 - x - 6 > 0$, 得 $x > 3$ 或 $x < -2$, $p: x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$,

由 $4x + m < 0$, 得 $x < -\frac{m}{4}$, $q: x \in \left(-\infty, -\frac{m}{4}\right)$,

若 p 是 q 的必要不充分条件, 则 $q \not\subseteq p$,

$$\text{即 } -\frac{m}{4} \leq -2,$$

解得 $m \geq 8$,

故实数 m 的取值范围为 $[8, +\infty)$.

故选 B.]

7. BC [命题 p 为存在量词命题, 由 $6x^2 - 7x + 2 \leq 0$, 得 $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$, 所以 p 为假命题. $\neg p: \forall x \in \mathbf{N}, 6x^2 - 7x + 2 > 0$.

故选 BC.]

8. BC $[(x-2)(x+2) > 0]$, 即 $x < -2$ 或 $x > 2$, 所以 $x > 2$ 或 $x < -2$ 是 $(x-2)(x+2) > 0$ 的充要条件, 故 A 错误; $x < -3$ 或 $x > 3$ 和 $x \geq 3$ 是 $(x-2)(x+2) > 0$ 的充分不必要条件, 故 BC 正确; $x \geq 0$ 是 $(x-2)(x+2) > 0$ 的既不充分也不必要条件, 故 D 错误.

故选 BC.]

9. ABD [由于原命题和其否定的真假完全相反, 所以题干中“下列命题的否定是假命题”等价于“下列命题是真命题”. 对于 A, 当 $m=0$ 时, $\sqrt{0+1}=1 \in \mathbf{N}$, 则 A 中命题为真命题, 故 A 符合题意; 选项 B 显然符合题意; 对于 C, 因为 $\Delta = a^2 + 4 > 0$ 恒成立, 所以不存在 $a \in \mathbf{R}$, 使得一元二次方程 $x^2 - ax - 1 = 0$ 没有实数根, 故 C 不符合题意; 选项 D 显然符合题意. 故选 ABD.]

10. $x = \frac{\pi}{2}$ (答案不唯一) [当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x = 1$, 由 $\sin x = 1$ 可得 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 故“ $\sin x = 1$ ”的一个充分不必要条件是“ $x = \frac{\pi}{2}$ ”.]

11. $(3, +\infty)$ [因为“若 $x > 1$, 则 $2x + 1 > \lambda$ ”是假命题, 所以“ $\exists x > 1, 2x + 1 \leq \lambda$ ”是真命题. 因为当 $x > 1$ 时, $2x + 1 > 3$, 所以实数 λ 的取值范围是 $(3, +\infty)$.]

课时作业(三)

1. A [因为 $M - N = 2a(a-2) - (a+1)(a-3) = a^2 - 2a + 3 = (a-1)^2 + 2 > 0$, 所以 $M > N$. 故选 A.]

2. C [$\because x > y > z, \therefore 3x > x + y + z = 0, 3z < x + y + z = 0$, $\therefore x > 0, z < 0$.

由 $\begin{cases} x > 0, \\ y > z, \end{cases}$ 得 $xy > xz$, 故选 C.]

3. D [因为 $a > b > 0, c > d$,

当 $c=0, d=-1$ 时, A 选项显然错误;

当 $c=-1, d=-2, a=2, b=1$ 时, $ac=-2=bd=-2$, B 选项错误;

当 $c=0$ 时, $ac^2=0=bc^2$, C 选项错误;

因为 $d^2+1 > 0$, 又因为 $a > b > 0$, 所以 $\frac{a}{d^2+1} > \frac{b}{d^2+1}$, D 选项正确.

故选 D.]

4. C [对于 A, $\because 15 < b < 18, \therefore \frac{1}{18} < \frac{1}{b} < \frac{1}{15}$, 又 $6 < a < 60$,

$\therefore \frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 4$, $\therefore$ A 错误; 对于 B, $\because 6 < a < 60, 15 < b < 18$,

$\therefore 36 < a + 2b < 96, \therefore$ B 错误; 对于 C, $\because 15 < b < 18$,

$\therefore -18 < -b < -15$, 又 $6 < a < 60, \therefore -12 < a - b < 45, \therefore$ C 正确; 对于 D, $\because 6 < a < 60, 15 < b < 18, \therefore 21 < a + b < 78$, 由 A

选项知 $\frac{1}{18} < \frac{1}{b} < \frac{1}{15}, \therefore \frac{7}{6} < \frac{a+b}{b} < \frac{26}{5}, \therefore$ D 错误.

故选 C.]

5. C [因为 $3a + b = 2(a+b) + (a-b)$,

又 $-3 \leq a + b \leq -2, 1 \leq a - b \leq 4$,

所以 $-6 \leq 2(a+b) \leq -4$,

即 $-5 \leq 2(a+b) + a - b \leq 0$,

所以 $3a + b$ 的取值范围是 $[-5, 0]$.

故选 C.]

6. B [因为 $a + 2b + 4c = 0, a < b < c$, 所以 $a < 0, c > 0$, 由 $a +$

$2b + 4c = 0$ 得 $c = -\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b$, 则 $-\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b > 0$, 解得

$\frac{b}{a} > -\frac{1}{2}$, 由 $b < c$ 得 $b < -\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b$, 整理得 $\frac{1}{4}a < -\frac{3}{2}b$, 解

得 $\frac{b}{a} > -\frac{1}{6}$, 由 $a < b$ 得 $\frac{b}{a} < 1$, 综上, $-\frac{1}{6} < \frac{b}{a} < 1$. 故

选 B.]

7. ACD [$\begin{cases} c < d \Rightarrow -c > -d, \\ a > b \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d$, A 正确;

$\begin{cases} c < d < 0 \Rightarrow -c > -d > 0 \\ a > b > 0 \end{cases} \Rightarrow -ac > -bd$, 即 $ac < bd$, B 错误;

$a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$, C 正确;

$a > b > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{c}{a} < \frac{c}{b}$, D 正确.

$c > 0$

故选 ACD.]

8. ABD [对于 A, $\because a > b, \therefore a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} > 0, \frac{a+b}{2} - b =$

$\frac{a-b}{2} > 0, \therefore a > \frac{a+b}{2} > b$, 故 A 正确;

对于 B, $\because a > b > 0$,

$\therefore \frac{a}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} > 1, \frac{\sqrt{ab}}{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} > 1, \therefore a > \sqrt{ab} > b$, 故 B 正确;

对于 C, 令 $a=2, b=3$, 满足 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 但不满足 $a > 0, b < 0$, 故

C 不正确; 对于 D, $\because a > b > 0, c > 0, \therefore \frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} =$

$\frac{a(b+c) - b(a+c)}{b(b+c)} = \frac{c(a-b)}{b(b+c)} > 0$, 即 $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$, 故 D 正确.

故选 ABD.]

9. ACD [实数 x, y 满足 $1 < x < 6, 2 < y < 3$,

由不等式的同向可加性和同向同正可乘性, 有 $3 < x + y < 9$, $2 < xy < 18$, A, C 选项正确;

由 $-3 < -y < -2$, 得 $-2 < x - y < 4$, B 选项错误;

由 $\frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2}$, 得 $\frac{1}{3} < \frac{x}{y} < 3$, D 选项正确. 故选 ACD.]

10. $ab < ab^2 < a$ [因为 $a > 0, -1 < b < 0$,

所以 $ab < 0, 0 < b^2 < 1, 0 < ab^2 < a$,

故 $ab < ab^2 < a$.]

11. $a = -1, b = 2$ (答案不唯一) [容易发现, 若将①式转化为②式,

需使 $(a+b)ab < 0$, 即 $a+b$ 与 ab 异号,

显然应使 $a+b > 0, ab < 0$,

当 $a < 0, b > 0$ 时, 要使 $a + b > 0$,

则 $|a| < |b|$, 可取 $a = -1, b = 2$;

当 $a > 0, b < 0$ 时, 要使 $a + b > 0$,

则 $|a| > |b|$, 可取 $a = 2, b = -1$.

综上, 易知取任意两个异号的实数, 且正数的绝对值大于负数的绝对值皆为合理答案.]

12. $(-\pi, \frac{\pi}{6})$ [设 $2\alpha - \beta = x(\alpha + \beta) + y(\alpha - \beta) = (x + y)\alpha + (x - y)\beta, x, y \in \mathbf{R}$,

$$\text{则 } \begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = -1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = \frac{3}{2}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } 2\alpha - \beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{3}{2}(\alpha - \beta),$$

$$\text{因为 } \pi < \alpha + \beta < \frac{4\pi}{3}, -\pi < \alpha - \beta < -\frac{\pi}{3},$$

$$\text{所以 } \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}(\alpha + \beta) < \frac{2\pi}{3}, -\frac{3\pi}{2} < \frac{3}{2}(\alpha - \beta) < -\frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } -\pi < 2\alpha - \beta < \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{则 } 2\alpha - \beta \text{ 的取值范围为 } (-\pi, \frac{\pi}{6}).]$$

课时作业(四)

1. B [因为 $m, n \in (0, +\infty)$, 且 $m + 2n = 1$, 所以 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = (\frac{1}{m} + \frac{2}{n})(m + 2n) = 5 + \frac{2n}{m} + \frac{2m}{n} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{2n}{m} \cdot \frac{2m}{n}} = 9$, 当且仅当 $\frac{2n}{m} = \frac{2m}{n}$, 即 $m = n = \frac{1}{3}$ 时取等号, 所以 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为 9. 故选 B.]

2. D [对 A, 当且仅当 $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 即 $x = 1$ 时等号成立;

对 B, 当且仅当 $|x| = \frac{2}{|x|}$, 即 $x = \pm\sqrt{2}$ 时等号成立;

对 C, 当且仅当 $-\frac{4}{x} = -\frac{x}{16}$, 即 $x = -8$ 时等号成立;

对 D, 当且仅当 $\sqrt{x^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$,

即 $x^2 = -2$, 无解, 等号不成立.]

3. B [对于选项 A, 当 $x < 0$ 时, 选项 A 显然错误;

对于选项 B, 因为 $2^x + 2^{-x} = 2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot \frac{1}{2^x}} = 2$,

当且仅当 $2^x = \frac{1}{2^x}$, 即 $x = 0$ 时取等号, B 正确;

对于选项 C, 易知 $x^2 > 0$, 则 $x^2 + \frac{4}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{4}{x^2}} = 4$,

当且仅当 $x^2 = \frac{4}{x^2}$, 即 $x = \pm\sqrt{2}$ 时取等号, C 错误;

对于选项 D, 易知 $\sqrt{x^2 + 2} \geq \sqrt{2}$,

$$\text{又 } \sqrt{x^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$\geq 2\sqrt{\sqrt{x^2 + 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}} = 2,$$

当且仅当 $\sqrt{x^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$ 时取等号, 显然等号不成立,

所以 $\sqrt{x^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} > 2$, D 错误.

故选 B.]

4. B [∵ $a > 0, b > 0, a^2 - 2ab + 4 = 0$,

$$\text{则 } b = \frac{a}{2} + \frac{2}{a}, \therefore b - \frac{a}{4} = \frac{a}{2} + \frac{2}{a} - \frac{a}{4} = \frac{a}{4} + \frac{2}{a} \geq$$

$$2\sqrt{\frac{a}{4} \cdot \frac{2}{a}} = \sqrt{2},$$

$$\text{当且仅当 } \frac{a}{4} = \frac{2}{a}, \text{ 即 } a = 2\sqrt{2} \text{ 时, 等号成立, 此时 } b = \frac{3\sqrt{2}}{2}.]$$

5. C [因为正数 x, y 满足 $xy = 1$,

$$\text{由 } \frac{x^2 + y^2 + 6}{x + y} = \frac{(x + y)^2 + 4}{x + y} = (x + y) + \frac{4}{x + y}$$

$$\geq 2\sqrt{(x + y) \times \frac{4}{x + y}} = 4,$$

当且仅当 $x = y = 1$ 时取等号, 此时 $\frac{x^2 + y^2 + 6}{x + y}$ 取得最小值 4.

故选 C.]

6. D [因为正实数 a, b 满足 $a + b = 1$,

$$\text{所以 } \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} + \frac{b}{a} = \frac{a + b}{b} + \frac{a + b}{ab} + \frac{b}{a}$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + 1$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a + b}{b} + \frac{a + b}{a} + 1$$

$$= 3 + \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} \geq 3 + 2\sqrt{\frac{2a}{b} \cdot \frac{2b}{a}} = 7, \text{ 当且仅当 } \frac{2a}{b} = \frac{2b}{a}, \text{ 即}$$

$$a = b = \frac{1}{2} \text{ 时取等号.}$$

故选 D.]

7. BD [A 选项, 由选项可知 a 与 b 同号, 当 $a > 0$ 且 $b > 0$ 时,

由基本不等式可知 $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 恒成立, 当 $a < 0$ 且 $b < 0$ 时,

$$\frac{a + b}{2} < 0, \sqrt{ab} > 0, \text{ 该不等式不成立, 故 A 选项错误;}$$

B 选项, 当 $a + b > 0$ 时, $\frac{a + b}{2} > 0$,

$$\text{则 } \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - 2a^2 - 2b^2}{4} =$$

$$\frac{-(a - b)^2}{4} \leq 0 \text{ 恒成立, 即 } \frac{a + b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \text{ 恒成立, 当 } a +$$

$b \leq 0$ 时, 原不等式恒成立, 故 B 选项正确;

C 选项, 当 $a + b > 0$ 时, $2ab - \frac{(a + b)^2}{2} = \frac{-(a - b)^2}{2} \leq 0$, 即

$$2ab \leq \frac{(a + b)^2}{2}, \frac{2ab}{a + b} \leq \frac{a + b}{2} \text{ 恒成立, 当 } a + b < 0 \text{ 时, } 2ab -$$

$$\frac{(a + b)^2}{2} = \frac{-(a - b)^2}{2} \leq 0, \text{ 即 } 2ab \leq \frac{(a + b)^2}{2}, \frac{2ab}{a + b} \geq \frac{a + b}{2}, \text{ 故}$$

C 选项错误;

D 选项, 当 $a, b \in \mathbf{R}$ 时, $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ 恒成立, 故 D 选项正确.]

8. ABD [对于 A, $\frac{y}{x} + \frac{3}{y} = \frac{y}{x} + \frac{x + 2y}{y} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 2 \geq$

$$2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} + 2 = 4, \text{ 当且仅当 } x = y = 1 \text{ 时取等号, 故 A 正}$$

确;对于 B, $xy = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2y \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{x+2y}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{9}{4} = \frac{9}{8}$, 当且仅当 $x=2y$, 即 $x=\frac{3}{2}, y=\frac{3}{4}$ 时取等号, 故 B 正确;

对于 C, $(\sqrt{x} + \sqrt{2y})^2 = x + 2y + 2\sqrt{2xy} \leq 3 + 2\sqrt{2 \times \frac{9}{8}} = 3 + 3 = 6$, 则 $\sqrt{x} + \sqrt{2y} \leq \sqrt{6}$, 当且仅当 $x=2y$, 即 $x=\frac{3}{2}, y=\frac{3}{4}$ 时取等号, 故 C 错误; 对于 D, $x^2 + 4y^2 = (x+2y)^2 - 4xy \geq 9 - 4 \times \frac{9}{8} = \frac{9}{2}$, 当且仅当 $x=\frac{3}{2}, y=\frac{3}{4}$ 时取等号, 故 D 正确. 故选 ABD.]

9. ABD [已知 $x>0, y>0, \therefore 2x+y=xy$,

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1.$$

$$\therefore \frac{2}{x} + \frac{2}{y} > \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1, \text{故 A 正确;}$$

$$x+2y+xy=3x+3y=(3x+3y) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right) = 9 + \frac{3y}{x} + \frac{6x}{y} \geq 9 + 2\sqrt{\frac{3y}{x} \cdot \frac{6x}{y}} = 9 + 6\sqrt{2},$$

当且仅当 $\sqrt{2}x=y$, 即 $x=\sqrt{2}+1, y=2+\sqrt{2}$ 时等号成立, 故 B 正确;

$$2x+y=xy \geq 2\sqrt{2xy}, \text{解得 } xy \geq 8,$$

当且仅当 $y=2x$, 即 $x=2, y=4$ 时等号成立, 故 C 错误;

$$\text{由 } 2x+y=xy, \text{得 } (x-1)(y-2)=2,$$

由题意知, $x-1>0, y-2>0$,

$$\text{则 } \frac{1}{x-1} + \frac{2}{y-2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x-1} \cdot \frac{2}{y-2}} = 2,$$

当且仅当 $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{y-2}$, 即 $x=2, y=4$ 时等号成立, 故 D 正确.]

10. $\frac{1}{16}$ [$y = \frac{1}{2}x(1-2x) = \frac{1}{4} \cdot 2x(1-2x) \leq \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{2x+(1-2x)}{2}\right]^2 = \frac{1}{16}$, 当且仅当 $2x=1-2x$, 即 $x=\frac{1}{4}$ 时等号成立.]

11. 4 [由已知, $b + \frac{1}{a} = \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) = 2 + ab + \frac{1}{ab} \geq 2 + 2\sqrt{ab \cdot \frac{1}{ab}} = 4$, 当且仅当 $ab = \frac{1}{ab}$, 即 $a = \frac{1}{2}, b = 2$ 时取等号,

所以 $b + \frac{1}{a}$ 的最小值为 4.]

12. $\frac{4}{5}$ [法一: $\because 5x^2y^2 + y^4 = 1$,

$$\therefore y \neq 0 \text{ 且 } x^2 = \frac{1-y^4}{5y^2} > 0, \therefore 0 < y^2 < 1,$$

$$\therefore x^2 + y^2 = \frac{1-y^4}{5y^2} + y^2 = \frac{1}{5y^2} + \frac{4y^2}{5} \geq 2\sqrt{\frac{1}{5y^2} \cdot \frac{4y^2}{5}} = \frac{4}{5},$$

当且仅当 $\frac{1}{5y^2} = \frac{4y^2}{5}$, 即 $x^2 = \frac{3}{10}, y^2 = \frac{1}{2}$ 时取等号, $\therefore x^2 + y^2$

的最小值为 $\frac{4}{5}$.

法二: 由 $5x^2y^2 + y^4 = 1$, 可得 $y^2(5x^2 + y^2) = 1$, 即 $4y^2(5x^2 + y^2) = 4$,

$$\text{又 } 4 = 4y^2(5x^2 + y^2) \leq \left[\frac{4y^2 + (5x^2 + y^2)}{2}\right]^2 = \frac{25}{4}(x^2 + y^2)^2,$$

$$\therefore (x^2 + y^2)^2 \geq \frac{16}{25}, \text{即 } x^2 + y^2 \geq \frac{4}{5},$$

当且仅当 $5x^2 + y^2 = 4y^2 = 2$, 即 $x^2 = \frac{3}{10}, y^2 = \frac{1}{2}$ 时取等号, $\therefore x^2 + y^2$ 的最小值是 $\frac{4}{5}$.]

课时作业(五)

1. C [因为 $|MF_1| + |MF_2| = 6, |MF_1| > 0, |MF_2| > 0$,

$$\text{所以 } |MF_1| \cdot |MF_2| \leq \frac{(|MF_1| + |MF_2|)^2}{4} = \frac{6^2}{4} = 9,$$

当且仅当 $|MF_1| = |MF_2| = 3$ 时, 等号成立,

所以 $|MF_1| \cdot |MF_2|$ 的最大值为 9. 故选 C.]

2. A [由 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 2$, 可得 $\frac{1}{2x} + \frac{2}{y} = 1$,

又因为 $x, y > 0$,

$$\text{则 } x + y = (x + y) \cdot \left(\frac{1}{2x} + \frac{2}{y}\right) = \frac{1}{2} + 2 + \frac{y}{2x} + \frac{2x}{y} \geq \frac{5}{2} +$$

$$2\sqrt{\frac{y}{2x} \cdot \frac{2x}{y}} = \frac{9}{2},$$

当且仅当 $\frac{y}{2x} = \frac{2x}{y}$, 即 $y = 2x = 3$ 时取等号,

$$\text{所以 } (x + y)_{\min} = \frac{9}{2},$$

由 $x + y \geq m$ 恒成立, 可得 $m \leq (x + y)_{\min} = \frac{9}{2}$,

即实数 m 的取值范围为 $\left(-\infty, \frac{9}{2}\right]$.]

3. C [设天平的左臂长为 a cm, 右臂长为 b cm, 放在左盘中的黄金为 x g, 放在右盘中的黄金为 y g,

则由天平的平衡条件可得

$$\begin{cases} 5a = by, \\ (5+x)a = (y+5)b, \end{cases} \text{解得 } x = \frac{5b}{a}, y = \frac{5a}{b}.$$

所以 $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 10$. 当且仅当 $x = y$, 即 $a = b$ 时, 取等号,

而天平的两臂不等长, 即 $a \neq b$, 则上述不等式等号无法取得,

因此 $x + y > 2\sqrt{xy} = 10$, 即顾客购得的黄金大于 10 g, 故 C 正确.]

4. ABC [由 $x > 0, y > 0$, 得 $xy > 0$,

$$\frac{mxy}{m-1} \leq x + 2y \text{ 恒成立,}$$

$$\text{即 } \frac{m}{m-1} \leq \frac{x+2y}{xy} = \frac{2}{x} + \frac{1}{y} \text{ 恒成立,}$$

$$\text{又 } \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right)(2x + y) = 5 + \frac{2y}{x} + \frac{2x}{y} \geq 5 +$$

$$2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{2x}{y}} = 9,$$

当且仅当 $x = y = \frac{1}{3}$ 时, 等号成立,

$$\text{故 } \frac{m}{m-1} \leq 9, \text{即 } \frac{m}{m-1} - 9 = \frac{-8m+9}{m-1} \leq 0,$$

$$\text{即 } \begin{cases} (m-1)(-8m+9) \leq 0, \\ m-1 \neq 0, \end{cases}$$

解得 $m < 1$ 或 $m \geq \frac{9}{8}$.]

5. AC [对于 A, $x > 0$, $x^2 + \frac{2}{x} = x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq$

$3\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = 3$, 当且仅当 $x^2 = \frac{1}{x}$, 即 $x = 1$ 时, 等号成立, 故 A 正确; 对于 B, 因为 $0 < x < 1$, 所以 $1 - x > 0$, $x^2(1 - x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot (2 - 2x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x + x + 2 - 2x}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}$, 当且仅当 $x = 2 - 2x$, 即 $x = \frac{2}{3}$ 时, 等号成立, 故 B 错误; 对于 C, 因为 $x > 0$, 所以 $2x + \frac{1}{x^2} = x + x + \frac{1}{x^2} \geq 3\sqrt{x \cdot x \cdot \frac{1}{x^2}} = 3$, 当且仅当 $x = 1$ 时等号成立, 故 C 正确; 对于 D, 因为 $0 < x < 1$, 所以 $1 - x > 0$, $x(1 - x)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (1 - x) \cdot (1 - x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2x + 1 - x + 1 - x}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}$, 当且仅当 $2x = 1 - x$, 即 $x = \frac{1}{3}$ 时等号成立, 故 D 错误. 故选 AC.]

6. 1 [∵ 正实数 x, y 满足 $x + y = 2$,

$$\therefore xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{2^2}{4} = 1, \therefore \frac{1}{xy} \geq 1,$$

又 $\frac{1}{xy} \geq M$ 恒成立, $\therefore M \leq 1$, 即 M 的最大值为 1.]

7. 60° [由题可知 $a + b = 8, c = 4, p = 6$,

$$\begin{aligned} \text{则 } S &= \sqrt{6(6-a)(6-b)(6-c)} = \sqrt{12(6-a)(6-b)} \\ &\leq \sqrt{12} \times \frac{6-a+6-b}{2} = 4\sqrt{3}, \text{ 当且仅当 } a=b=4 \text{ 时取等号,} \\ \text{所以此时三角形为等边三角形, 故 } A &= 60^\circ. \end{aligned}$$

8. 解: 设纸张的面积为 S , 画面的高为 x cm ($x > 0$), 则宽为 $\frac{4\,840}{x}$ cm,

$$\text{根据题意得 } S = (x+10) \left(\frac{4\,840}{x} + 16 \right) = 5\,000 + 16x + \frac{48\,400}{x} \geq$$

$$5\,000 + 2\sqrt{16x \cdot \frac{48\,400}{x}} = 6\,760,$$

当且仅当 $16x = \frac{48\,400}{x}$, 即 $x = 55$ 时等号成立, 所以当画面的

高为 55 cm, 宽为 $\frac{4\,840}{55} = 88$ cm 时, 宣传画所用纸张的面积最

小, 此时 $a = \frac{55}{88} = \frac{5}{8}$.

9. 解: (1) 设平均每个人形机器人的成本为 y 万元, 根据题意有

$$y = \frac{1\,000 + 10x + \frac{x^2}{10}}{x} = \frac{1\,000}{x} + \frac{x}{10} + 10$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{1\,000}{x} \cdot \frac{x}{10}} + 10 = 30,$$

当且仅当 $\frac{1\,000}{x} = \frac{x}{10}$, 即 $x = 100$ 时取等号.

所以该企业每月的产量为 100 个时, 平均每个人形机器人的成本最低, 最低为 30 万元.

(2) 设月利润为 W 万元, 则有 $W = x \left(23 + \frac{x}{5} \right) - 1\,000 -$

$$10x - \frac{x^2}{10} = \frac{x^2}{10} + 13x - 1\,000, \text{ 由题知 } \frac{x^2}{10} + 13x - 1\,000 \geq 400,$$

整理得 $x^2 + 130x - 14\,000 \geq 0$, 解得 $x \geq 70$.

所以该企业每月生产不少于 70 个人形机器人, 才能确保每月的利润不低于 400 万元.

课时作业(六)

1. A [不等式 $\left(\frac{1}{2} - x\right) \left(x - \frac{1}{3}\right) > 0$ 可化为

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{3}\right) < 0, \text{ 解得 } \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\right\}$.

故选 A.]

2. C [由 $\frac{x-4}{x-1} \geq 2$, 得 $\frac{x-4-2x+2}{x-1} \geq 0$, 得 $\frac{x+2}{x-1} \leq 0$, 得

$$\begin{cases} (x-1)(x+2) \leq 0, \\ x \neq 1, \end{cases} \text{ 得 } -2 \leq x < 1, \text{ 故选 C.}]$$

3. D [由不等式 $\frac{4x+1}{x+2} \leq 0$, 可得 $(4x+1)(x+2) \leq 0$ 且 $x+2 \neq$

$$0, \text{ 解得 } -2 < x \leq -\frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } A = \left\{x \mid -2 < x \leq -\frac{1}{4}\right\}.$$

对于不等式 $|x| \geq 2x+1$,

当 $x \geq 0$ 时, 不等式化为 $x \geq 2x+1$,

解得 $x \leq -1$ (舍去),

当 $x < 0$ 时, 不等式化为 $-x \geq 2x+1$,

$$\text{解得 } x \leq -\frac{1}{3},$$

综上所述, 不等式 $|x| \geq 2x+1$ 的解集为 $\left\{x \mid x \leq -\frac{1}{3}\right\}$, 所

$$\text{以 } B = \left\{x \mid x \leq -\frac{1}{3}\right\}.$$

$$\text{所以 } A \cap B = \left\{x \mid -2 < x \leq -\frac{1}{3}\right\}.$$

故选 D.]

4. D [一元二次不等式 $x^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x \mid x \neq -1\}$,

则方程 $x^2 + bx + c = 0$ 有两个相等的根 $x = -1$.

由于方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的根 $x_1 = x_2 = -1$,

那么两根之和 $-1 + (-1) = -\frac{b}{1}$, 两根之积 $(-1) \times (-1) =$

$$\frac{c}{1}, \text{ 解得 } b = 2, c = 1.$$

可得 $bc = 2 \times 1 = 2$.

故选 D.]

5. CD [对于 A, $4x^2 - 5x + 1 > 0$, 即 $(x-1) \cdot (4x-1) > 0$, 解得

$$x < \frac{1}{4} \text{ 或 } x > 1, \text{ 故 A 错误;}$$

$$\text{对于 B, } 2x^2 - x - 6 \leq 0, \text{ 即 } (x-2)(2x+3) \leq 0, \text{ 解得 } -\frac{3}{2} \leq$$

$x \leq 2$, 故 B 错误;

对于 C, 若不等式 $ax^2 + 8ax + 21 < 0$ 恒成立,

当 $a = 0$ 时, $21 < 0$ 是不可能成立的, 所以只能

$$\begin{cases} a < 0, \\ \Delta = 64a^2 - 84a < 0, \end{cases} \text{ 而该不等式组无解, 故 C 正确;}$$

对于 D, 由题意得 $q, 1$ 是一元二次方程 $2x^2 + px - 3 = 0$ 的两根,

$$\text{从而 } \begin{cases} q \times 1 = -\frac{3}{2}, \\ 2 + p - 3 = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} p=1, \\ q=-\frac{3}{2}, \end{cases}$$

而当 $p=1$ 时,一元二次不等式化为 $2x^2+x-3<0$,即 $(x-1)(2x+3)<0$,解得 $-\frac{3}{2}<x<1$,满足题意,

所以 $p+q$ 的值为 $-\frac{1}{2}$,故 D 正确.]

6. ABD [由题意可知 1,3 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根,

$$\text{且 } a<0, \text{由根与系数的关系得} \begin{cases} -\frac{b}{a}=4, \\ \frac{c}{a}=3, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} b=-4a, \\ c=3a. \end{cases}$$

对于 A,由以上可知 $a<0$,故 A 正确;

对于 B, $a+b+c=a-4a+3a=0$,故 B 正确;

对于 C, $4a+2b+c=4a-8a+3a=-a>0$,故 C 错误;

对于 D,不等式可变为 $3ax^2+4ax+a<0$,且 $a<0$,即 $3x^2+4x+1>0$,解集为 $\{x|x<-1, \text{或 } x>-\frac{1}{3}\}$,故 D 正确.

故选 ABD.]

7. $\left[2, \frac{11}{4}\right)$ [当 $a-2=0$,即 $a=2$ 时,不等式为 $3>0$ 恒成立,故 $a=2$ 符合题意;当 $a-2\neq 0$,即 $a\neq 2$ 时,不等式 $(a-2)x^2+4(a-2)x+3>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,

$$\text{则} \begin{cases} a-2>0, \\ \Delta=[4(a-2)]^2-4(a-2)\times 3<0, \end{cases} \text{解得 } 2<a<\frac{11}{4}. \text{ 综上,}$$

实数 a 的取值范围是 $\left[2, \frac{11}{4}\right)$.]

8. $\frac{5}{2}$ [由题知 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2-2ax-8a^2=0(a>0)$ 的两个实数根,

$$\text{所以 } \Delta=4a^2+32a^2=36a^2>0, \text{ 且 } x_1+x_2=2a, x_1x_2=-8a^2.$$

又因为 $x_2-x_1=15$,

$$\text{所以 } 15^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4a^2+32a^2=36a^2.$$

又 $a>0$,解得 $a=\frac{5}{2}$.]

9. 解:(1)若选①②,由 $a=-1$ 知函数图象开口向下,此时 $y<0$ 的解集不可能为 $(-1,3)$,故不符合题意;

若选①③,因为 $y<0$ 的解集为 $(-1,3)$,所以 $-1,3$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根,所以函数图象的对称轴为直线 $x=1$,由 $y=a(x+1)(x-3)=ax^2-2ax-3a$,则 $b=-2a, c=-3a$,又因为 y 的最小值为 -4 ,

所以当 $x=1$ 时, $y=-4a=-4$,解得 $a=1$,所以 $b=-2, c=-3$,则 $y=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$;

若选②③,由 $a=-1$ 知函数图象开口向下,则 y 无最小值,不符合题意.

综上,应选①③,且 $y=x^2-2x-3$.

(2)由 $y\geq(m-2)x+2m^2-3(m\in\mathbf{R})$,化简得 $x^2-mx-2m^2\geq 0$,即 $(x+m)(x-2m)\geq 0$,

若 $m<0$,则不等式的解集为 $\{x|x\leq 2m, \text{或 } x\geq -m\}$;

若 $m=0$,则不等式的解集为 $\mathbf{R}$;

若 $m>0$,则不等式的解集为 $\{x|x\leq -m, \text{或 } x\geq 2m\}$.

综上,当 $m<0$ 时,不等式的解集为 $\{x|x\leq 2m, \text{或 } x\geq -m\}$;

当 $m=0$ 时,不等式的解集为 $\mathbf{R}$;

当 $m>0$ 时,不等式的解集为 $\{x|x\leq -m, \text{或 } x\geq 2m\}$.

阶段检测(一)

1. B [因为存在量词命题的否定是全称量词命题,

所以命题“ $\exists x\in\mathbf{R}, 2\ 026e^x+x^3>0$ ”的否定为“ $\forall x\in\mathbf{R}, 2\ 026e^x+x^3\leq 0$ ”.

故选 B.]

2. A [因为集合 $A=\{x|0<x<3\}$,集合 $B=\{1,2,3,4\}$,

根据交集的概念,可得 $A\cap B=\{1,2\}$.

故选 A.]

3. D [令 $a=1, b=-1$,满足 $a>b$,但 $a^2-b^2=0$,故 A 错误;

令 $c=0, ac=bc, ac^2=bc^2$,故 BC 错误;

$a>b$,则 $2a>2b$,故 D 正确.

故选 D.]

4. B [命题“ $\exists x\in[0,2], x^2\geq m$ ”是真命题,

故当 $x\in[0,2]$ 时, $m\leq (x^2)_{\max}=4$.

故选 B.]

5. A [$\because \frac{x-2}{x+1}\geq 0, \therefore \begin{cases} (x-2)(x+1)\geq 0, \\ x+1\neq 0, \end{cases}$

$\therefore x\geq 2$ 或 $x<-1$,

$\therefore |2x-1|\geq 3, \therefore 2x-1\geq 3$ 或 $2x-1\leq -3, \therefore x\geq 2$ 或 $x\leq -1$,

$\therefore \{x|x\geq 2, \text{或 } x<-1\}\subsetneq \{x|x\geq 2, \text{或 } x\leq -1\}$,

$\therefore \frac{x-2}{x+1}\geq 0$ 是“ $|2x-1|\geq 3$ ”的充分不必要条件.

故选 A.]

6. C [因为不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x|x<1, \text{或 } x>3\}$,

所以 $ax^2+bx+c=0$ 的根为 1,3,且 $a>0$,

$$\text{则} \begin{cases} -\frac{b}{a}=1+3=4, \\ \frac{c}{a}=1\times 3=3, \end{cases}$$

即 $b=-4a, c=3a, a>0$,

$$\text{则 } b-\frac{1}{c}=-4a-\frac{1}{3a}=-\left(4a+\frac{1}{3a}\right)\leq -2\sqrt{4a\cdot\frac{1}{3a}}=-\frac{4\sqrt{3}}{3}, \text{ 当且仅当 } 4a=\frac{1}{3a}, \text{ 即 } a=\frac{\sqrt{3}}{6} \text{ 时取等号.}$$

故选 C.]

7. AC [若 $a=0$,则任意实数 x 均满足 $0\cdot x\leq 6$,因此 $A=\mathbf{R}$,故 A 正确,B 错误;

若 $B\subseteq A$,得 $\begin{cases} 2a\leq 6, \\ 3a\leq 6, \end{cases}$ 解得 $a\leq 2$,

即 a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$,所以 a 不可以取 3,

故 C 正确,D 错误.

故选 AC.]

8. ABC [对于 A, $2x+y=1\geq 2\sqrt{2xy}$,则 $xy\leq \frac{1}{8}$,当且仅当

$2x=y=\frac{1}{2}$ 时,等号成立,故 A 正确.

对于 B, $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=\frac{2x+y}{x}+\frac{4(2x+y)}{y}=\frac{8x}{y}+\frac{y}{x}+6\geq$

$2\sqrt{\frac{8x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+6=6+4\sqrt{2}$,当且仅当 $\frac{8x}{y}=\frac{y}{x}$,即 $x=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$,

$y=2-\sqrt{2}$ 时,等号成立,故 B 正确.

对于 C,因为 $\frac{2x+y}{2}\leq \sqrt{\frac{4x^2+y^2}{2}}$,所以 $4x^2+y^2\geq \frac{1}{2}$,当且

仅当 $2x=y=\frac{1}{2}$ 时,等号成立,故 C 正确.

对于 D, $4^x+2^y=2^{2x}+2^y\geq 2\sqrt{2^{2x}\times 2^y}=2\sqrt{2^{2x+y}}=2\sqrt{2}$,

当且仅当 $2x=y=\frac{1}{2}$ 时,等号成立,故 D 错误. 故选 ABC.]

9. $(-12, -7)$ [$\because -2 < a < -1, 2 < b < 3$,

$\therefore -6 < 3a < -3, -6 < -2b < -4$,

$\therefore -12 < 3a - 2b < -7$,

故 $3a - 2b$ 的取值范围为 $(-12, -7)$.]

10. $\left\{a \mid -2 \leq a < \frac{6}{5}\right\}$ [由题意可知,命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, (a^2 - 4)x^2 + (a+2)x - 1 < 0$ ”为真命题.

①当 $a^2 - 4 = 0$ 时,可得 $a = \pm 2$.

若 $a = -2$,则 $-1 < 0$,符合题意;

若 $a = 2$,则 $4x - 1 < 0$,解得 $x < \frac{1}{4}$,不符合题意;

②若 $a^2 - 4 \neq 0$,

则 $\begin{cases} a^2 - 4 < 0, \\ \Delta = (a+2)^2 + 4(a^2 - 4) < 0, \end{cases}$

解得 $-2 < a < \frac{6}{5}$.

综上所述,实数 a 的取值范围是 $\left\{a \mid -2 \leq a < \frac{6}{5}\right\}$.]

11. 解:(1)由 $\frac{3x}{x+1} \leq 2$,可得 $\frac{3x}{x+1} - 2 = \frac{x-2}{x+1} \leq 0$,则 $\begin{cases} (x-2)(x+1) \leq 0, \\ x+1 \neq 0. \end{cases}$ 解得 $-1 < x \leq 2$.故 $A = \{x \mid -1 < x \leq 2\}$.

(2)由 $|x-2| \leq 2$,得 $0 \leq x \leq 4$.又 $x \in \mathbf{Z}$,所以 $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.所以 B 的子集个数为 $2^5 = 32$.

(3)由 $A = \{x \mid -1 < x \leq 2\}$,得 $\complement_{\mathbf{R}} A = \{x \mid x \leq -1, \text{ 或 } x > 2\}$.所以 $B \cap \complement_{\mathbf{R}} A = \{3, 4\}$.

12. 解:(1)由题意,列出函数关系式可得, $y = p\left(3 - \frac{8}{p}\right) - x - 0.5p = 2.5p - x - 8 (1 < x < 10)$.

又因为 $p = \frac{10x}{x+1}$,所以 $y = \frac{25x}{x+1} - x - 8 (1 < x < 10)$,

所以该公司本季度增加的利润 y 与 x 之间的函数关系为 $y = \frac{25x}{x+1} - x - 8 (1 < x < 10)$.

(2) $y = \frac{25x}{x+1} - x - 8 = 18 - \left[\frac{25}{x+1} + (x+1)\right]$,因为 $1 < x < 10$,所以 $2 < x+1 < 11$,

由基本不等式可得,

$\frac{25}{x+1} + (x+1) \geq 2\sqrt{\frac{25}{x+1} \cdot (x+1)} = 10$,

当且仅当 $\frac{25}{x+1} = x+1$,即 $x=4$ 时等号成立,

所以 $y \leq 18 - 10 = 8$,当 $x=4$ 万元时,该公司本季度增加的利润最大,最大为 8 万元.

课时作业(七)

1. D [要使 $f(x)$ 有意义,只需满足

$\begin{cases} 1-3x \geq 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$ 即 $x \leq \frac{1}{3}$ 且 $x \neq 0$.]

2. B [因为 $2f(x) - f(1-x) = x$,①

所以 $2f(1-x) - f(x) = 1-x$,②

由① $\times 2 +$ ②得 $3f(x) = x+1$,

即 $f(x) = \frac{x+1}{3}$. 故选 B.]

3. B [对于 A,因为这两个函数的定义域不同,所以这两个函数不是同一个函数;

对于 B,因为这两个函数的定义域与对应关系均相同,所以这两个函数为同一个函数;

对于 C,因为函数 $h = 130t - 5t^2$ 中, $0 \leq t \leq 26$,而函数 $y = 130x - 5x^2$ 中, $x \in \mathbf{R}$,即这两个函数的定义域不同,所以这两个函数不是同一个函数;

对于 D,因为这两个函数的定义域不同,所以这两个函数不是同一个函数. 故选 B.]

4. C [考查四个选项,横坐标表示时间,纵坐标表示的是距学校的距离,由此知,此函数图象一定是下降的,排除 A;

再由小明骑车上学,开始时匀速行驶可得出图象开始一段是直线下降型,又途中因交通堵塞停留了一段时间,故此时有一段函数图象与 x 轴平行,由此排除 D;之后为了赶时间加快速度行驶,这一时间段内函数图象下降的较快,由此可确定 C 正确, B 不正确. 故选 C.]

5. A [函数 $y = f(x+1)$ 的定义域为 $[-1, 4]$,

则 $-1 \leq x \leq 4$,故 $0 \leq x+1 \leq 5$,

故函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 5]$,

令 $\begin{cases} 0 \leq 2x+1 \leq 5, \\ x-1 > 0, \end{cases}$ 解得 $1 < x \leq 2$,

故函数 $y = \frac{f(2x+1)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域为 $(1, 2]$.

故选 A.]

6. D [依题意, $f(2) = f(1) + f(1) + 1 \times 1 = 3$,

$f(3) = f(2) + f(1) + 1 \times 2 = 3 + 1 + 2 = 6$,

$f(4) = f(2) + f(2) + 2 \times 2 = 3 + 3 + 4 = 10$,

$f(5) = f(2) + f(3) + 2 \times 3 = 3 + 6 + 6 = 15$,

$f(6) = f(2) + f(4) + 2 \times 4 = 3 + 10 + 8 = 21$,

$f(7) = f(2) + f(5) + 2 \times 5 = 3 + 15 + 10 = 28$,

$f(8) = f(2) + f(6) + 2 \times 6 = 3 + 21 + 12 = 36$,

$f(15) = f(7) + f(8) + 7 \times 8 = 28 + 36 + 56 = 120$,

$f(30) = f(15) + f(15) + 15 \times 15 = 120 + 120 + 225 = 465$. 故选 D.]

7. BCD [对于 A 选项,有 $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ -x-1 \geq 0, \end{cases}$ 不等式组无解, A 错误;

对于 B 选项,根据函数的概念知,当函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义时,函数 $f(x)$ 的图象与直线 $x=1$ 无交点,当函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有定义时,函数 $f(x)$ 的图象与直线 $x=1$ 只有 1 个交点,所以函数 $f(x)$ 的图象与直线 $x=1$ 最多有 1 个交点, B 正确;对于 C 选项,因为 $f(x) = |x-1| - |x|$,所以

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$,故 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(0) = 1$, C 正确;对于 D 选项,

两个函数的定义域相同,且对应关系完全一致,故这两个函数是同一个函数, D 正确. 故选 BCD.]

8. ABC [$\because$ 矩形的面积为 10,长为 x ,宽为 y , $\therefore xy = 10$,

$\therefore y = \frac{10}{x}, x > 0$,根据 $d = \sqrt{x^2 + y^2}$,得到 $d = \sqrt{x^2 + \frac{100}{x^2}}$, $x > 0$,

$\therefore$ 周长 $l = 2(x+y)$, $\therefore l = 2x + \frac{20}{x}, x > 0$,

根据 $d^2 = x^2 + \frac{100}{x^2}$, $l^2 = 4\left(x + \frac{10}{x}\right)^2 = 4\left(x^2 + \frac{100}{x^2} + 20\right) = 4(d^2 + 20)$,

$\therefore l = 2\sqrt{d^2 + 20}$, $d \geq 2\sqrt{5}$. 故选 ABC.]

9. ABD [对于 A, 根据狄利克雷函数的定义可知 $D(D(2)) = D(1) = 1$, $D(D(\sqrt{2})) = D(0) = 1$, 所以 A 正确;

对于 B, 易知 $D(x)$ 的值域为 $\{0, 1\}$, 函数 $f(x) = \frac{|x|+x}{2x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) = \frac{-x+x}{2x} = 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时,

$f(x) = \frac{x+x}{2x} = 1$, 即函数 $f(x) = \frac{|x|+x}{2x}$ 的值域为 $\{0, 1\}$, 所以 B 正确;

对于 C, 若 $x \in \mathbf{Q}$, 则 $-x \in \mathbf{Q}$, 则 $D(x) = D(-x) = 1$, 若 $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$, 则 $-x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$, 则 $D(x) = D(-x) = 0$, 综上可得 $D(x) = D(-x)$, 所以 C 错误;

对于 D, 当 $x \in \mathbf{Q}$ 时, $x+1 \in \mathbf{Q}$, 此时 $D(x+1) = D(x) = 1$;

当 $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$ 时, $x+1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$, 此时 $D(x+1) = D(x) = 0$, 所以 D 正确. 故选 ABD.]

10. 1 [令 $\sqrt{x-1} = t$, $t \geq 0$,

则 $x = t^2 + 1$ ($t \geq 0$), $f(t) = t^2 + 3$,

故 $f(a) = a^2 + 3 = 4$ ($a \geq 0$), 解得 $a = 1$.]

11. $\sqrt{3}$ [$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0, \end{cases}$

则 $f(3) = \sqrt{3}$.]

12. 2 或 $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ [当 $a > 1$ 时, $f(a) = 1 + \frac{1}{a} = \frac{3}{2}$, $\therefore a = 2 > 1$;

当 $-1 \leq a \leq 1$ 时, $f(a) = a^2 + 1 = \frac{3}{2}$, $\therefore a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1, 1]$;

当 $a < -1$ 时, $f(a) = 2a + 3 = \frac{3}{2}$, $\therefore a = -\frac{3}{4} > -1$, 舍去.

综上, $a = 2$ 或 $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.]

课时作业(八)

1. A [对于 A, $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ 是反比例函数, 在 $(0, 1)$ 内单调递减, 符合题意;

对于 B, $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ 是幂函数, 在 $(0, 1)$ 内单调递增, 不符合题意;

对于 C, $y = x^2$ 是二次函数, 在 $(0, 1)$ 内单调递增, 不符合题意;

对于 D, $y = x^3$ 是幂函数, 在 $(0, 1)$ 内单调递增, 不符合题意. 故选 A.]

2. B [由 $x^2 - 10x > 0$, 得 $x < 0$ 或 $x > 10$.

$\therefore$ 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

且函数 $y = x^2 - 10x$ 在 $(10, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $(10, +\infty)$.

故选 B.]

3. B [充分性: 因为 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x+1) > f(x)$ 成立, 但不能保证 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的连续函数, 所以 $f(x)$ 不一定为增函数,

如 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \text{ 或 } x > \frac{1}{2}, \\ 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$

故充分性不成立;

必要性: 当 $f(x)$ 为增函数时, 因为 $x+1 > x$, 所以 $f(x+1) > f(x)$ 一定成立, 故必要性成立.

所以 " $\forall x \in \mathbf{R}, f(x+1) > f(x)$ " 是 "函数 $f(x)$ 为增函数" 的必要不充分条件. 故选 B.]

4. CD [对于选项 A, 一个函数在定义域内的某个子区间上单调递增, 这个函数在定义域上不一定是增函数, A 不符合题意; 对于选项 B, 当 $f(x)$ 为常数函数时, 对任意 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 都有 $f(x_1) = f(x_2)$, $f(x)$ 不是增函数, 不符合题意; 对于选项 C, 对任意 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 且 $x_1 - x_2 < 0$, 都有 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 符合题意; 对于选项 D, 对任意 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 设 $x_1 > x_2$, 若 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, 必有 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 符合题意. 故选 CD.]

5. CD [对任意 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

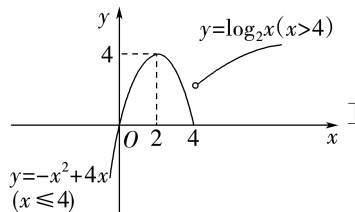
对于 A, $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 由对勾函数的图象与性质可知 A 不满足题意;

对于 B, $f(x) = \frac{3}{1-x}$, 根据复合函数的单调性知, 函数在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故 B 不满足题意;

对于 C, $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, 函数在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 故 C 满足题意;

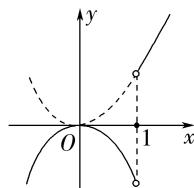
对于 D, $f(x) = -x - \frac{1}{x}$, 由对勾函数的图象和性质可知 D 满足题意. 故选 CD.]

6. $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$ [作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 由图象可知 $f(x)$ 在 $(a, a+1)$ 上单调递增, 需满足 $a \geq 4$ 或 $a+1 \leq 2$, 即 $a \leq 1$ 或 $a \geq 4$.



7. $(-\infty, 0), (1, +\infty)$ [由题意知 $g(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1, \\ 0, & x = 1, \\ -x^2, & x < 1, \end{cases}$

该函数图象如图所示,



由图象知, 函数 $g(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, 0), (1, +\infty)$.]

8. 证明: (1) 根据题意, 令 $m=0$,

可得 $f(0+n)=f(0) \cdot f(n)$.

$\because f(n) \neq 0, \therefore f(0)=1$.

(2) 由题意知, 当 $x>0$ 时, $0<f(x)<1$,

当 $x=0$ 时, $f(0)=1>0$;

当 $x<0$ 时, $-x>0, \therefore 0<f(-x)<1$.

$\therefore f(x+(-x))=f(x) \cdot f(-x)$,

$\therefore f(x) \cdot f(-x)=1$,

$\therefore f(x)=\frac{1}{f(-x)}>0$.

故当 $x \in \mathbf{R}$ 时, 恒有 $f(x)>0$.

(3) $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$,

则 $f(x_2)=f(x_1+(x_2-x_1))$,

$\therefore f(x_2)-f(x_1)=f(x_1+(x_2-x_1))-f(x_1)$

$=f(x_1) \cdot f(x_2-x_1)-f(x_1)$

$=f(x_1)[f(x_2-x_1)-1]$.

由(2)知 $f(x_1)>0$,

又 $\because x_2-x_1>0, \therefore 0<f(x_2-x_1)<1$,

故 $f(x_2)-f(x_1)<0$,

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

课时作业(九)

1. D [因为 $f(x)$ 是偶函数,

所以 $f(-2)=f(2), f(-3)=f(3)$.

因为 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上单调递增,

所以 $f(3)>f(2)>f(1)$,

所以 $f(-3)>f(-2)>f(1)$.]

2. C [由题意知, $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上单调递增, 则 $f(x)>$

$$f(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ -2 \leq 2x-1 \leq 2, \text{ 解得 } -\frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases} \text{ 故选 C.}]$$

3. A [当 $x \geq a$ 时, $f(x)=2^x, f(x)$ 单调递增, 在 $[a, +\infty)$ 上

的最小值为 2^a , 当 $x < a$ 时, $f(x)=-\frac{1}{2}x, f(x)$ 单调递减, 在 $(-\infty, a)$ 上无最小值.

则由已知得 $-\frac{1}{2}a \geq 2^a$, 即 $2^a + \frac{1}{2}a \leq 0$, 设 $h(a)=2^a + \frac{1}{2}a$,

易知该函数为增函数, 且 $h(-1)=2^{-1}-\frac{1}{2}=0$, 从而 $a \leq -1$. 故

选 A.]

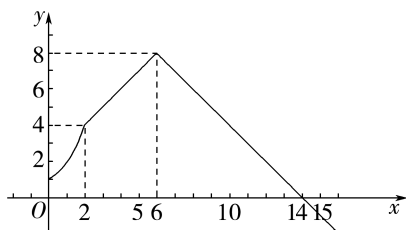
4. D [根据题意, 函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的减函数,

$$\text{必有 } \begin{cases} a-2 < 0, \\ a > 0, \\ (a-2) \times 2 + 3 \geq \frac{a}{2}, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} a < 2, \\ a > 0, \\ a \geq \frac{2}{3}, \end{cases} \quad \text{即 } \frac{2}{3} \leq a < 2,$$

故实数 a 的取值范围是 $[\frac{2}{3}, 2)$.

故选 D.]

5. D [画出函数 $y=2^x, y=2+x, y=14-x$ 的图象如图所示,



由图象可知, 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $f(x)=2^x$,

当 $2 < x \leq 6$ 时, $f(x)=2+x$,

当 $x > 6$ 时, $f(x)=14-x$,

当 $x=6$ 时, $f(x)$ 取到最大值, $f(6)=8$.

故选 D.]

6. C [由题意, 得 $-4x+a > -3-x^2, \forall x \in (3, +\infty)$ 恒成立,

则 $a > -x^2+4x-3, \forall x \in (3, +\infty)$ 恒成立.

设函数 $g(x)=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$,

因为当 $x>3$ 时, $g(x)<g(3)=0$,

所以实数 a 的取值范围为 $[0, +\infty)$.

故选 C.]

7. BC [作出函数 $f(x)=$

$\min\{|x|, x+1\}$ 的图象, 如图实

线部分,

对于 A, 根据图象, 可得 $f(x)$ 无

最大值, 无最小值, 故 A 错误;

对于 B, 根据图象得, 当 $x \leq 0$

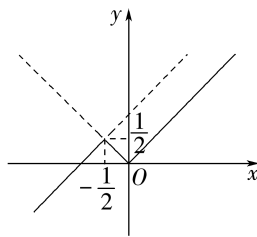
时, $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$, 故 B

正确;

对于 C, 由 $|x| \leq \frac{1}{2}$, 解得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, 结合图象,

得不等式 $f(x) \leq \frac{1}{2}$ 的解集为 $(-\infty, \frac{1}{2}]$, 故 C 正确;

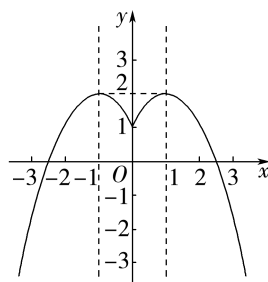
对于 D, 由图象得, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$, $[0, +\infty)$, 故 D 错误. 故选 BC.]



8. ABD [因为 $f(x)=-x^2+2|x|+1$,

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} -x^2+2x+1, & x \geq 0, \\ -x^2-2x+1, & x < 0, \end{cases}$$

作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示,



由图象可知, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递增, 在 $[-1, 0]$ 上单

调递减, 故 A, B 正确;

由图象可知, 当 $x=-1$ 或 $x=1$ 时, 函数 $y=f(x)$ 有最大值, 没有最小值, 故 C 错误, D 正确. 故选 ABD.]

9. ABD [对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+3)=f(1-x)$,

则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称.

又对任意 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0 (x_1 \neq x_2)$, 所以

函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, 2)$ 上单调递增,

故函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取最大值, B 正确; $f(0)=f(4)<$

$f(3)$, C 错误; $-a^2+a+1=-(a-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}$, 所以

$f(-a^2+a+1) \leq f(\frac{5}{4})$, A 正确; 若 $f(m)>f(-1)$,

则 $|m-2|<|2-(-1)|$, 解得 $-1<m<5$, D 正确. 故选 ABD.]

10. (1)(3)(4)(5) [$\because f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上单调递增,
 $\therefore f(0) < f(2)$, 故(1)正确.
 $\because$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[2, 5]$ 上单调递减,
 $\therefore f(3) < f(2)$, 故(2)错误.
 $\because$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上单调递增, 在区间 $[2, 5]$ 上单调递减, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 5]$ 上有最大值, 也有最小值, 且 $f(2)$ 是最大值, $f(-1)$ 或 $f(5)$ 是最小值, 故(3)(5)正确, (6)不正确, 而 $f(0)$ 与 $f(3)$ 的大小不确定, 故(4)正确.]
11. $(0, +\infty)$ [因为 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1, \\ x + \frac{4}{x} - 5, & 0 < x < 1, \end{cases}$
 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = x^2 \geq 1$,
 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = x + \frac{4}{x} - 5$ 单调递减, 故 $f(x) > 0$,
 则 $f(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$.]
12. (2)(4) [由 $x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) > x_1 f(x_2) + x_2 f(x_1)$,
 得 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$,
 因此 $f(x)$ 是增函数, (1)错误;
 由 $-5 < 0 < 1$, 得 $f(-5) < f(0) < f(1)$, (2)正确;
 不一定有 $f(0) = 0$, 如 $f(x) = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, $f(0) = 1$, (3)错误;
 由 $f(2x-1) < f(3-x)$, 得 $2x-1 < 3-x$, 解得 $x < \frac{4}{3}$, (4)正确.]

课时作业(十)

1. D [对于A, 定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} = f(x)$, $f(x)$ 是偶函数, 故A错误.
 对于B, $f(x) = \sin x$ 是奇函数, 但在定义域上不单调递增, 故B错误.
 对于C, 定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = 2^x - 2^{-x} = -(2^{-x} - 2^x) = -f(x)$, $f(x)$ 是奇函数. 因为 $y = 2^{-x}$, $y = -2^x$ 均在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以 $f(x) = 2^{-x} - 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 故C错误.
 对于D, 令 $\frac{5+x}{5-x} > 0$, 即 $\frac{x+5}{x-5} < 0$, 得 $-5 < x < 5$, 所以 $f(x) = \ln \frac{5+x}{5-x}$ 的定义域为 $(-5, 5)$, 关于原点对称. $f(-x) = \ln \frac{5-x}{5+x} = -\ln \frac{5+x}{5-x} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数. $f(x) = \ln \frac{5+x}{5-x} = \ln \frac{-(5-x-10)}{5-x} = \ln \left(-1 - \frac{10}{x-5} \right)$, $y = \ln x$ 在定义域上单调递增, $y = -1 - \frac{10}{x-5}$ 在定义域上单调递增, 所以 $f(x) = \ln \frac{5+x}{5-x}$ 在 $(-5, 5)$ 上单调递增, 故D正确. 故选D.]
2. C [因为函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称, 且周期为4, 所以 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(27) = f(7 \times 4 - 1) = f(-1) = -f(1) = -2$. 故选C.]
3. C [根据题意, $f(x) = (2\ 025 + m)x^5 - x^4$, 其定义域为 $\mathbf{R}$, 若 $f(x)$ 是偶函数, 得 $f(x) - f(-x) = (2\ 025 + m)x^5 - x^4 - [(2\ 025 + m)(-x)^5 - (-x)^4] = 0$ 恒成立, 变形可得 $2\ 025 + m = 0$, 故 $m = -2\ 025$. 故选C.]
4. D [法一: 令 $g(x) = ax^3 + bx (ab \neq 0)$, 易知 $g(x)$ 是奇函数, 从而 $f(2\ 027) = g(2\ 027) + 1$, $f(-2\ 027) = g(-2\ 027) + 1 = -g(2\ 027) + 1$.

- 又因为 $f(2\ 027) = k$, 所以 $g(2\ 027) = k - 1$,
 从而 $f(-2\ 027) = -(k - 1) + 1 = 2 - k$. 故选D.
 法二: 因为 $f(-x) + f(x) = -ax^3 - bx + 1 + ax^3 + bx + 1 = 2$, 所以 $f(-2\ 027) + f(2\ 027) = 2$.
 又因为 $f(2\ 027) = k$, 所以 $f(-2\ 027) = 2 - k$. 故选D.]
5. D [$\because f(x), g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数,
 $\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增.
 $\therefore f(3) < f(2), g(3) < g(2) < 0$, 但无法判断 $f(2), f(3)$ 的正负,
 $\therefore g(f(2)) < g(f(3))$,
 故选D.]
6. C [根据题意, 函数 $f(x) - 1$ 为奇函数,
 则有 $f(x) + f(-x) = 2$,
 令 $x = 0$, 可得 $f(0) = 1$,
 而 $f(x - 1)$ 为偶函数, 所以 $f(x - 1) = f(-x - 1)$, 则 $f(x - 2) = f(-x)$,
 所以 $f(x) + f(x - 2) = 2, f(x - 2) + f(x - 4) = 2$,
 所以 $f(x) = f(x - 4)$, 故 $f(x)$ 的周期为4,
 因为 $f(1) + f(3) = 2, f(0) + f(2) = 2$,
 所以 $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2\ 026) = 506[f(0) + f(1) + f(2) + f(3)] + f(0) + f(1) + f(2) = 506 \times 4 + 2 + 0 = 2\ 026$.
 故选C.]
7. CD [利用奇函数的定义, 首先定义域需关于原点对称, 排除选项A; 函数 $f(x)$ 是奇函数, 需满足 $f(-x) = -f(x)$, 排除选项B. 故选CD.]
8. BD [A选项, 若 $f(x) = x(x^2 - 4)$, 则 $f(-2) = 0, f(2) = 0$, 故 $f(-2) = f(2)$, 因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 关于原点对称, 且 $f(-x) = -x[(-x)^2 - 4] = -x(x^2 - 4) = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, 故A错误;
 B选项, 根据偶函数的定义知, 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(-x) = f(x)$, 因此满足 $f(2) \neq f(-2)$ 的函数必然不是偶函数, 故B正确;
 C选项, 若 $f(x) = x^2$, 则 $f(2) = 4, f(1) = 1$, 故 $f(2) > f(1)$, 但函数 $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故C错误;
 D选项, 因为 $2 > 1, f(2) > f(1)$, 所以 $f(x)$ 不是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 故D正确. 故选BD.]
9. AD [对于A, 函数 $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$, 必有 $1-x^2 \neq 0$, 解得 $x \neq \pm 1$, 则函数的定义域为 $\{x | x \neq \pm 1\}$, 故A正确;
 对于B, 因为 $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$, 其定义域为 $\{x | x \neq \pm 1\}$, 关于原点对称,
 则 $f(-x) = \frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2} = f(x)$, 得到 $f(x)$ 为偶函数, 故B错误;
 对于C, 因为 $f(2) = \frac{1+4}{1-4} = -\frac{5}{3}, f(3) = \frac{1+9}{1-9} = -\frac{5}{4}$, 所以 $f(3) > f(2)$, 则 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上不可能单调递减, 故C错误;
 对于D, 因为 $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$,

$$\text{所以 } -f(x) = -\frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{x^2+1}{x^2-1},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x^2}} = \frac{x^2+1}{x^2-1},$$

则 $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) (x \neq 0)$, 故 D 正确.

故选 AD.]

10. 0 [$\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(0) = 0$, 即 $0^3 + a = 0$, 解得 $a = 0$.]

11. $\sqrt{-x} + 1$ [$\because f(x)$ 为偶函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \sqrt{x} + 1$,

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, $f(x) = f(-x) = \sqrt{-x} + 1$,

即当 $x < 0$ 时, $f(x) = \sqrt{-x} + 1$.]

课时作业(十一)

1. D [设所求函数图象上的任意一点 $P(x, y)$, 点 P 关于 $x = 2$ 对称的点为 $Q(4-x, y)$, 由题意知点 Q 在 $y = \log_2 x$ 的图象上, 可得 $y = \log_2(4-x)$, 即函数 $y = \log_2 x$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称的函数解析式为 $y = \log_2(4-x)$.]

2. A [根据题意, 因为 $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}$, 其定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$,

易得函数的定义域关于点 $(1, 0)$ 对称,

则 $f(x)$ 的图象的对称中心的横坐标为 1,

又由 $f(x) + f(2-x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{-x} = 0$, 则对称中心的纵坐标为 0,

所以对称中心为 $(1, 0)$. 故选 A.]

3. C [$\because$ 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, $\therefore f(x) + f(2-x) = 0$, 即 $x^3 + ax^2 + x + b + (2-x)^3 + a(2-x)^2 + (2-x) + b = (2a+6)x^2 - (4a+12)x + 10 + 4a + 2b = 0$,

$$\therefore \begin{cases} 2a+6=0, \\ 4a+12=0, \\ 10+4a+2b=0, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=-3, \\ b=1. \end{cases}$$

故选 C.]

4. D [因为 $f(x+2)$ 为偶函数,

所以 $f(-x+2) = f(x+2)$, 又 $f(4+x) = -f(4-x)$,

所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, $f(x)$ 的图象关于点 $(4, 0)$ 对称, 且 $f(4) = 0$, 所以 A 选项正确;

所以 $f(-x) = f(x+4)$, $f(-x) = -f(x+8)$,

所以 $f(x+4) = -f(x+8)$, 所以 $f(x+4) = -f(x)$,

所以 $f(x+8) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 8, 所以 B 选项正确;

所以 $f(2025) = f(8 \times 253 + 1) = f(1)$, 所以 C 选项正确;

因为当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = x^2 - 2x$,

所以 $f(7) = f(-1) = -f(9) = -f(1) = -(1-2) = 1$, 所以 D 选项错误.

故选 D.]

5. AC [由 $y = \sqrt{|x|}$ 知定义域为 $\mathbf{R}$,

且 $f(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{|x|} = f(x)$,

所以该函数为偶函数, 则图象关于 y 轴对称,

所以 A 正确;

由 $y = x + \frac{1}{x}$ 知定义域为 $\{x | x \neq 0\}$,

且 $f(-x) = (-x) + \left(-\frac{1}{x}\right)$

$= -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$,

所以该函数为奇函数, 则图象关于原点对称,

所以 B 错误;

由 $y = \frac{2}{x^2+1}$ 知定义域为 $\mathbf{R}$,

且 $f(-x) = \frac{2}{(-x)^2+1} = \frac{2}{x^2+1} = f(x)$,

所以该函数为偶函数, 则图象关于 y 轴对称, 所以 C 正确;

由 $y = x - \frac{1}{x}$ 知定义域为 $\{x | x \neq 0\}$,

且 $f(-x) = (-x) - \left(-\frac{1}{x}\right)$

$= -\left(x - \frac{1}{x}\right) = -f(x)$,

所以该函数为奇函数, 则图象关于原点对称,

所以 D 错误. 故选 AC.]

6. ABD [$\because$ 函数 $y = f(x+a) - b$ 为奇函数,

$\therefore f(-x+a) - b = -f(x+a) + b$,

即 $f(x+a) + f(-x+a) = 2b$.

对于 A, 由 $f(x+a) + f(-x+a) = 2b$ 得 $a = b$, $\therefore$ 对于任意的 $a = b$, 点 $P(a, b)$ 都是 $f(x) = x$ 的图象的对称中心, 故 A 满足题意;

对于 B, $f(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$,

$\therefore f(x+1) + f(-x+1) = (x+1)^2(x-2) + (-x+1)^2 \cdot (-x-2) = -4$,

$\therefore$ 点 $P(1, -2)$ 为 $f(x)$ 图象的对称中心, 故 B 满足题意;

对于 C, $\because f(x) = x^4 + x^2$ 是偶函数, 图象关于 y 轴对称, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 其图象大致如图 1 所示.

故不可能找到一个点使 $f(x)$ 的图象为中心对称图形, 故 C 不满足题意;

对于 D, $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 的图象如图 2 所示, 其图象关于点 $(1, 0)$

对称, 故 D 满足题意.

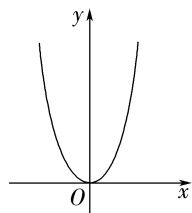


图1

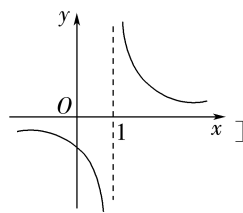


图2

7. $(-1, 1)$ [$\because y = \frac{x-2}{x+1} = \frac{x+1-3}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1}$,

$\therefore$ 该函数图象是由 $y = -\frac{3}{x}$ 的图象先向左平移 1 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度得到的.

$\therefore$ 其图象的对称中心为点 $(-1, 1)$.]

8. 1 [因为 $f(4-x) + f(x) = 2$, 令 $x = 2$, 得 $2f(2) = 2$, 所以 $f(2) = 1$. 又 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 4$ 对称, 所以 $f(6) = f(2) = 1$. 令 $x = -2$, 得 $f(6) + f(-2) = 2$, 所以 $f(-2) = 2 - 1 = 1$.]

9. 解: (1) 由 $f(x) = x - \frac{2}{x+1} = \frac{(x+2)(x-1)}{x+1} > 0$,

当 $x+1 < 0$ 时, $(x+2)(x-1) < 0$, 解得 $-2 < x < -1$;

当 $x+1 > 0$ 时, $(x+2)(x-1) > 0$, 解得 $x > 1$.

综上可知, 不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-2, -1) \cup (1, +\infty)$.

(2) 证明: 设 $f(x)$ 的定义域为 $A = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, 对任意的 $x \in A$, 都有 $-x-2 \in A$,

$$\text{且 } f(-x-2) + f(x) = -x-2 - \frac{2}{-x-2+1} + x - \frac{2}{x+1} = \frac{2}{x+1} - x - 2 + x - \frac{2}{x+1} = -2,$$

即 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1, -1)$ 对称, 即曲线 $y = f(x)$ 是中心对称图形.

课时作业(十二)

1. B [因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{1}{2}+x\right) =$

$$f\left(\frac{1}{2}-x\right),$$

则 $f(1+x) = f(-x) = -f(x)$, 且 $f(0) = 0$,

所以 $f(2+x) = f(x)$, 故 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数.

则 $f(7) = f(1) = f(0) = 0$. 故选 B.]

2. A [因为对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 有 $f(x_1 \cdot x_2) = x_1 f(x_2) + x_2 f(x_1)$,

$$\text{所以 } f(0) = 0, f(1) = f(1) + f(1),$$

$$\text{所以 } f(1) = 0,$$

$$\text{所以 } f(1) = -f(-1) - f(-1) = 0,$$

$$\text{所以 } f(-1) = 0,$$

所以 $f(-x) = -f(x) + x f(-1) = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, 所以 A 选项正确;

而其他选项不一定成立, 故选 A.]

3. D [因为函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = f(1+x)$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 故 $a = f(3) = f(-1)$, $b = f(\sqrt{2}) = f(2-\sqrt{2})$, $c = f(2) = f(0)$.

又函数 $f(x)$ 是偶函数, 且在 $[-1, 0]$ 上单调递增, 所以 $a = f(1)$, 且函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减. 又 $0 < 2 - \sqrt{2} < 1$, 所以 $f(0) > f(2 - \sqrt{2}) > f(1)$, 即 $c > b > a$. 故选 D.]

4. B [因为当 $x < 3$ 时, $f(x) = x$,

$$\text{所以 } f(1) = 1, f(2) = 2.$$

$$\text{又 } f(x) > f(x-1) + f(x-2),$$

$$\text{则 } f(3) > f(2) + f(1) = 3,$$

$$f(4) > f(3) + f(2) > 5,$$

$$f(5) > f(4) + f(3) > 8,$$

$$f(6) > f(5) + f(4) > 13,$$

$$f(7) > f(6) + f(5) > 21,$$

$$f(8) > f(7) + f(6) > 34,$$

$$f(9) > f(8) + f(7) > 55,$$

$$f(10) > f(9) + f(8) > 89,$$

$$f(11) > f(10) + f(9) > 144,$$

$$f(12) > f(11) + f(10) > 233,$$

$$f(13) > f(12) + f(11) > 377,$$

$$f(14) > f(13) + f(12) > 610,$$

$$f(15) > f(14) + f(13) > 987,$$

$$f(16) > f(15) + f(14) > 1\,597 > 1\,000, \text{ 则可知 } f(20) > 1\,000, \text{ 则 B 正确; 且无证据表明 ACD 一定正确. 故选 B.]$$

5. ABD [A 选项, 令 $x=y=0$, 则 $f(0) - [f(0)]^3 = 2f(0)$,

$$\therefore f(0) \{ [f(0)]^2 + 1 \} = 0,$$

故 $f(0) = 0$, 故 A 正确;

$$\text{B 选项, 令 } y = -x, \text{ 则 } f(0) - f(0)f(x)f(-x) = f(x) + f(-x) = 0,$$

$$\therefore f(-x) = -f(x), \text{ 又函数 } f(x) \text{ 的定义域为 } \mathbf{R},$$

$$\therefore f(x) \text{ 为奇函数, 故 B 正确;}$$

$$\text{C 选项, 令 } x=y=2,$$

$$\text{则 } f(4) - f(4)[f(2)]^2 = 2f(2),$$

$$\therefore f(4) = -\frac{4}{3}, \therefore [f(2) - 2][2f(2) + 1] = 0,$$

$$\text{解得 } f(2) = 2 \text{ 或 } f(2) = -\frac{1}{2}, \text{ 故 C 错误;}$$

$$\text{D 选项, 若 } f(100) = 0, \text{ 令 } y = 100, \text{ 得 } f(x+100) = f(x),$$

$$\therefore 100 \text{ 是 } f(x) \text{ 的一个周期, 故 D 正确.}$$

故选 ABD.]

6. BCD [选项 A, $y = f(x+t) - f(x)$ 单调递增, 不能说明 $y = f(x)$ 也单调递增,

$$\text{例如对于 } y = e^{-x}, y = f(x+t) - f(x) = e^{-x-t} - e^{-x}, y' = f'(x+t) - f'(x) = e^{-x} - e^{-x-t} > 0 \text{ 恒成立, 满足 } y = f(x+t) - f(x) \text{ 单调递增, 但不满足 } y = f(x) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{则 } f(0) < f(2) \text{ 不一定成立, 故 A 错误;}$$

$$\text{选项 B, 取 } t = \frac{2}{3}, \text{ 有 } f(2) - f\left(\frac{4}{3}\right) > f\left(\frac{4}{3}\right) - f\left(\frac{2}{3}\right), \text{ 有}$$

$$2f\left(\frac{4}{3}\right) < f(2) + f\left(\frac{2}{3}\right), \text{ 故 B 正确;}$$

$$\text{选项 C, 令 } t = 9, \text{ 由 } y = f(x+9) - f(x) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{可得 } f(2\,026) - f(1) = f(2\,026) - f(2\,017) + f(2\,017) - f(2\,008) + \cdots + f(10) - f(1) > 225[f(10) - f(1)], \text{ 故 } f(10) - f(1) < \frac{2\,025}{225} = 9, \text{ 而 } f(1) = 1, \text{ 故 } f(10) < 10, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{选项 D, 令 } t = 1, \text{ 由 } y = f(x+1) - f(x) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{可得 } f(2\,026) - f(2\,025) > f(2) - f(1),$$

$$\text{即 } f(2) + f(2\,025) < f(1) + f(2\,026),$$

$$\text{同理可得 } f(3) + f(2\,024) < f(1) + f(2\,026),$$

...

$$f(1\,013) + f(1\,014) < f(1) + f(2\,026),$$

$$\text{由以上式子累加可知 } \sum_{i=1}^{2\,026} f(i) < 1\,013[f(1) + f(2\,026)], \text{ 故 D 正确. 故选 BCD.]}$$

7. 4 054 [因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足对任意实数 x, y 均有 $f(xy) = yf(x)$, 用 x 替换 y, y 替换 x , 可得 $f(xy) = yf(x) = xf(y)$,

$$\text{所以当 } x \neq 0, y \neq 0 \text{ 时, 可知 } \frac{f(x)}{x} \text{ 是常函数,}$$

$$\text{于是当 } x \neq 0 \text{ 时, 可设 } f(x) = cx, \text{ 其中 } c \text{ 为常数,}$$

$$\text{又 } 2f(2) = f(1) + 6.$$

$$\text{所以 } 4c = c + 6, \text{ 解得 } c = 2,$$

$$\text{所以 } f(2\,027) = 2 \times 2\,027 = 4\,054.]$$

8. $(-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ [因为对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$,

$$\text{令 } g(x) = x f(x),$$

$$\text{所以 } \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} < 0,$$

$$\text{则 } g(x) = x f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递减,}$$

又 $f(x)$ 为奇函数及 $f(1)=0$,

所以 $g(-x)=-xf(-x)=xf(x)=g(x)$,

则 $g(x)$ 为偶函数, 且 $g(1)=g(-1)=0$, 故 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,

所以 $g(x+1)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递减.

又 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

则由 $xf(x+1)<0$ 可得 $x>0, f(x+1)<0$ 或 $x<0, f(x+1)>0$,

当 $x>0$ 时, $f(x+1)<0 \Rightarrow \frac{g(x+1)}{x+1}<0$, 得 $g(x+1)<0$, 解得 $x<-2$ 或 $x>0$, 故 $x>0$;

当 $x<0$ 时, $f(x+1)>0 \Rightarrow \frac{g(x+1)}{x+1}>0$, 即 $(x+1)g(x+1)>0$,

得 $\begin{cases} x+1<0, \\ g(x+1)<0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+1>0, \\ g(x+1)>0 \end{cases}$,

解得 $x<-2$ 或 $-1<x<0$.

综上, 不等式 $xf(x+1)<0$ 的解集为 $(-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.]

9. 解: (1) 根据题意, 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上满足 $f(x+y)=f(x) \cdot f(y)+f(0)-1$,

令 $x=y=0$, 则 $f(0+0)=f(0)f(0)+f(0)-1$,

故 $[f(0)]^2=1$, 可得 $f(0)=\pm 1$,

令 $y=0$, 则 $f(x)=f(x)f(0)+f(0)-1$,

当 $f(0)=-1$ 时, 则 $f(x)=-f(x)-2$, 即 $f(x)=-1$, 不符合题意, 舍去,

故 $f(0)=1$.

(2) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

证明: 由 (1) 的结论, $f(0)=1$,

则 $f(x+y)=f(x)f(y)$,

由 $f(x_1)=f(x_1-x_2+x_2)=f(x_1-x_2)f(x_2)$,

又当 $x>0$ 时, $0<f(x)<1$; 当 $x<0$ 时, $f(x)>1$,

分 2 种情况讨论:

当 $x_1>x_2>0$ 时, 即 $0<f(x_1-x_2)<1, 0<f(x_1)<1, 0<f(x_2)<1$,

所以 $f(x_1)=f(x_1-x_2)f(x_2)<f(x_2)$, 即 $f(x_1)-f(x_2)<0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $0>x_1>x_2$ 时, 则 $0<f(x_1-x_2)<1, f(x_1)>1, f(x_2)>1$,

所以 $f(x_1)=f(x_1-x_2)f(x_2)<f(x_2)$, 即 $f(x_1)-f(x_2)<0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

综上, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

(3) 根据题意, $f(x+y)=f(x)f(y)$ 且 $f(0)=1$,

令 $y=-x$, 则 $f(x)=\frac{1}{f(-x)}$, 故 $f(1)=\frac{1}{f(-1)}=\frac{1}{2}$,

即 $f(-1)=2$,

所以 $f(-2)=f(-1)f(-1)=4$, 则 $f(x-x^2)>f(-2)$,

由 (2) 知, $x-x^2<-2$, 即 $x^2-x-2>0$, 可得 $x<-1$ 或 $x>2$,

所以所求不等式的解集为 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

阶段检测(二)

1. A [由函数关系知 $f(1)=-2$, 即 $m=-2$,

函数的值域为 $\{1, 0, -2\}$, 故选 A.]

2. B [根据题意, 函数 $f(x)=$

$$\begin{cases} (2a-6)x+5, & x \leq 2, \\ \frac{a}{x}, & x > 2 \end{cases} \quad \text{是减函数,}$$

$$\text{则 } \begin{cases} 2a-6 < 0, \\ a > 0, \\ 4a-7 \geq \frac{a}{2}, \end{cases} \quad \text{解得 } 2 \leq a < 3, \text{ 即实数 } a \text{ 的取值范围为 } [2, 3).$$

3. 故 B.]

3. C [因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(-x)=-f(x)$. 又 $f(1+x)=f(-x)$, 所以 $f(2+x)=f(1+(1+x))=f(-(1+x))=-f(1+x)=-f(-x)=f(x)$, 所以

函数 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, $f\left(\frac{5}{3}\right)=f\left(\frac{5}{3}-2\right)=$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}. \text{ 故 C.}]$$

4. A [根据题意, 函数 $f(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+3)$

$$=-\frac{1}{f(x)},$$

则 $f(x+6)=-\frac{1}{f(x+3)}=f(x)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 6,

当 $x \in [2, 3]$ 时, $f(x)=-4x$, 则 $f(2)=-8$,

故 $f(2030)=f(338 \times 6+2)=f(2)=-8$.

故选 A.]

5. B [法一: 因为 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$, 所以 $f(x-1)=\frac{1-(x-1)}{1+(x-1)}=$

$$\frac{2-x}{x}, f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{-x}{x+2}.$$

对于 A, 令 $F(x)=f(x-1)-1=\frac{2-x}{x}-1=\frac{2-2x}{x}$, 定义域

关于原点对称, 但不满足 $F(x)=-F(-x)$;

对于 B, 令 $G(x)=f(x-1)+1=\frac{2-x}{x}+1=\frac{2}{x}$, 定义域关于

原点对称, 且满足 $G(x)=-G(-x)$;

对于 C, $f(x+1)-1=\frac{-x}{x+2}-1=\frac{-x-x-2}{x+2}=-\frac{2x+2}{x+2}$, 定

义域不关于原点对称;

对于 D, $f(x+1)+1=\frac{-x}{x+2}+1=\frac{-x+x+2}{x+2}=\frac{2}{x+2}$, 定义

域不关于原点对称. 故选 B.

法二: $f(x)=\frac{1-x}{1+x}=\frac{2-(x+1)}{1+x}=\frac{2}{1+x}-1$, 为保证函数变

换之后为奇函数, 需将函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度, 得到的图象对应的函数为 $y=f(x-1)+1$. 故 B.]

6. B [法一: 因为函数 $f(x+2)$ 是偶函数, 所以 $f(x+2)=$

$f(-x+2)$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称. 因为函数 $f(2x+1)$ 是奇函数, 所以 $f(-2x+1)=-f(2x+1)$, 则

$f(1)=0$, 且函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称. $f(x)=f(4-x)=-f(2-(4-x))=-f(x-2)$, $f(x+2)=-f(x)$, 则 $f(x+4)=-f(x+2)=-[-f(x)]=f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数, 所以 $f(5)=f(1+4)=f(1)=0$, 又函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 所以

$f(5)=f(-1)=0$. 故 B.]

法二: 构造一个符合条件的函数 $f(x)=\cos \frac{\pi}{2}x$, 可以验证只

有 $f(-1)=0$. 故 B.]

7. BC [A 项, $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}=(\sqrt{x}+1)^2-1$, $\sqrt{x}+1 \geq 1$,

将左右两边的 $\sqrt{x}+1$ 换成 x , 可得 $f(x)=x^2-1(x \geq 1)$, 故 A 错误;

B 项, 当 $x \geq 1$ 时, $f(x)=x^2-1 \geq 0$, $\therefore f(x)$ 的最小值为 0, 故 B 正确;

C 项, 函数 $f(2x-3)$ 中, 需满足 $2x-3 \geq 1$, 即 $x \geq 2$,

$\therefore$ 函数 $f(2x-3)$ 的定义域为 $[2, +\infty)$, 故 C 正确;

D 项, $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}-1$, 由 $\frac{1}{x} \geq 1$, 即 $0 < x \leq 1$,

$\therefore \frac{1}{x^2} \in [1, +\infty)$, $\therefore f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 故 D 错误.

故选 BC.]

8. BC [对于 A, 对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x)f(y)=f(x+y-2)$,

令 $y=2$, 有 $f(x)f(2)=f(x)$, 而 $f(x)$ 是非常数函数, 则有 $f(2)=1$, 故 A 错误;

对于 B, 令 $y=4-x$, 有 $x+y-2=2$,

则有 $f(4-x)f(x)=f(2)=1$,

令 $x=0$, 则有 $f(4)f(0)=1$, 变形可得 $f(4)=\frac{1}{f(0)}=\frac{1}{2}$, 故

B 正确;

对于 C, 由 B 的结论, $f(4-x)f(x)=1$,

当 $x < 2$ 时, $4-x > 2$, 则有 $0 < f(4-x) < 1$,

同理, 当 $x < 2$ 时, $f(x)=\frac{1}{f(4-x)} > 1$,

故对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) > 0$ 恒成立,

$\forall x_1 > x_2$, 则 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)}=f(x_1-x_2+2) < 1$,

即 $f(x_1) < f(x_2)$,

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 故 C 正确;

对于 D, 令 $x=y=0$, 得 $f(-2)=f(0)f(0)=4$,

令 $x=-2, y=0$, 得 $f(-4)=f(-2)f(0)=8$,

再由 $f(4-x)f(x)=1$ 可知 $f(8)=\frac{1}{f(-4)}=\frac{1}{8}$,

又由 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 则不等式 $f(x^2+3x+4) < \frac{1}{8}$ 等

价于 $x^2+3x+4 > 8$,

解得 $x < -4$ 或 $x > 1$, 即不等式的解集为 $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$, 故 D 错误.

故选 BC.]

9. -4 [根据题意, $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 则 $f(0)=0$,

又由当 $x > 0$ 时, $f(x)=2^x$, 则 $f(2)=2^2=4$,

则 $f(-2)=-f(2)=-4$,

故 $f(0)+f(-2)=-4$.]

10. (3, 5) [因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(3-x)=f(3+x)$,

且对任意的 $x_1, x_2 \in [3, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 都有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0,$$

所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称, $f(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 上单调递增,

若 $f(m-1) < f(2)$,

则 $|m-1-3| < |2-3|$,

解得 $3 < m < 5$,

即实数 m 的取值范围是 $(3, 5)$.]

11. 解: 定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 值域为 $\mathbf{R}$.

$\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{则 } y_1 - y_2 = x_1 - \frac{1}{x_1} - \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 + 1)}{x_1 x_2}.$$

$\because x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, 且 $x_1 < x_2$,

$\therefore x_1 x_2 > 0, x_1 - x_2 < 0, x_1 x_2 + 1 > 0$,

$\therefore y_1 - y_2 < 0$, 即 $y_1 < y_2$.

$\therefore y = x - \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增.

$\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{则 } y_1 - y_2 = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 + 1)}{x_1 x_2}.$$

$\because x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$\therefore x_1 x_2 > 0, x_1 - x_2 < 0, x_1 x_2 + 1 > 0$,

$\therefore y_1 - y_2 < 0$, 即 $y_1 < y_2$.

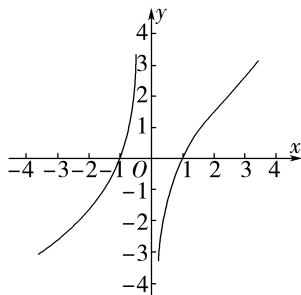
$\therefore y = x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

设 $f(x) = y = x - \frac{1}{x}$,

$$\because f(-x) = -x - \frac{1}{-x} = -\left(x - \frac{1}{x}\right) = -f(x),$$

$\therefore f(x) = y = x - \frac{1}{x}$ 是奇函数.

$y = x - \frac{1}{x}$ 的图象如图.



12. 解: (1) $\because f(x) = x^3 - 3x^2 = (x-1)^3 - 3(x-1) - 2$,

$$\therefore y = f(x+1) + 2 = x^3 - 3x.$$

设 $g(x) = x^3 - 3x$, 则 $g(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -g(x)$.

$\therefore g(x)$ 为奇函数.

$\therefore f(x) = x^3 - 3x^2$ 的图象关于点 $(1, -2)$ 对称.

即 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 的图象的对称中心是点 $(1, -2)$.

(2) 函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = a$ 成轴对称图形的充要条件是函数 $y = f(x+a)$ 为偶函数.

课时作业(十三)

1. C [因为 $f(x) = x^{4-m}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $4-m > 0$, 所以 $m < 4$. 又因为 $m \in \mathbf{N}^*$, 所以 $m = 1, 2, 3$.

又因为 $f(x) = x^{4-m}$ 是奇函数, 所以 $4-m$ 是奇数, 所以 $m = 1$ 或 $m = 3$.

故选 C.]

2. B [因为 $f(1) = f(3)$, 所以二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图象的对称轴为直线 $x = 2$,

又因为 $a < 0$, 所以 $f(4) < f(3) < f(2)$,

又 $f(1) = f(3)$, 所以 $f(4) < f(1) < f(2)$. 故选 B.]

3. B [由题图可知 $y = x^{\frac{m}{n}}$ 为偶函数,

且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 结合题图在 $(0, +\infty)$ 上的增长趋势可知, $\frac{m}{n} \in (0, 1)$ 且 m 为偶数, 又 $m, n \in \mathbb{N}^*$ 且互质, 故 n 是奇数. 故选 B.]

4. C [A 中, 由函数的值域可得 $a > 0$, 所以 A 正确;

B 中, 由题意可得 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{a}\right) = a \cdot \frac{1}{a^2} - 2 \cdot \frac{1}{a} + \frac{b}{4} = 0$, 可得 $ab = 4$, 所以 B 正确;

C 中, 因为 $f(m) = f(n)$, 可得 $m + n = \frac{2}{a}$, 所以 C 错误;

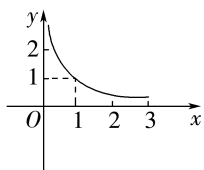
D 中, 由 B 选项分析, 可得 $\frac{1}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2ab} = \frac{1}{8}$, 所以 D 正确.

故选 C.]

5. ACD [依题意设 $f(x) = x^a$, 因为图

象过点 $\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 所以 $2^a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得

$a = -\frac{1}{2}$, 所以 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, A 正



确; $f(x)$ 的图象大致如图所示, 因为 $x \in (0, +\infty)$, 所以 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数, B 错误, C 正确; 由图象可知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, D 正确. 故选 ACD.]

6. BD [因为 $f(x) = ax^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^a$,

对于 A, 当 $a = -1$ 时, $f(x) = -x^2 - 2x + 1$, 其图象开口向下, 对称轴方程为 $x = -1$, $g(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, 其图象关于原

点对称, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 A 满足要求;

对于 B, 当 $f(x) = ax^2 - 2x + 1$ 的图象开口向上时, $a > 0$, 此时 $g(x) = x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 B 不满足要求;

对于 C, 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$, 其图象开口向

上, 对称轴方程为 $x = 2$, $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 且图象越来越平缓, 故 C 满足要求;

对于 D, 当 $f(x) = ax^2 - 2x + 1$ 的图象开口向上时, $a > 0$, 此时其对称轴方程为 $x = -\frac{-2}{2a} = \frac{1}{a} > 0$, 故 D 不满足要求. 故选 BD.]

7. ② [对于函数①, $f(x) = x^{-1}$ 是奇函数, 值域是 $\{y | y \neq 0\}$, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 所以三个性质中有两个不正确; 对于函数②, $f(x) = x^{-2}$ 是偶函数, 值域是 $\{y | y > 0\}$, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 所以三个性质中有两个正确, 符合条件; 同理可判断函数③④不符合题意.]

8. $(-1, 2)$ [$\because$ 函数 $f(x) = 2x^2 - 4kx - 5$ 图象的对称轴为直线 $x = k$, 函数 $f(x) = 2x^2 - 4kx - 5$ 在区间 $[-1, 2]$ 上不具有单调性.

$\therefore -1 < k < 2$.

$\therefore$ 实数 k 的取值范围是 $(-1, 2)$.]

9. 解: 依题意, 设函数 $f(x) = a(x-2)^2 + h (a \neq 0)$,

由二次函数 $f(x)$ 的图象过点 $(0, 3)$, 得 $f(0) = 3$, 所以 $4a + h = 3$, 即 $h = 3 - 4a$,

所以 $f(x) = a(x-2)^2 + 3 - 4a$,

令 $f(x) = 0$, 即 $a(x-2)^2 + 3 - 4a = 0$,

所以 $ax^2 - 4ax + 3 = 0$.

设方程 $f(x) = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ,

则 $x_1 + x_2 = 4, x_1 x_2 = \frac{3}{a}$,

所以 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 16 - \frac{6}{a}$,

所以 $16 - \frac{6}{a} = 10$, 解得 $a = 1$,

所以 $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

10. 解: (1) 由题意知 $a \neq 0$.

当 $a > 0$ 时, $f(x) = ax^2 - x + 2a - 1$ 的图象开口向上, 对称

轴方程为 $x = \frac{1}{2a}$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减需满足 $\frac{1}{2a} \geq 2$,

又 $a > 0$, 所以 $0 < a \leq \frac{1}{4}$;

当 $a < 0$ 时, $f(x) = ax^2 - x + 2a - 1$ 的图象开口向下, 对称

轴方程为 $x = \frac{1}{2a} < 0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减恒成立.

综上, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{4}\right]$.

(2) ① 当 $0 < \frac{1}{2a} \leq 1$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 时,

$f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增,

此时 $g(a) = f(1) = 3a - 2$.

② 当 $1 < \frac{1}{2a} < 2$, 即 $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ 时,

$f(x)$ 在区间 $\left[1, \frac{1}{2a}\right]$ 上单调递减,

在区间 $\left[\frac{1}{2a}, 2\right]$ 上单调递增,

此时 $g(a) = f\left(\frac{1}{2a}\right) = 2a - \frac{1}{4a} - 1$.

③ 当 $\frac{1}{2a} \geq 2$, 即 $0 < a \leq \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减,

此时 $g(a) = f(2) = 6a - 3$.

综上所述, $g(a) = \begin{cases} 6a - 3, & a \in \left(0, \frac{1}{4}\right], \\ 2a - \frac{1}{4a} - 1, & a \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \\ 3a - 2, & a \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right). \end{cases}$

课时作业(十四)

1. D [原式 $= 2^{\log_2 5} = 5$. 故选 D.]

2. D [对于 A, $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$, 故 A 正确;

对于 B, $\sqrt[4]{a^4} = |a| = a$, 故 B 正确;

对于 C, $(6^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 6^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 6^2 = 36$, 故 C 正确;

对于 D, $a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$, 故 D 错误. 故选 D.]

3. C [$\frac{\lg 2 + \lg 5 - \lg 8}{\lg 50 - \lg 40} = \frac{\lg \frac{10}{8}}{\lg \frac{50}{40}} = 1$, A 不成立;

$\frac{\lg 4 + \lg 5 - 1}{2 \lg 0.5 + \lg 8} = \frac{\lg 20 - 1}{\lg 0.25 + \lg 8} = \frac{1 + \lg 2 - 1}{\lg 2} = 1$, B 不成立;

$\lg 14 - 2 \lg \frac{7}{3} + \lg 7 - \lg 18 = (\lg 7 + \lg 2) - (2 \lg 7 - 2 \lg 3) +$

$\lg 7 - (2 \lg 3 + \lg 2) = 0$, C 成立;

$(\lg 2)^2 + \lg 2 \cdot \lg 5 + \lg 5 = \lg 2(\lg 2 + \lg 5) + \lg 5 = \lg 2 + \lg 5 = 1$, D 不成立. 故选 C.]

4. C [因为 $2^b = 3, a = \log_5 2$, 则 $b = \log_2 3$,

$$\log_2 5 = \frac{1}{a}, \text{ 所以 } \log_{12} 10 = \frac{\log_2 10}{\log_2 12} = \frac{\log_2 (2 \times 5)}{\log_2 (2^2 \times 3)}$$

$$= \frac{1 + \log_2 5}{2 + \log_2 3} = \frac{1 + \frac{1}{a}}{2 + b} = \frac{a + 1}{2a + ab}.$$

故选 C.]

5. B [由 $2^a = t$ 可得 $a = \log_2 t$,

$$\text{所以 } \frac{1}{a} = \log_t 2,$$

由 $3^b = t$ 可得 $b = \log_3 t$,

$$\text{所以 } \frac{1}{b} = \log_t 3,$$

$$\text{故 } \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 2\log_t 2 + \log_t 3 = \log_t 4 + \log_t 3 = \log_t 12 = 2,$$

故 $t^2 = 12$, 由于 $t > 0$,

$$\text{故 } t = 2\sqrt{3}.$$

故选 B.]

6. C [由题意, 可得 $\lg(100Y_0) = 6\lg(1+k) + \lg Y_0$,

$$\text{即 } 2 + \lg Y_0 = 6\lg(1+k) + \lg Y_0, \text{ 所以 } \lg(1+k) = \frac{1}{3},$$

所以 $1+k = 10^{\frac{1}{3}} \approx 2.154$, 所以 $k \approx 1.154 = 115.4\%$. 故选 C.]

7. BD [对于 A, $0.25^{\frac{1}{2}} + (\sqrt[5]{\pi})^0 - 2^{-1} = 0.5 + 1 - \frac{1}{2} = 1$, A 错误;

$$\text{对于 B, } \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} - \left(\frac{49}{9}\right)^{0.5} + (0.008)^{-\frac{2}{3}} \times \frac{1}{25} + (\pi-1)^0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} - \frac{7}{3} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \times \frac{1}{25} + 1 = \frac{4}{9} - \frac{7}{3} + 25 \times \frac{1}{25} + 1 = \frac{4}{9} - \frac{7}{3} + 2 = \frac{1}{9}, \text{ B 正确;}$$

$$\text{对于 C, 原式} = (2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}) \div (-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}) = [2 \times (-6) \div (-3)]a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6}} = 4ab^0 = 4a, \text{ C 错误;}$$

$$\text{对于 D, 当 } x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{6} \text{ 时, } \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = x + 2 + x^{-1} = 6, \text{ 得 } x + x^{-1} = 4, \text{ 由 } (x + x^{-1})^2 = x^2 + 2 + x^{-2} = 16, \text{ 得 } x^2 + x^{-2} = 14, \text{ 所以 } \frac{x + x^{-1}}{x^2 + x^{-2} - 2} = \frac{4}{14 - 2} = \frac{1}{3}, \text{ D 正确. 故选 BD.}]$$

8. BCD [对于 A, $b = \log_3 \frac{1}{5} < \log_3 1 = 0, a = \log_2 5 > \log_2 1 = 0$,

所以 $ab < 0$, 故 A 错误;

对于 B, 因为 $a = \log_2 5, b = \log_3 \frac{1}{5}$, 所以由对数的定义知,

$$2^a = 5, 3^b = \frac{1}{5},$$

$$\text{则 } 4^a \cdot 9^b = (2^a)^2 \cdot (3^b)^2 = 5^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1, \text{ 故 B 正确;}$$

对于 C, 由对数的运算性质知,

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \log_5 2 - \log_{\frac{1}{5}} 3 = \log_5 2 + \log_5 3 = \log_5 6 > 1, \text{ 故 C}$$

正确;

对于 D, 由对数的运算性质知,

$$\frac{2b-a}{b-a} = \frac{2\log_3 \frac{1}{5} - \log_2 5}{\log_3 \frac{1}{5} - \log_2 5} = \frac{\frac{2\lg 5}{\lg 3} + \frac{\lg 5}{\lg 2}}{\frac{\lg 5}{\lg 3} + \frac{\lg 5}{\lg 2}}$$

$$= \frac{\frac{2}{\lg 3} + \frac{1}{\lg 2}}{\frac{1}{\lg 3} + \frac{1}{\lg 2}} = \frac{\lg(2^2 \times 3)}{\lg(2 \times 3)} = \frac{\lg 12}{\lg 6} = \log_6 12, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 BCD.]

$$9. BC [对选项 A, a > 0, \frac{a}{\sqrt{a} \sqrt{a^3}} = \frac{a}{(a \cdot a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{a^{\frac{5}{4}}} = a^{-\frac{1}{4}},$$

故 A 错误;

$$\text{对选项 B, 因为 } 2a + b = 1, \text{ 所以 } \frac{27^a 3^b}{3^a} = \frac{3^{3a} \cdot 3^b}{3^a} = \frac{3^{3a+b}}{3^a} = \frac{3^{a+1}}{3^a} = 3, \text{ 故 B 正确;}$$

$$\text{对选项 C, } \frac{1}{\log_{\frac{1}{4}} 9} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}} 3} = \frac{1}{\log_4 9} + \frac{1}{\log_5 3} = \log_9 4 + \log_3 5 =$$

$$\log_3 2 + \log_3 5 = \log_3 10 = \frac{1}{\lg 3}, \text{ 故 C 正确;}$$

对选项 D, 因为 $\log_a 4 = m, \log_a 5 = n$, 所以 $a^m = 4, a^n = 5$,

所以 $a^{2m+n} = (a^m)^2 \cdot a^n = 4^2 \times 5 = 80$, 故 D 错误.

故选 BC.]

$$10. 1 [原式 = 4 - 2\log_2 3 \times \log_3 2 + \lg 5 - \lg 2 + 2\lg 2 - 2 = 4 - 2 + \lg 5 + \lg 2 - 2 = 4 - 2 + 1 - 2 = 1.]$$

$$11. 10 [\because 2^a = 5^b = k, \therefore a = \log_2 k, b = \log_5 k,$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_k 2 + \log_k 5 = \log_k 10 = 1, \text{ 解得 } k = 10.]$$

$$12. 60 [0, 120] [当 I = 10^{-6} \text{ 时, } L_I = 10\lg \frac{10^{-6}}{10^{-12}} = 10\lg 10^6 =$$

60, 所以声强级为 60 dB.

$$\text{当 } I = 1 \text{ 时, } L_I = 10\lg \frac{1}{10^{-12}} = 120;$$

当 $I = 10^{-12}$ 时, $L_I = 10\lg 1 = 0$, 所以人听觉的声强级(单位: dB)范围为 $[0, 120]$.]

课时作业(十五)

$$1. D [集合 A = \{x | \sqrt{x} < 1\} = \{x | 0 \leq x < 1\},$$

$$\text{集合 } B = \left\{y \left| y = e^x + \frac{1}{2} \right.\right\} = \left\{y \left| y > \frac{1}{2} \right.\right\}, \text{ 所以 } \complement_{\mathbf{R}} B = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right], \text{ 所以 } A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

故选 D.]

2. B [由指数函数的性质可知, $f(x) = a^{x-2} + 1 (a > 0, a \neq 1)$ 的图象恒过定点 $M(2, 2)$,

则函数 $g(x) = m^x - n = 2^x - 2$ 的图象经过第一、三、四象限.

故选 B.]

3. C [因为 $0 < a < 1$, 所以 $y = a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 又 $0 < x < y < 1$, 所以 $a^x > a^y$, 故 A 错误; 因为 $-x > -y$, 所以 $a^{-x} < a^{-y}$, 故 B 错误; 因为 $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$, 所以 $a^{\frac{1}{x}} < a^{\frac{1}{y}}$, 故 C 正确; 因为

$$\frac{1}{a} > 1, \text{ 所以 } y = \left(\frac{1}{a}\right)^x \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上单调递增, 又 } \frac{1}{x} > \frac{1}{y}, \text{ 所以 } \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{x}} > \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{y}}, \text{ 故 D 错误. 故选 C.}]$$

4. D [函数 $f(x)=2^x-x-1$, 则不等式 $f(x)>0$ 的解集即为 $2^x>x+1$ 的解集, 在同一平面直角坐标系中画出函数 $y=2^x, y=x+1$ 的图象(图略), 结合图象易得 $2^x>x+1$ 的解集为 $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, 故选 D.]

5. D [$y=1.01^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $y=x^{0.5}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

则 $a=1.01^{0.5}<b=1.01^{0.6}>1, a=1.01^{0.5}>c=0.6^{0.5}<1$. 所以 $b>a>c$.

故选 D.]

6. A [$\because 2^x+2^{2-x}\geq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{2-x}}=4$, 当且仅当 $2^x=2^{2-x}$, 即 $x=1$ 时取等号, $\therefore a=4, f(x)=\frac{4}{3^x-1}$.

令 $3^x-1\neq 0$, 解得 $x\neq 0$,

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

当 $x>0$ 时, $3^x-1>0, \frac{4}{3^x-1}>0$;

当 $x<0$ 时, $-1<3^x-1<0, \frac{4}{3^x-1}<-4$,

$\therefore f(x)$ 的值域为 $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$.

故选 A.]

7. AB [由题图可得 $a^1=2$, 即 $a=2$,

$y=a^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 单调递减, 且图象过点 $(-1, 2)$, 故 A 正确;

$y=x^{-a}=x^{-2}$ 为偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 且图象过点 $(-1, 1)$ 和 $(1, 1)$, 故 B 正确;

$y=a^{|x|}=2^{|x|}=\begin{cases} 2^x, & x\geq 0, \\ 2^{-x}, & x<0 \end{cases}$ 为偶函数, 结合指数函数的图象

可知 C 错误;

$y=|a^x|=|2^x|$, 根据指数函数及绝对值函数的图象可知 D 错误. 故选 AB.]

8. AB [A 项, 因为 $2^x>0$, 所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 故 A 正确;

B 项, $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$,

由 $2^x>0\Rightarrow 2^x+1>1\Rightarrow 0<\frac{1}{2^x+1}<1\Rightarrow -2<-\frac{2}{2^x+1}<0\Rightarrow$

$-1<1-\frac{2}{2^x+1}<1$,

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $(-1, 1)$, 故 B 正确;

C 项, 因为 $f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}=-f(x)$,

所以函数 $f(x)$ 是奇函数, 其图象关于原点对称, 不关于 y 轴对称, 故 C 错误;

D 项, 因为函数 $y=2^x+1$ 是增函数, $y=2^x+1>1$, 所以函数

$y=\frac{2}{2^x+1}$ 是减函数,

因此函数 $f(x)=1-\frac{2}{2^x+1}$ 是增函数, 故 D 错误.

故选 AB.]

9. BC [对于 A, $3^x=2<3^1$, 又 $y=3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $x<1$, 选项 A 错误;

对于 B, 因为 $3^x=2, 5^y=3$, 则 $x=\log_3 2, y=\log_5 3$,

又 $\frac{2}{3}=\log_3 3^{\frac{2}{3}}=\log_3 \sqrt[3]{9}>\log_3 \sqrt[3]{8}=\log_3 2=x$,

$y=\log_5 3=\log_5 \sqrt[3]{27}>\log_5 \sqrt[3]{25}=\frac{2}{3}$,

所以 $x<y$, 选项 B 正确;

对于 C, 因为 $0<x=\log_3 2<1, 0<y=\log_5 3<1$, 所以 $0<xy<1$, 选项 C 正确;

对于 D, 由选项 C 知 $0<x=\log_3 2<1, 0<y=\log_5 3<1$, 所以 $0<x+y<2$, 选项 D 错误.

故选 BC.]

10. $\frac{3}{4}$ [因为 $f(x)$ 的图象过原点, 所以 $f(0)=a\left(\frac{1}{2}\right)^0+b=0$, 即 $a+b=0$.

又 $f(x)$ 的图象无限接近直线 $y=1$, 但又不与该直线相交,

所以 $b=1, a=-1$, 所以 $f(x)=-\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}+1$,

所以 $f(-2)=-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\frac{3}{4}$.]

11. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ [$y=|a^x-1|$ 的图象是由 $y=a^x$ 的图象先向下平移 1 个单位长度, 再将 x 轴下方的图象翻折到 x 轴上方, 且保持 x 轴上及其上方的图象不变得到的.

当 $a>1$ 时, 如图 1, 两图象只有一个交点, 不符合题意;

当 $0<a<1$ 时, 如图 2, 要使两个图象有两个交点, 则 $0<$

$2a<1$, 即 $0<a<\frac{1}{2}$.

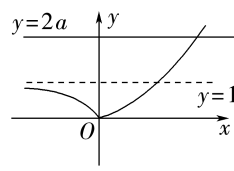


图 1

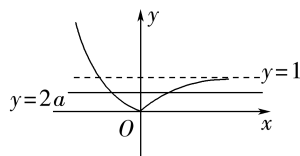


图 2

综上所述, a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.]

12. $\left(-\frac{2}{3}, 4\right)$ [因为 $f(x)=-\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}+1$,

所以 $f(-x)=-\left(\frac{1}{3}\right)^{|-x|}+1=-\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}+1=f(x)$, 定义域为 $\mathbf{R}$, 关于原点对称, 所以 $f(x)$ 为偶函数,

又当 $x\geq 0$ 时, $f(x)=-\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$ 单调递增; 当 $x<0$ 时,

$f(x)$ 单调递减,

所以 $f(2m-1)<f(m+3)$,

即 $|2m-1|<|m+3|$,

两边平方整理可得 $3m^2-10m-8<0$, 解得 $-\frac{2}{3}<m<4$.]

课时作业(十六)

1. D [要使 $\log_{(2x-1)}(2-x)$ 有意义,

则 $\begin{cases} 2-x>0, \\ 2x-1>0 \text{ 解得 } \frac{1}{2}<x<2 \text{ 且 } x\neq 1, \\ 2x-1\neq 1, \end{cases}$

所以 x 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2)$. 故选 D.]

2. B [由 $\lg a + \lg b = 0$ 可知, $\frac{1}{a} = b$,

故 $f(x) = a^{-x} = b^x$, 故函数 $f(x) = a^{-x}$ 与函数 $g(x) = \log_b x$ 的单调性相同. 故选 B.]

3. C [由 $\log_2 4 > \log_2 3 > \log_2 2$, 得 $1 < a < 2$,

由 $\log_3 2 < \log_3 3$, 得 $b < 1$,

由 $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$, 可知 $\sqrt{8} > 2$, 即 $c > 2$,

综上得 $c > a > b$.

故选 C.]

4. B [因为 $f(x) = |\log_2 x|$,

若 $0 < a < b$ 且 $f(a) = f(b)$, 则 $-\log_2 a = \log_2 b$, 即 $ab = 1$,

所以 $0 < a < \frac{1}{a}$, 即 $0 < a < 1$,

根据对勾函数的单调性可知, $2a + 3b = 2a + \frac{3}{a} > 5$.

故选 B.]

5. B [由题意可得当 $0 < x < \frac{1}{4}$ 时, $y = \sqrt{x}$ 的图象位于 $y =$

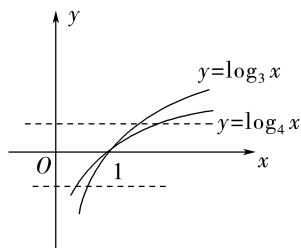
$\log_a x$ 图象的下方, 因为 $y = \sqrt{x}$ 在 $(0, \frac{1}{4})$ 上单调递增,

$$\text{所以 } \begin{cases} 0 < a < 1, \\ \log_a \frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{1}{4}}, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 0 < a < 1, \\ \log_a \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2} = \log_a \sqrt{a}, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} 0 < a < 1, \\ a \geq \frac{1}{16}, \end{cases}$$

可得 $\frac{1}{16} \leq a < 1$. 故选 B.]

6. D [根据函数 $y = \log_3 x$ 与 $y = \log_4 x$ 的图象知,

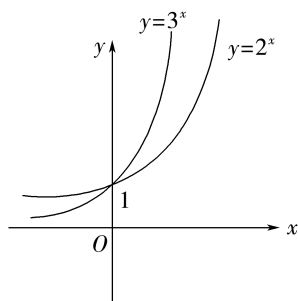


当 $\log_3 a = \log_4 b > 0$ 时, $1 < a < b$, 选项 C 可能;

当 $\log_3 a = \log_4 b < 0$ 时, $0 < b < a < 1$, 选项 A 可能;

设 $\log_3 a = \log_4 b = k$, 则 $a = 3^k, b = 4^k$, 所以 $\sqrt{b} = 2^k$,

由题意, 画出函数 $y = 2^x$ 与 $y = 3^x$ 的图象, 如图所示,



$x < 0$ 时, $3^x < 2^x < 1$, 即 $a < \sqrt{b} < 1$, 选项 B 可能;

$x > 0$ 时, $3^x > 2^x > 1$, 即 $a > \sqrt{b} > 1$, 选项 D 不可能. 故选 D.]

7. ABD [函数 $y = \log_3 x$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 又 $\log_3 m < \log_3 n$, 所以 $0 < m < n$, 所以 A 正确;

函数 $y = \log_{0.3} x$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 又 $\log_{0.3} m < \log_{0.3} n$, 所以 $m > n > 0$, 所以 B 正确;

当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $y = \log_a x$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 又 $\log_a m < \log_a n$, 所以 $m > n > 0$, 所以 C 错误;

因为 $5 < 7$, 且 $\log_m 5 < \log_m 7$, 所以 $y = \log_m x$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 所以 $m > 1$, 所以 D 正确. 故选 ABD.]

8. BCD [由 $\begin{cases} 2-x > 0, \\ x+4 > 0, \end{cases}$ 得 $-4 < x < 2$, 故 $f(x)$ 的定义域为

$(-4, 2)$, A 错误; 由 $-4 < x-1 < 2$, 得 $-3 < x < 3$, 所以 $f(x-1)$ 的定义域为 $(-3, 3)$, 关于原点对称, $f(x-1) = -\log_2(3-x) - \log_2(x+3)$, 令 $g(x) = f(x-1)$, 则 $g(-x) = -\log_2(3+x) - \log_2(-x+3) = g(x)$, 所以函数 $y = f(x-1)$ 是偶函数, B 正确; $f(x) = -\log_2(2-x) - \log_2(x+4) = -\log_2[-(x+1)^2 + 9]$, 易知 $f(x)$ 在 $(-4, -1)$ 上单调递减, 在 $[-1, 2)$ 上单调递增, C 正确; 由 $f(-2-x) = -\log_2(x+4) - \log_2(2-x) = f(x)$ 及 $f(x)$ 的定义域为 $(-4, 2)$, 可得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -1$ 对称, D 正确. 故选 BCD.]

9. ACD [由 $y = \frac{1}{\log_2(2x-1)}$ 可知 $\begin{cases} \log_2(2x-1) \neq 0, \\ 2x-1 > 0, \end{cases}$

$$\text{即 } \begin{cases} 2x-1 \neq 1, \\ x > \frac{1}{2}, \end{cases} \text{ 可得 } \frac{1}{2} < x < 1 \text{ 或 } x > 1, \text{ A 正确;}$$

函数 $y = \log_{\frac{1}{3}} |x+3|$ 的定义域为 $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$,

当 $x > -3$ 时, $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$ 单调递减;

当 $x < -3$ 时, $y = \log_{\frac{1}{3}}(-x-3)$ 单调递增;

故函数的单调递增区间为 $(-\infty, -3)$, B 错误;

显然函数 $u = x-1$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 而函数 $y = \log_a(x-1)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

因此对数函数 $y = \log_a u$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则 $0 < a < 1$,

所以实数 a 的取值范围是 $(0, 1)$, C 正确;

依题意, 由 $\log_2 x \geq \log_{\frac{1}{2}} x$, 得 $\log_2 x \geq -\log_2 x$, 即 $2\log_2 x \geq 0$,

解得 $x \geq 1$,

由 $\log_2 x < \log_{\frac{1}{2}} x$, 解得 $0 < x < 1$,

$$\text{因此 } f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x, & 0 < x < 1, \\ \log_2 x, & x \geq 1, \end{cases}$$

显然函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 值域为 $(0, +\infty)$, 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 值域为 $[0, +\infty)$, 所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, D 正确. 故选 ACD.]

10. $\{x | x > 0, \text{ 且 } x \neq 2\}$ [函数 $f(x) = \lg x + \frac{1}{x-2}$,

$$\text{则 } \begin{cases} x-2 \neq 0, \\ x > 0, \end{cases} \text{ 解得 } x > 0 \text{ 且 } x \neq 2,$$

故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x > 0, \text{ 且 } x \neq 2\}$.]

11. $(\frac{3}{4}, \frac{8}{5})$ [由实数 $a > 0$, 且满足 $5^{3a+2} > 5^{4a+1}$, 根据指数函

数的单调性, 可得 $3a+2 > 4a+1$, 解得 $0 < a < 1$,

所以函数 $y = \log_a x$ 为减函数.

由不等式 $\log_a(3x+2) < \log_a(8-5x)$,

$$\text{可得 } \begin{cases} 3x+2 > 0, \\ 8-5x > 0, \\ 3x+2 > 8-5x, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{3}{4} < x < \frac{8}{5},$$

即不等式的解集为 $(\frac{3}{4}, \frac{8}{5})$.]

12. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ [当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $1 \leq x+1 \leq 3$, 所以 $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$,

因为 $f(x)$ 的值域为 $[0, 2]$,

故 $0 < a < 1$ 且 $\log_a \frac{1}{3} = 2, \log_a 1 = 0$,

所以 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.]

课时作业(十七)

1. D [易知 $\log_{0.1} 3 < 0$, 因为函数 $y = 3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以

$0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{0.3} = 3^{-0.3} < 3^{-0.1}$, 所以 $c < b < a$. 故选 D.]

2. C [$\because \lg 0.2 < \lg 1 = 0, \log_5 6 > \log_5 5 = 1, 0 = \ln 1 < \ln 2 < \ln e = 1, \therefore a < c < b$.

故选 C.]

3. B [由 $c = \log_2 3 > \log_2 2 = 1, 0 < a = e^{-1} < e^0 = 1, b = \ln \frac{1}{2} < \ln 1 = 0$, 所以 $b < a < c$. 故选 B.]

4. C [$\because a = 5^{0.3} > 5^0 = 1$,

$b = (\log_5 a)^4 = 0.3^4 < 0.3^0 = 1$, 且 $b > 0$,

$c = \log_4 (\log_5 a) = \log_4 0.3 < \log_4 1 = 0$,

$\therefore a > b > c$.

故选 C.]

5. B [法一: 设 $2 + \log_2 x = 3 + \log_3 y = 5 + \log_5 z = m$,

令 $m = 2$, 则 $x = 1, y = 3^{-1} = \frac{1}{3}, z = 5^{-3} = \frac{1}{125}$, 此时 $x > y > z$, A 有可能;

令 $m = 5$, 则 $x = 8, y = 9, z = 1$, 此时 $y > x > z$, C 有可能.

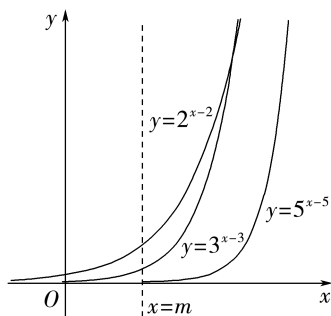
令 $m = 8$, 则 $x = 2^6 = 64, y = 3^5 = 243, z = 5^3 = 125$, 此时 $y > z > x$, D 有可能.

故选 B.

法二: 设 $2 + \log_2 x = 3 + \log_3 y = 5 + \log_5 z = m$, 所以 $x = 2^{m-2}, y = 3^{m-3}, z = 5^{m-5}$,

根据指数函数的单调性, 易知各方程只有唯一的根,

作出函数 $y = 2^{x-2}, y = 3^{x-3}, y = 5^{x-5}$ 的图象, 以上方程的根分别是函数 $y = 2^{x-2}, y = 3^{x-3}, y = 5^{x-5}$ 的图象与直线 $x = m$ 的交点的纵坐标, 如图所示:



易知, 随着 m 的变化可能出现: $x > y > z, y > x > z, y > z > x, z > y > x$.

故选 B.]

6. AC [对于 A, 由 $x > y > 0$, 得 $x^2 + 1 > y^2 + 1$, 又 $f(t) = \log_2 t$ 是增函数, 所以 $\log_2 (x^2 + 1) > \log_2 (y^2 + 1)$, 故 A 正确;

对于 B, 由于 $g(t) = \cos t$ 在 $(0, +\infty)$ 上不单调, 所以 $\cos x$ 与 $\cos y$ 的大小关系无法确定, 故 B 错误;

对于 C, 由 $x > y$, 得 $x+1 > y+1$, 又 $h(t) = t^3$ 是增函数, 所以 $(x+1)^3 > (y+1)^3$, 故 C 正确;

对于 D, 由 $x > y$, 得 $-x+1 < -y+1$, 又 $\varphi(t) = e^t$ 是增函数, 所以 $e^{-x+1} < e^{-y+1}$, 故 D 错误. 故选 AC.]

7. BC [对于 A, $\because 0 < a < 1$, 幂函数 $y = x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

且 $b > c > 1, \therefore b^a > c^a$, 故 A 错误;

对于 B, $\because 0 < a < 1$,

$\therefore$ 函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

又 $\because b > c > 1, \therefore \log_a b < \log_a c < \log_a 1 = 0$,

$\therefore 0 > \frac{1}{\log_a b} > \frac{1}{\log_a c}$, 即 $0 > \log_b a > \log_c a$, 故 B 正确;

对于 C, $\because 0 < a < 1$, 则 $a-1 < 0$,

$\therefore$ 幂函数 $y = x^{a-1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

且 $b > c > 1, \therefore b^{a-1} < c^{a-1}, \therefore cb^a < bc^a$, 故 C 正确;

对于 D, 由选项 B 可知 $0 > \log_b a > \log_c a$,

$\therefore 0 < -\log_b a < -\log_c a$,

$\therefore b > c > 1, \therefore c(-\log_b a) < b(-\log_c a)$,

$\therefore b \log_c a < c \log_b a$, 故 D 错误. 故选 BC.]

8. $a < b < c$ [因为 $a = 2^{-1.1} < 2^{-1} = \frac{1}{2}$,

$b = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{3} = \log_4 3 > \log_4 2 = \frac{1}{2}$,

且 $b = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{3} = \log_4 3 < 1, c = \log_2 3 > \log_2 2 = 1$, 所以 $a < b < c$.]

9. $b > a > c$ [因为 $a = 16^{0.3} = (2^4)^{0.3} = 2^{1.2}, b = 9^{0.6} = (3^2)^{0.6} = 3^{1.2}$, 所以 $3^{1.2} > 2^{1.2} > 2^1 = 2$, 即 $b > a > 2$.

因为 $c = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} = \log_2 3 < \log_2 4 = 2$,

所以 $b > a > c$.]

课时作业(十八)

1. A [$\because$ 前 3 年年产量的增长速度越来越快, $\therefore$ 当 $0 \leq t \leq 3$ 时, 随着 t 的增大, c 的增长速度越来越快, c 关于 t 的函数图象下凹. 又后 3 年年产量保持不变, $\therefore$ 当 $3 < t \leq 6$ 时, c 随着 t 的增大保持固定的增长速度. 故选 A.]

2. B [易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0 \text{ 且 } x \neq \pm 1\}$, 因为

$f(-x) = \frac{1}{(-x-1)\ln|-x|} = -\frac{1}{(x+1)\ln|x|}$, 所以函数 $f(x)$

既不是奇函数也不是偶函数, 故排除 A; 易知当 $x > 1$ 时,

$f(x) > 0$, 故排除 C; 因为 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3\ln 2}, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\ln 2}$, 所

以 $f\left(-\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right)$, 故排除 D. 故选 B.]

3. C [易知 $f(x) = \sin x$ 为奇函数, 由 $g(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2 + 1} =$

$-\frac{4x}{x^2 + 1} = -g(x)$, 得 $g(x)$ 为奇函数, 由题图可知, 所求函数

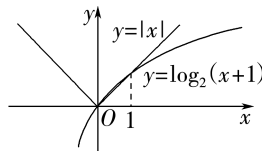
是偶函数, 而 $f(x) \pm g(x)$ 是奇函数, 所以 A, B 不符合题意;

因为当 $x = 0$ 时, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ 无意义, 所以 D 不符合题意. 故

选 C.]

4. B [不等式 $f(x) > 0 \Leftrightarrow \log_2(x+1) > |x|$,

分别画出函数 $y = \log_2(x+1)$ 和 $y = |x|$ 的图象, 如图所示,



由图象可知 $y = \log_2(x+1)$ 和 $y = |x|$ 有两个交点, 分别是 $(0,0)$ 和 $(1,1)$,

所以 $\log_2(x+1) > |x|$ 的解集是 $(0,1)$,

即不等式 $f(x) > 0$ 的解集是 $(0,1)$.]

5. AD [由题意可得 $x \neq -c$,

则 $-c < 0$, 即 $c > 0$, D 正确;

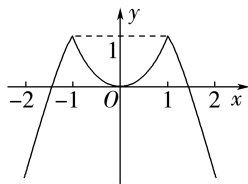
因为 $f(0) = \frac{b}{c^2} > 0$, 所以 $b > 0$, C 错误;

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) < 0$, 且 $f(x) \rightarrow 0$,

故 $a < 0$, A 正确, B 错误.

故选 AD.]

6. ABD [根据函数 $f(x) = 2 - x^2$ 与 $g(x) = x^2$, 画出函数 $F(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ 的图象, 如图.

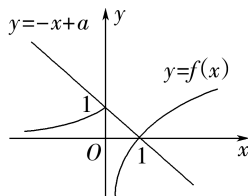


由图象可知, 函数 $F(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ 的图象关于 y 轴对称, 所以 A 项正确;

函数 $F(x)$ 的图象与 x 轴有三个交点, 所以方程 $F(x) = 0$ 有三个解, 所以 B 项正确; 函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递增, 在 $[-1, 0]$ 上单调递减, 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 C 项错误, D 项正确. 故选 ABD.]

7. (3, 1) [由于函数 $y = f(4-x)$ 的图象可以看作 $y = f(x)$ 的图象先关于 y 轴对称, 再向右平移 4 个单位长度得到. 点 $(1, 1)$ 关于 y 轴对称的点为 $(-1, 1)$, 再将此点向右平移 4 个单位长度, 可推出函数 $y = f(4-x)$ 的图象过点 $(3, 1)$.]

8. $(-\infty, 1]$ [分别作出函数 $y = f(x)$ 与 $y = -x + a$ 的大致图象, 如图所示. 由图象可知, 当 $a \leq 1$ 时, 两个函数的图象有两个不同的交点, 故实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.]



9. 解: (1) 将 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度, 即得到 $f(x-1)$ 的图象, 如图 1.

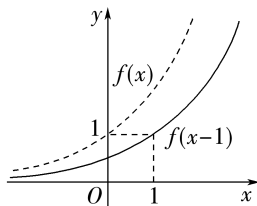


图1

(2) 将 $f(x)$ 的图象在 y 轴右侧的部分, 以 y 轴为对称轴作出 y 轴左侧的图象, 去掉原图象在 y 轴左侧的部分, 即得到 $f(|x|)$ 的图象, 如图 2.

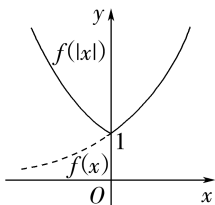


图2

(3) 以 x 轴为对称轴, 画出与 $f(x)$ 图象对称的图象, 即得到 $-f(x)$ 的图象, 如图 3.

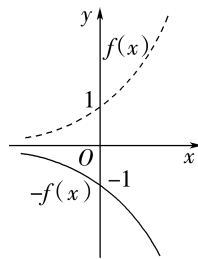


图3

(4) 先将 $f(x)$ 的图象向下平移 1 个单位长度, 再将所得图象在 x 轴下方的部分, 翻折到上方, 即得到 $|f(x) - 1|$ 的图象, 如图 4.

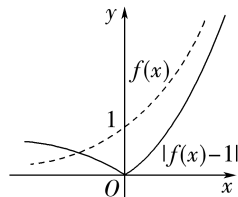


图4

10. 解: (1) 设 $x < 0$, 则 $-x > 0$,

可得 $f(-x) = -(-x)^2 + 2(-x) + 3 = -x^2 - 2x + 3$,

又对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) + f(x) = 0$,

即 $f(x) = -f(-x)$,

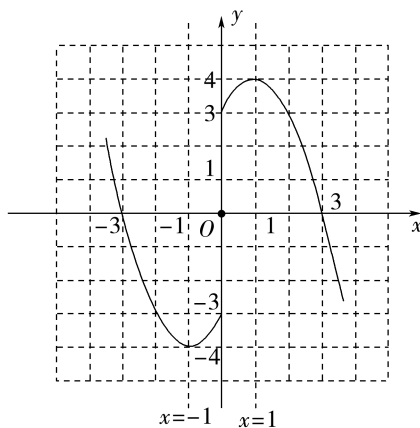
则 $f(x) = x^2 + 2x - 3$,

即当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 + 2x - 3$,

又 $f(0) + f(0) = 0$, 故 $f(0) = 0$,

即 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^2 + 2x - 3, & x < 0. \end{cases}$

(2) 函数 $f(x)$ 的图象如图:



顶点坐标为 $(-1, -4)$, $(1, 4)$, 与坐标轴交点为 $(-3, 0)$, $(3, 0)$.

课时作业(十九)

1. D [$\because f(x)$ 为连续函数, 且 $f(a)f(b) < 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上至少有一个零点,

$\because$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上至多有一个零点,

故函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有且只有一个零点, 即方程 $f(x) = 0$ 在区间 $[a, b]$ 上必有唯一的实数解.]

2. B [函数 $f(x) = \ln x + 2x - 3$ 在 $x > 0$ 时的图象是连续的, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

因为 $f(1)=2-3=-1<0$, $f(2)=\ln 2+4-3=\ln 2+1>0$, 所以 $f(1)f(2)<0$, 由函数零点存在定理可知, 函数的零点在 $(1,2)$ 内.

故选 B.]

3. C [因为 $f(x)=x^3-2x-1$, 所以 $f(1)=-2<0$, $f(2)=3>0$,

取中间值, 有 $\frac{1+2}{2}=1.5$, 而 $f(1.5)=-\frac{5}{8}<0$,

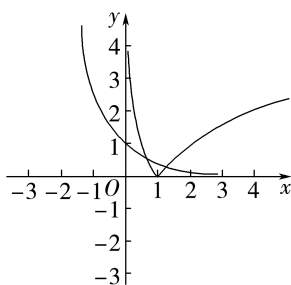
所以下一个有解区间是 $(1.5,2)$.

故选 C.]

4. C [函数 $f(x)=3^x|\log_2 x|-1$ 的零点,

即 $3^x|\log_2 x|-1=0$ 的解, 即 $|\log_2 x|=(\frac{1}{3})^x$ 的解,

转化为 $y=|\log_2 x|$ 与 $y=(\frac{1}{3})^x$ 图象的交点个数, 如图所示,



从函数图象可知, $y=|\log_2 x|$ 与 $y=(\frac{1}{3})^x$ 的图象有 2 个交点, 即函数 $f(x)$ 有 2 个零点. 故选 C.]

5. D [因为 $f(x)=\lg x+t$ 在 $(1,10)$ 内单调递增,

又因为函数 $f(x)$ 在 $(1,10)$ 内有零点,

所以 $\begin{cases} f(1)<0, \\ f(10)>0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} t<0, \\ 1+t>0, \end{cases}$

解得 $-1<t<0$.

即实数 t 的取值范围为 $(-1,0)$. 故选 D.]

6. C [$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+3, & x\leq 0, \\ \cos \frac{\pi x}{2}, & 0<x<4, \end{cases}$

当 $x\leq 0$ 时, 由 $x^2+4x+3=0$, 解得 $x=-3$ 或 $x=-1$;

当 $0<x<4$ 时, 由 $\cos \frac{\pi x}{2}=0$, 解得 $x=1$ 或 $x=3$.

$\therefore$ 函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+3, & x\leq 0, \\ \cos \frac{\pi x}{2}, & 0<x<4 \end{cases}$ 的所有零点之和为 0.

故选 C.]

7. BCD [对于 A, $\because x^2-2x-8=0$ 的解为 $x=-2, x=4$,

$\therefore f(x)$ 在区间 $(-1,3)$ 内没有零点, 故 A 错误;

对于 B, $\because f(x)=(x+1)^{\frac{3}{2}}-2$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递增, 且 $f(-1)=-2<0$, $f(3)=8-2=6>0$,

即 $f(-1)f(3)<0$,

$\therefore f(x)$ 在区间 $(-1,3)$ 内存在唯一零点, 故 B 正确;

对于 C, $\because f(x)=2^{x-1}-1$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 且 $f(-1)=-\frac{3}{4}<0$, $f(3)=3>0$,

即 $f(-1)f(3)<0$,

$\therefore f(x)$ 在区间 $(-1,3)$ 内存在唯一零点, 故 C 正确;

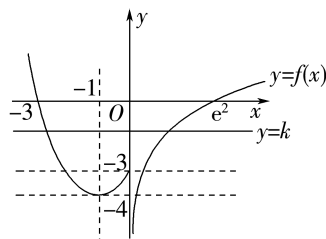
对于 D, $\because f(x)=1-\ln(x+2)$ 在 $(-2,+\infty)$ 上单调递减,

且 $f(-1)=1>0$, $f(3)=1-\ln 5<0$, 即 $f(-1)f(3)<0$,

$\therefore f(x)$ 在区间 $(-1,3)$ 内存在唯一零点, 故 D 正确.

故选 BCD.]

8. AC [作出 $f(x)$ 的图象与直线 $y=k$, 如图.



由图象可知,

当 $k<-4$ 时, $f(x)=k$ 有 1 个解, A 正确;

当 $k=-4$ 或 $k>-3$ 时, $f(x)=k$ 有 2 个解, B 错误;

当 $-4<k\leq-3$ 时, $f(x)=k$ 有 3 个解, C 正确;

$f(x)=k$ 不可能有 4 个解, D 错误. 故选 AC.]

9. BC [对于 A, 令 $f(x)=x^2+2x-8=0$, 解得 $x_1=-4, x_2=2$,

即函数 $f(x)=x^2+2x-8$ 的零点是 -4 和 2 , 故 A 错误;

对于 B, 令 $f(x)=e^x-x-3$, 则 $f(-3)=e^{-3}>0$, $f(0)=-2<0$, $f(10)=e^{10}-13>2^{10}-13>0$, 所以由函数零点存在定理可知 $f(x)=e^x-x-3$ 在区间 $(-3,0)$, $(0,10)$ 内有零点, 即方程 $e^x=3+x$ 在区间 $(-3,0)$, $(0,10)$ 内有解, 故 B 正确;

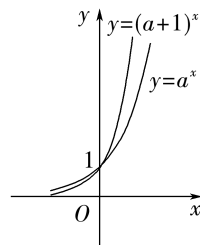
对于 C, 函数 $y=3^x, y=\log_3 x$ 互为反函数, 所以函数 $y=3^x, y=\log_3 x$ 的图象关于 $y=x$ 对称, 故 C 正确;

对于 D, 用二分法求方程 $3^x+3x-8=0$ 在 $(1,2)$ 内的近似解的过程中得到 $f(1)<0, f(1.5)>0, f(1.25)<0$, 则方程的解落在区间 $(1.25,1.5)$ 内, 故 D 错误. 故选 BC.]

10. e [根据题意, $f(x)=\ln x-1$,

令 $f(x)=\ln x-1=0$, 解得 $x=e$, 即函数的零点是 e .]

11. 1 [当 $a>1$ 时, 由指数函数的图象与性质知,



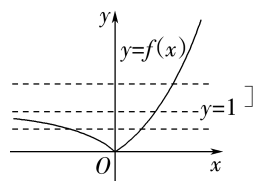
当 $x<0$ 时, $(a+1)^x-a^x<0, x<0$, 可得 $f(x)<0$,

当 $x>0$ 时, $(a+1)^x-a^x>0, x>0$, 可得 $f(x)>0$,

当 $x=0$ 时, $f(x)=(a+1)^x-a^x+x=0$, 则函数 $f(x)$ 只有一个零点.]

12. $[\frac{1}{2}, 1)$ [由 $[f(x)]^2-3tf(x)+2t^2=0$ 得 $f(x)=t$ 或

$f(x)=2t$, 作出函数 $f(x)$ 的图象 (如图所示), 易知当 $t\leq 0$ 时, 不符合题意; 当 $t>0$ 时, $2t>t$, 结合函数 $f(x)$ 的图象知, 要使方程 $[f(x)]^2-3tf(x)+2t^2=0$ 有三个不同的解, 需满足方程 $f(x)=t$ 有两个解, 方程 $f(x)=2t$ 有且只有一个解, 由图象知 $\begin{cases} 0<t<1, \\ 2t\geq 1, \end{cases}$ 所以 $\frac{1}{2}\leq t<1$.



课时作业(二十)

1. D [根据散点图,用光滑的曲线把图中各点依次连起来(图略),由图并结合选项可排除 A,B,C,故选 D.]

2. A [由题图可知函数的图象过点(10,1),

代入函数解析式,可得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-a}=1$,解得 $a=1$,

$$\text{所以 } y = \begin{cases} 0.1t, & 0 \leq t \leq 10, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}-1}, & t > 10, \end{cases}$$

令 $y \leq 0.25$,可得 $0.1t \leq 0.25 (0 \leq t \leq 10)$ 或 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}-1} \leq 0.25$
($t > 10$),

解得 $0 < t \leq 2.5$ 或 $t \geq 30$,

所以如果商场规定 9:30 顾客可以进入商场,那么开始喷洒药物的时间最迟是 9:00.]

3. B [由题意得 $v^2 - Hv^4 = 4H$,

$$\text{故 } H = \frac{v^2}{v^4 + 4} = \frac{1}{v^2 + \frac{4}{v^2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{v^2 \cdot \frac{4}{v^2}}} = \frac{1}{4}, \text{ 当且仅当 } v^2 = 2$$

时,等号成立.

所以该类昆虫的最大跳跃高度为 0.25 米.

故选 B.]

4. BC [由题图 1 可设 y 关于 x 的函数关系为 $y=kx+b, k > 0, b < 0, k$ 为票价,当 $x=0$ 时, $y=b$,则 $-b$ 为固定成本.由题图 2 知,直线向上平移, k 不变,即票价不变, b 变大,则 $-b$ 变小,固定成本减小,故 A 错误,B 正确;由图 3 知,直线与 y 轴的交点不变,直线斜率变大,即 k 变大,票价提高, b 不变,即 $-b$ 不变,固定成本不变,故 C 正确,D 错误.故选 BC.]

5. ABD [由题图可得,函数图象过点(1,2),则 $2=a^1$,即 $a=2$,故 $y=2^t$.

对于 A,浮萍每月的增长率为 $\frac{2^{t+1}-2^t}{2^t} = \frac{2^t(2-1)}{2^t} = 1$,故 A 正确;

对于 B,第 5 个月时,即 $t=5$ 时,浮萍的面积 $y=2^5=32 > 30$,故 B 正确;

对于 C,第二个月比第一个月增加 $y_2 - y_1 = 2^2 - 2^1 = 2$,第三个月比第二个月增加 $y_3 - y_2 = 2^3 - 2^2 = 4$,即 $y_2 - y_1 \neq y_3 - y_2$,故 C 错误;

对于 D,由题意可得 $2=2^{t_1}, 3=2^{t_2}, 6=2^{t_3}$,所以 $t_1 = \log_2 2, t_2 = \log_2 3, t_3 = \log_2 6$,则 $t_1 + t_2 = \log_2 2 + \log_2 3 = \log_2 (2 \times 3) = \log_2 6 = t_3$,故 D 正确.

故选 ABD.]

6. 2 200 [设该工厂生产并销售这款新能源汽车的年利润为 $f(x)$ 万元,由题意可知,

$$f(x) = \begin{cases} 15x - \left(\frac{1}{80}x^2 + \frac{9}{2}x\right) - 100, & 0 \leq x < 400, \\ 15x - \left(16x + \frac{360\,000}{x} - 3\,500\right) - 100, & x \geq 400, \end{cases} \quad x \in \mathbf{N},$$

$$\text{即 } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{80}x^2 + \frac{21}{2}x - 100, & 0 \leq x < 400, \\ -x - \frac{360\,000}{x} + 3\,400, & x \geq 400, \end{cases} \quad x \in \mathbf{N},$$

当 $0 \leq x < 400$ 时, $f(x) < f(400) = 2\,100$;

当 $x \geq 400$ 时, $f(x) = -\left(x + \frac{360\,000}{x}\right) + 3\,400$

$\leq -2\sqrt{360\,000} + 3\,400 = 2\,200$,

当且仅当 $x=600$ 时, $f(x)$ 取得最大值 2 200.

综上,该工厂生产并销售这款新能源汽车的最高年利润为 2 200 万元.]

7. 解:(1)由题意知 $t=t_0 e^{\frac{N}{N_0}-1}$ (其中 N_0, t_0 均为常数),

$$\text{则 } \ln t = \ln t_0 + \frac{N}{N_0} - 1,$$

因为当 $N=300$ 时, $t=4e^2$;当 $N=400$ 时, $t=4e^3$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \ln 4e^2 = \ln t_0 + \frac{300}{N_0} - 1, \\ \ln 4e^3 = \ln t_0 + \frac{400}{N_0} - 1, \end{cases}$$

两式相减可得 $\ln \frac{4e^2}{4e^3} = \frac{300-400}{N_0}$,故 $N_0 = \frac{-100}{-\ln e} = 100$,

$$\text{故 } t_0 = \frac{4e^2}{e^{\left(\frac{300}{100}-1\right)}} = \frac{4e^2}{e^2} = 4.$$

(2)由(1)可知 $t=4e^{\frac{N}{100}-1}$,当 $N=600$ 时, $t=4e^5$,

故所需的处理时间为 $4e^5$ 秒.

$$\begin{aligned} (3) \text{总处理时间 } t &= 4e^{\frac{N_1}{100}-1} + 4e^{\frac{N_2}{100}-1} \\ &\geq 8\sqrt{e^{\frac{N_1}{100}-1} \times e^{\frac{N_2}{100}-1}} = 8\sqrt{e^{\frac{N_1+N_2}{100}-2}} \\ &= 8\sqrt{e^4} = 8e^2, \end{aligned}$$

当且仅当 $N_1=N_2=300$ 时取等号,

故所需的总处理时间的最小值为 $8e^2$ 秒.

阶段检测(三)

1. D [由函数 $f(x)$ 有意义,得 $\begin{cases} 2x-x^2 \geq 0, \\ 2x-1 > 0, \\ 2x-1 \neq 1, \end{cases}$

解得 $\frac{1}{2} < x < 1$ 或 $1 < x \leq 2$.所以函数 $f(x)$ 的定义域是

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2].$$

故选 D.]

2. C [因为函数 $f(x) = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,所以 $a > 1$,①

$$\text{因为 } f(9) = \frac{1}{f(3)} - 1, \text{ 所以 } \log_a 9 = \frac{1}{\log_a 3} - 1, \text{ 即 } 2\log_a 3 = \frac{1}{\log_a 3} - 1,$$

$$\therefore \log_a 3 = \frac{1}{2} \text{ 或 } \log_a 3 = -1, \therefore a = 9 \text{ 或 } a = \frac{1}{3}, \text{ ②}$$

所以由①②得 $a=9$.

故选 C.]

3. D [因为 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^m$ 是幂函数,

所以 $m^2 - m - 1 = 1$,解得 $m = -1$ 或 $m = 2$,

因为 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $m < 0$,

所以 $m = -1$,故 A,B 错误;

所以 $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$,定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

$$\text{又 } f(-x) = \frac{1}{-x} = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数, 故 D 正确, C 错误.

故选 D.]

4. A [根据题意, 由函数 $f(x) = -\ln(x+b)$ 的图象, $0 < f(0) = -\ln b < 1$,

$$\text{即 } -1 < \ln b < 0, \text{ 解得 } \frac{1}{e} < b < 1,$$

故函数 $g(x) = e^x + b$ 的图象由 $y = e^x$ 的图象向上平移 b 个单位长度得到,

分析选项, A 选项符合.

故选 A.]

5. D [由题意可得, $M \approx 3^{361}, N \approx 10^{80}$,

根据对数函数性质有 $3 = 10^{\lg 3} \approx 10^{0.48}$,

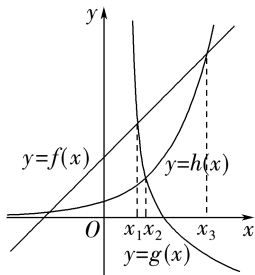
$$\therefore M \approx 3^{361} \approx (10^{0.48})^{361} \approx 10^{173},$$

$$\therefore \frac{M}{N} \approx \frac{10^{173}}{10^{80}} = 10^{93}. \text{ 故选 D.}]$$

6. C [令 $a-2 = \left(\frac{1}{2}\right)^b + 1 = \log_2 c + 1 = x (x > 1)$,

$$\text{则 } a = x+2, b = \log_{\frac{1}{2}}(x-1), c = 2^{x-1} (x > 1),$$

在同一平面直角坐标系中作出函数 $f(x) = x+2, g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1), h(x) = 2^{x-1}$ 的图象, 如图所示.



当 $1 < x < x_1$ 时, $g(x) > f(x) > h(x)$, 即 $b > a > c$, 故 A 正确;

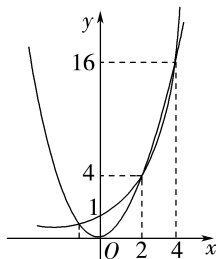
当 $x_1 < x < x_2$ 时, $f(x) > g(x) > h(x)$, 即 $a > b > c$, 故 B 正确;

当 $x_2 < x < x_3$ 时, $f(x) > h(x) > g(x)$, 即 $a > c > b$, 故 C 错误;

当 $x > x_3$ 时, $h(x) > f(x) > g(x)$, 即 $c > a > b$, 故 D 正确.

故选 C.]

7. BC [函数 $f(x) = x^2$ 与 $g(x) = 2^x$ 的图象如图,



由图可知, $f(x)$ 与 $g(x)$ 有三个交点, 故 A 正确, B 错误;

$\exists x_0 = 4 > 0$, 当 $x > x_0$ 时, $g(x)$ 恒在 $f(x)$ 的上方, 故 C 错误, D 正确.

故选 BC.]

8. ABC [由 $2^x - 1 > 0$, 得 $x > 0$, $\therefore f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $\therefore$ A 正确;

$$f(x) = \ln \frac{2^x + 1}{2^x - 1} = \ln \left(1 + \frac{2}{2^x - 1} \right), 1 + \frac{2}{2^x - 1} > 1,$$

$$\therefore \ln \left(1 + \frac{2}{2^x - 1} \right) > \ln 1 = 0,$$

$\therefore f(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$, $\therefore$ B 正确;

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{2}{2^x - 1} \right), \text{ 当 } x \text{ 增大时, } 2^x - 1 \text{ 增大, } \frac{2}{2^x - 1} \text{ 减小,}$$

即 $f(x)$ 减小, $\therefore f(x)$ 是减函数, $\therefore$ C 正确;

$f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 不关于原点对称, $\therefore f(x)$ 不是奇函数, $\therefore$ D 错误.

故选 ABC.]

$$9. -3 \quad \left[\left(-\frac{1}{27} \right)^{-\frac{1}{3}} + \log_{36} 18 + \log_9 3 \times \log_6 2 - \left(-\frac{1}{8} \right)^0 = \right.$$

$$\left. (-27)^{\frac{1}{3}} + \log_{6^2} 18 + \log_{3^2} 3 \times \log_6 2 - 1 = -3 + \frac{1}{2} \log_6 18 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \log_6 2 - 1 = -4 + \frac{1}{2} \log_6 36 = -4 + \frac{1}{2} \times 2 = -3. \right]$$

$$10. \left(0, \frac{1}{16} \right] \quad \left[y = \left(\frac{1}{4} \right)^{x^2 + 2x + 3}, \right.$$

$$\text{设 } g(x) = x^2 + 2x + 3,$$

$$\text{则 } g(x) = (x+1)^2 + 2 \geq 2,$$

$$\text{故 } 0 < y = \left(\frac{1}{4} \right)^{x^2 + 2x + 3} \leq \left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1}{16},$$

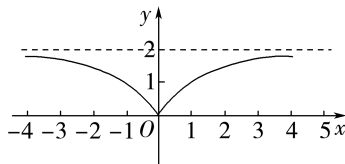
所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left(0, \frac{1}{16} \right]$.]

11. 解: (1) 因为函数 $y = a \left(\frac{1}{2} \right)^{|x|} + b$ 的图象过原点,

$$\text{所以 } 0 = a + b,$$

由函数的图象无限接近直线 $y=2$ 但又不与该直线相交, 得 $b=2$, 又 $a+b=0$, 所以 $a=-2$,

$$\text{则 } y = -2 \left(\frac{1}{2} \right)^{|x|} + 2, \text{ 其图象如图.}$$



(2) 由图知, $y = -2 \left(\frac{1}{2} \right)^{|x|} + 2$ 是偶函数, 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.

12. 解: (1) 若函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

$$\text{则 } f(0) = 0,$$

$$\therefore \log_2(1+a) = 0, \therefore a = 0.$$

经检验, 当 $a=0$ 时, $f(x) = -x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

$\therefore a$ 的值为 0.

(2) 由已知得函数 $f(x)$ 是减函数, 故 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值是 $f(0) = \log_2(1+a)$, 最小值是 $f(1) = \log_2 \left(\frac{1}{2} + a \right)$.

$$\log_2 \left(\frac{1}{2} + a \right).$$

$$\text{由题设得 } \log_2(1+a) - \log_2 \left(\frac{1}{2} + a \right) \geq 2,$$

$$\text{则 } \log_2(1+a) \geq \log_2(4a+2).$$

$$\therefore \begin{cases} 1+a \geq 4a+2, \\ 4a+2 > 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } -\frac{1}{2} < a \leq -\frac{1}{3}.$$

故实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \right]$.

课时作业(二十一)

1. C [由 $h = \frac{1}{3}t^3 + t^2$, 得 $h' = t^2 + 2t$.

当 $t = t_0$ 时, $h' = t_0^2 + 2t_0 = 3$, 解得 $t_0 = 1$ ($t_0 = -3$ 舍去).

故当 $t = t_0 + 1 = 2$ 时, 液体上升高度的瞬时变化率为 $2^2 + 2 \times 2 = 8$ (cm/s). 故选 C.]

2. B [因为 $f'(x) = 2f'(1) + \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

令 $x = 1$, 得 $f'(1) = 2f'(1) + \frac{1}{2}$,

解得 $f'(1) = -\frac{1}{2}$. 故选 B.]

3. C [由题意可知 $y' = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$, 则曲线 $y =$

$\frac{e^x}{x+1}$ 在点 $(1, \frac{e}{2})$ 处的切线斜率 $k = y'|_{x=1} = \frac{e}{4}$, 所以曲线

$y = \frac{e^x}{x+1}$ 在点 $(1, \frac{e}{2})$ 处的切线方程为 $y - \frac{e}{2} = \frac{e}{4}(x - 1)$,

即 $y = \frac{e}{4}x + \frac{e}{4}$, 故选 C.]

4. A [由题图可知, 函数在 $x = a$ 处的切线的斜率 $f'(a)$ 为负;
函数在 $x = b$ 处的切线的斜率 $f'(b)$ 为正;

函数在 $x = c$ 处的切线的斜率 $f'(c)$ 为正, 且在 $x = c$ 处的切线比在 $x = b$ 处的切线更“陡”, 即 $f'(c) > f'(b)$,

因为 $f'(a) < 0, 0 < f'(b) < f'(c)$,

所以 $f'(a) < f'(b) < f'(c)$.

故选 A.]

5. D [因为曲线 $y = 2ae^x + x$ 在 $x = 0$ 处的切线斜率为 2,

由 $y' = 2ae^x + 1$, 得曲线 $y = 2ae^x + x$ 在 $x = 0$ 处的切线斜率为 $2a + 1 = 2$, 得 $a = \frac{1}{2}$.

故选 D.]

6. D [设过点 $P(m, 0)$ 的直线与曲线 $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ 切于点

$Q(t, \frac{t+1}{e^t})$, 由 $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$, 可得 $f'(x) = -\frac{x}{e^x}$, 所以切线

PQ 的斜率 $k = -\frac{t}{e^t} = \frac{\frac{t+1}{e^t} - 0}{t - m}$, 整理得 $t^2 + (1-m)t + 1 = 0$,

因为切线有 2 条, 所以切点有 2 个, 即方程 $t^2 + (1-m)t + 1 = 0$ 有 2 个不等实根,

则 $\Delta = (1-m)^2 - 4 > 0$, 解得 $m > 3$ 或 $m < -1$,

所以实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$. 故选 D.]

7. ABC [当 $t \in [0, 4]$ 时, $s(t) = \frac{1}{2}t^2$, 则 $s(4) = 8, s(2) = 2$, 所

以平均速度为 $\frac{s(4) - s(2)}{4 - 2} = 3$ (m/s), A 正确;

当 $t \in [0, 4]$ 时, $s'(t) = t$, 则 $s'(3) = 3$, 所以物体在 $t = 3$ s 这个时刻的瞬时速度为 3 m/s, B 正确;

该物体在 0 s 到 8 s 这段时间内的平均速度为 $\frac{s(8) - s(0)}{8 - 0} =$

$\frac{8 - 0}{8 - 0} = 1$ (m/s), C 正确;

由 $t \in (4, 8]$ 时, $s(t) = 8$, 则 $s'(t) = 0$,

故 $s'(5) = 0$, D 错误.

故选 ABC.]

8. AC [由题意知 $f'(x) = e^x$. 对于 A, 令 $f'(x) = e^x = 1$, 得 $x = 0$, 所以曲线 $y = f(x)$ 的切线斜率可以是 1, 故 A 正确; 对于 B, 令 $f'(x) = e^x = -1$, 无解, 所以曲线 $y = f(x)$ 的切线斜率不可以是 -1, 故 B 错误; 对于 C, 设切点为 (x_0, e^{x_0}) , 由 $f'(x) = e^x$, 得切线方程为 $y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0)$, 又切线过点 $(0, 1)$, 所以 $1 - e^{x_0} = -e^{x_0} \cdot x_0$, 则 $e^{x_0} = \frac{1}{1 - x_0}$, 易知 $e^{x_0} =$

$\frac{1}{1 - x_0}$ 有且仅有一解为 $x_0 = 0$, 所以切线方程为 $y - 1 = x$, 即 $y = x + 1$, 所以过点 $(0, 1)$ 且与曲线 $y = f(x)$ 相切的直线有且只有 1 条, 故 C 正确; 对于 D, 设切点为 (x_0, e^{x_0}) , 则切线方程为 $y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0)$, 因为点 $(0, 0)$ 在切线上, 所以 $e^{x_0} = x_0 e^{x_0}$, 解得 $x_0 = 1$, 所以过点 $(0, 0)$ 且与曲线 $y = f(x)$ 相切的直线有且只有 1 条, 故 D 错误.]

9. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ [由题可得, $f'(x) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 1$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号,

由 α 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角, 得 $\tan \alpha \geq 1$, 则 $\frac{\pi}{4} \leq$

$\alpha < \frac{\pi}{2}$, 所以 α 的取值范围为 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.]

10. 2 [$\because \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{4 + 4}{4} = 2, f'(x) = 3x^2 - 2,$

令 $3x^2 - 2 = 2$, 解得 $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \in [-2, 2]$ 或 $x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \in$

$[-2, 2]$,

$\therefore f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的“拉格朗日中值点”的个数为 2.]

11. 解: (1) 由 $y = x^2 + \frac{1}{x} + \sqrt{x}$, 得 $y' = 2x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(2) 由 $y = x \sin x - \sqrt{x} \ln x$,

得 $y' = (x \sin x)' - (\sqrt{x} \ln x)'$

$= \sin x + x \cos x - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \frac{\sqrt{x}}{x} \right)$

$= \sin x + x \cos x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x - \frac{\sqrt{x}}{x}$.

(3) 由 $y = \frac{\sin x \ln x}{x}$,

得 $y' = \frac{(\cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}) \cdot x - \sin x \ln x \cdot 1}{x^2}$

$= \frac{x \cos x \ln x + \sin x - \sin x \ln x}{x^2}$.

(4) 由 $y = \sqrt{x}(x - 1) \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = \sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}$,

得 $y' = \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$.

(5) 由 $y = e^x \tan x = \frac{e^x \sin x}{\cos x}$, 得

$y' = \frac{(e^x \sin x + e^x \cos x) \cdot \cos x - (e^x \sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$= \frac{e^x \sin x \cos x + e^x \cos^2 x + e^x \sin^2 x}{\cos^2 x}$

$= \frac{e^x \sin x \cos x + e^x}{\cos^2 x} = e^x \left(\tan x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)$.

(6) 由 $y = \frac{x^2-1}{x+\ln x}$,

得 $y' = \frac{2x(x+\ln x) - (x^2-1)(1+\frac{1}{x})}{(x+\ln x)^2}$
 $= \frac{x^3+2x^2\ln x - x^2+x+1}{x(x+\ln x)^2}$.

(7) 由 $y = x \sin x + e^x \ln x - 2$,

得 $y' = \sin x + x \cos x + e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$.

(8) 由 $y = \frac{\sqrt{x}-x^2}{x \ln x}$,

得 $y' = \frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}}-2x) \cdot x \ln x - (\sqrt{x}-x^2)(\ln x+1)}{(x \ln x)^2}$
 $= \frac{x^2-x^2 \ln x - \frac{\sqrt{x}}{2} \ln x - \sqrt{x}}{(x \ln x)^2}$.

(9) 由 $y = (3x+2)^3$, 得 $y' = 3 \times (3x+2)^2 \times 3 = 9(3x+2)^2$.

(10) 由 $y = \sin 2x$, 得 $y' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2 \cos 2x$.

(11) 由 $y = \sqrt{4x-6}$,

得 $y' = \frac{1}{2\sqrt{4x-6}} \cdot (4x-6)'$
 $= \frac{2}{\sqrt{4x-6}} = \frac{\sqrt{4x-6}}{2x-3}$.

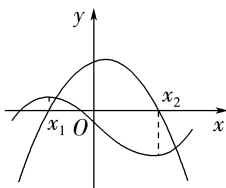
(12) 由 $y = \ln(4x+5)$, 得 $y' = \frac{1}{4x+5} \cdot (4x+5)' = \frac{4}{4x+5}$.

课时作业(二十二)

1. D [因为 $f'(x) = -\sin x - 1 < 0$ 在 $(0, \pi)$ 内恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内单调递减, 故选 D.]

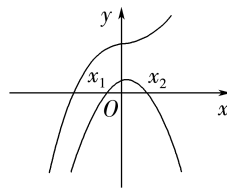
2. D [由题意可得函数的定义域为 $(0, +\infty)$, 导函数 $f'(x) = 2x - \frac{4}{x} = \frac{2(x^2-2)}{x}$, 令 $f'(x) < 0$, 可得 $0 < x < \sqrt{2}$, 因此 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, \sqrt{2})$. 故选 D.]

3. C [根据题意, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$, 则其导数 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, 则 $f'(x)$ 为二次函数, 其图象为抛物线, 设 $f'(x)$ 与 x 轴的两个交点为 $x_1, x_2, x_1 < x_2$. 依次分析选项: 对于 A, 如图所示:



当 $x < x_1$ 或 $x > x_2$ 时, $f'(x) < 0$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, x_1), (x_2, +\infty)$ 上均单调递减, 与 $f(x)$ 的图象不符合, A 错误; 对于 B, 由选项图可知, $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 与 $f(x)$ 的图象不符合, B 错误;

对于 C, 由选项图可知, $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 与 $f(x)$ 的图象符合, C 正确; 对于 D, 如图所示:



当 $x < x_1$ 或 $x > x_2$ 时, $f'(x) < 0$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, x_1), (x_2, +\infty)$ 上均单调递减, 与 $f(x)$ 的图象不符合, D 错误. 故选 C.]

4. D [由 $f(x) = 2x^2 - x^3$, 得 $f'(x) = 4x - 3x^2 = x(4-3x)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = \frac{4}{3}$, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如表所示.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{4}{3})$	$\frac{4}{3}$	$(\frac{4}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	单调递减		单调递增		单调递减

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty, 0)$ 和 $(\frac{4}{3}, +\infty)$.]

5. AB [对于选项 A, 导函数 $y' = 3x^2 + 1 > 0, y = x^3 + x - 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 因此选项 A 正确; 对于选项 B, 导函数 $y' = \cos x - 1 \leq 0, y = \sin x - x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 因此选项 B 正确; 对于选项 C, 导函数 $y' = (x+1)e^x$, 令 $y' < 0 \Rightarrow x < -1$, 令 $y' > 0 \Rightarrow x > -1$, 因此函数 $y = xe^x + 1$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 因此选项 C 错误; 对于选项 D, 导函数 $y' = e^x - 1$, 令 $y' < 0 \Rightarrow x < 0$, 令 $y' > 0 \Rightarrow x > 0$, $y = e^x - x$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 D 错误. 故选 AB.]

6. ACD [依题意知, 函数 $g(x) = xf(x)$ 为定义域上的增函数, 对于 A, $g(x) = xe^x, g'(x) = (x+1)e^x$, 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $g'(x) < 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 故 A 中函数不是“F 函数”; 对于 B, $g(x) = x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 故 B 中函数为“F 函数”; 对于 C, $g(x) = x \ln x, x > 0, g'(x) = 1 + \ln x$, 当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $g'(x) < 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 内单调递减, 故 C 中函数不是“F 函数”; 对于 D, $g(x) = x \sin x, g'(x) = \sin x + x \cos x$, 当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 时, $g'(x) < 0, \therefore g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 内单调递减, 故 D 中函数不是“F 函数”. 故选 ACD.]

7. $(-\infty, -1), (3, +\infty)$ $(-1, 3)$ [因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$,
令 $f'(x) > 0 \Rightarrow x < -1$ 或 $x > 3$;
令 $f'(x) < 0 \Rightarrow -1 < x < 3$;
所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1), (3, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-1, 3)$.]

8. $\frac{1}{3}x^3 - 4x$ (答案不唯一) [因为 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -2), (2, +\infty)$ 上单调递增,
所以当 $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.
又 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 为偶函数,
所以令 $f'(x) = x^2 - 4$, 满足题意,
所以 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$, 答案不唯一.]

9. 证明: 由题意知, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} - e^{1-x} = \frac{e^{x-1} - x}{xe^{x-1}}$.

令 $g(x) = e^{x-1} - x (x > 0)$, 则 $g'(x) = e^{x-1} - 1$,
由 $g'(x) = 0$, 可得 $x = 1$.

$\therefore$ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,
当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,
 $\therefore g(x)_{\min} = g(1) = 0$, 即 $g(x) \geq 0$,
 $\therefore f'(x) \geq 0$,
则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

10. 解: $f(x) = ax^2 - (a-2)x - \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,
 $f'(x) = 2ax - (a-2) - \frac{1}{x} = \frac{(ax+1)(2x-1)}{x}$.

当 $a \geq 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 得 $x > \frac{1}{2}$,

由 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{2}$,

函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 内单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增;

当 $-2 < a < 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 得 $\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{a}$,

由 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{2}$ 或 $x > -\frac{1}{a}$,

$f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{a})$ 内单调递增;

当 $a = -2$ 时, $f'(x) \leq 0$, 且当 $x = \frac{1}{2}$ 时取等号, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a < -2$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 得 $-\frac{1}{a} < x < \frac{1}{2}$, 由 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < -\frac{1}{a}$ 或 $x > \frac{1}{2}$,

函数 $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$, $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\frac{1}{a}, \frac{1}{2})$ 内单调递增.

综上, 当 $a \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 内单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a = -2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $-2 < a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{a})$ 内单调递增;

当 $a < -2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$, $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\frac{1}{a}, \frac{1}{2})$ 内单调递增.

课时作业(二十三)

1. D [$f'(x) = 2 - \cos x$, 因为 $\cos x \in [-1, 1]$, 所以 $f'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 因为 $2.7 < e < \pi$, 所以 $f(2.7) < f(e) < f(\pi)$. 故选 D.]

2. C [由 $(x-1)f'(x) \geq 0$, 得 $\begin{cases} x \geq 1, \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \leq 1, \\ f'(x) \leq 0 \end{cases}$. ① 函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减, $f(0) > f(1)$; 函数 $y = f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, $f(2) > f(1)$, 所以 $f(0) + f(2) > 2f(1)$. ② 若函数 $y = f(x)$ 为常数函数, 则 $f(0) + f(2) = 2f(1)$. 综合①②得 $f(0) + f(2) \geq 2f(1)$. 故选 C.]

3. C [由题意, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = 3ax^2 - 6x + 1$, 要使函数 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + x + 1$ 恰有三个单调区间, 则 $f'(x) = 0$ 有两个不相等的实数根,

$\therefore \begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta = 36 - 12a > 0, \end{cases}$ 得 $a < 3$ 且 $a \neq 0$, 故选 C.]

4. D [$f'(x) = 3x^2 - a$, 若 $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上单调递增, 则 $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 即 $a \leq 3x^2$ 恒成立, 当 $x \in [2, 3]$ 时, $12 \leq 3x^2 \leq 27$, 所以只需 $a \leq 12$ 即可. 故选 D.]

5. D [令 $g(x) = f(x) - 3x$,
因为 $f'(x) > 3$,
所以 $g'(x) = f'(x) - 3 > 0$,
所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,
因为 $f(2) = 6$, 所以 $g(2) = f(2) - 6 = 0$,
由 $f(x) > 3x$ 可得 $f(x) - 3x > 0$,
即 $g(x) > g(2)$, 所以 $x > 2$.
故选 D.]

6. A [根据题意, 由函数 $f(x)$ 的图象可知, 在区间 $(-\infty, -1)$ 上, $f(x)$ 单调递减, 必有 $f'(x) < 0$,
在区间 $(-1, 2)$ 内, $f(x)$ 单调递增, 必有 $f'(x) > 0$,
在区间 $(2, 5)$ 内, $f(x)$ 单调递减, 必有 $f'(x) < 0$,
在区间 $(5, +\infty)$ 上, $f(x)$ 单调递增, 必有 $f'(x) > 0$.

若 $x \cdot f'(x) < 0$, 即 $\begin{cases} x > 0, \\ f'(x) < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < 0, \\ f'(x) > 0 \end{cases}$,

解得 $2 < x < 5$ 或 $-1 < x < 0$,

即不等式的解集为 $(-1, 0) \cup (2, 5)$.

故选 A.]

7. ABD [$f'(x) = x - \frac{9}{x} = \frac{x^2 - 9}{x} (x > 0)$,

令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 3$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 3$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(3, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, 3)$,

因为函数 $f(x)$ 在区间 $(m-1, m+1)$ 内单调,

所以 $\begin{cases} m-1 \geq 0, \\ m+1 \leq 3 \end{cases}$ 或 $m-1 \geq 3$,

解得 $1 \leq m \leq 2$ 或 $m \geq 4$.]

8. BCD [因为 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e^x} (x > 0)$, 所以 $f'(x) =$

$$\frac{e^x + x^2 - x}{xe^x} = \frac{e^x + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{xe^x},$$

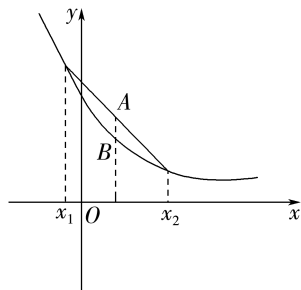
又 $x \in (0, +\infty)$ 时, $e^x > 1$, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$,

所以 $f'(x) > 0$,

即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

故 $f\left(\frac{7}{3}\right) > f(2) > f\left(\frac{3}{2}\right)$, 即 $c > b > a$, 故选 BCD.]

9. BD [由题图可知, 导函数 $f'(x)$ 的图象在 x 轴下方, 即 $f'(x) < 0$, 故函数 $f(x)$ 为减函数, 并且递减的速度是先快后慢, 所以 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



A 中, $f(x) < 0$ 恒成立, 没有依据, 故 A 不正确;

B 表示 $(x_1 - x_2)$ 与 $[f(x_1) - f(x_2)]$ 异号, 即 $f(x)$ 为减函数, 故 B 正确;

C, D 中不等式的左边为 x_1, x_2 的平均值对应的函数值, 即图中点 B 的纵坐标,

右边为 x_1, x_2 对应的函数值的平均值, 即图中点 A 的纵坐标, 显然左边的值小于右边的值, 故 C 不正确, D 正确. 故选 BD.]

10. $\left[\frac{13}{3}, +\infty\right)$ [由已知得, $f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2} - \frac{a}{x}$,

题意等价于 $1 + \frac{4}{x^2} - \frac{a}{x} \leq 0$ 在 $(2, 3)$ 内恒成立, 即 $a \geq x + \frac{4}{x}$ 在 $(2, 3)$ 内恒成立.

设 $h(x) = x + \frac{4}{x} (x > 0)$,

由对勾函数性质知, $h(x)$ 在 $(2, 3)$ 内单调递增,

所以 $h(x) < h(3) = \frac{13}{3}$,

故得 $a \geq \frac{13}{3}$,

即实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{13}{3}, +\infty\right)$.]

11. $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ [当 $x \geq 0$ 时, 导函数 $f'(x) =$

$e^x + 2x + \sin x$,

因为 $x \geq 0$, 因此 $e^x \geq 1$, 因此导函数 $f'(x) = e^x + 2x + \sin x > 0$,

因此当 $x \geq 0$ 时, 函数 $f(x) = e^x + x^2 - \cos x$ 单调递增.

又 $f(x)$ 为偶函数, 因此当 $x < 0$ 时, 函数单调递减, 因此 $f(x-3) - f(2x-1) < 0$, 等价于 $f(x-3) < f(2x-1)$,

等价于 $|x-3| < |2x-1|$, 平方化简可得 $3x^2 + 2x - 8 > 0$,

解得 $x > \frac{4}{3}$ 或 $x < -2$, 因此解集为 $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$.]

12. $(0, 1)$ [∵ 函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\ln x (x > 0)$,

$$\therefore f'(x) = -x - 3 + \frac{4}{x},$$

∵ 函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\ln x$ 在 $(t, t+1)$ 内不单调,

∴ $f'(x) = -x - 3 + \frac{4}{x}$ 在 $(t, t+1)$ 内有变号零点,

$$\therefore \frac{x^2 + 3x - 4}{x} = 0 \text{ 在 } (t, t+1) \text{ 内有解,}$$

$$\therefore x^2 + 3x - 4 = 0 \text{ 在 } (t, t+1) \text{ 内有解,}$$

由 $x^2 + 3x - 4 = 0$ 得 $x = 1$ 或 $x = -4$ (舍去).

∴ $1 \in (t, t+1)$, ∴ $t \in (0, 1)$,

故实数 t 的取值范围是 $(0, 1)$.]

课时作业(二十四)

1. B [由题意, 设 $g(x) = xf(x)$, 则 $g'(x) = xf'(x) + f(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

又 $a > b$, 所以 $g(a) > g(b)$,

即 $af(a) > bf(b)$. 故选 B.]

2. A [设 $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, x > 0$,

$$\text{则 } f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3},$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \sqrt{e}$,

则 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{e})$ 内单调递增, 在 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 上单调递减,

$b = f(\sqrt{5}), c = f(\sqrt{6})$, 则 $b > c$,

$$\text{又 } a - b = \frac{1}{6} - \frac{\ln 5}{10} = \frac{5 - 3\ln 5}{30} = \frac{\ln e^5 - \ln 125}{30} > 0, \text{ 得 } a > b,$$

所以 $c < b < a$, 故选 A.]

3. B [根据题意得 $f'(x) - f(x) > 0$, 构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$,

可得 $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

$$\text{则 } \frac{f(2\ 024)}{e^{2\ 024}} < \frac{f(2\ 025)}{e^{2\ 025}}, \text{ 两边同乘 } e^{2\ 025},$$

$$\text{即 } ef(2\ 024) < f(2\ 025).$$

故选 B.]

4. A [由 $f'(x)\tan x + f(x) > 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\text{得 } f'(x)\sin x + f(x)\cos x > 0.$$

构造函数 $F(x) = f(x)\sin x$, 则 $F'(x) > 0$, 故 $F(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增,

$$\text{有 } F\left(\frac{\pi}{3}\right) > F\left(\frac{\pi}{4}\right), \text{ 即 } \frac{\sqrt{3}}{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{即 } \sqrt{6}f\left(\frac{\pi}{3}\right) > 2f\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

故选 A.]

5. A [因为当 $0 < x_1 < x_2 \leq 1$ 时, $\frac{f(x_1)}{x_2} < \frac{f(x_2)}{x_1}$,

$$\text{所以 } x_1 f(x_1) < x_2 f(x_2),$$

令 $g(x) = xf(x) = e^x - ax$, 则 $g(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增,

所以 $g'(x) = e^x - a \geq 0$ 在 $(0, 1]$ 上恒成立,

所以 $a \leq e^x$ 在 $(0, 1]$ 上恒成立,

因为 $1 < e^x \leq e$, 所以 $a \leq 1$,

故 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

故选 A.]

6. A [令函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x \in (0, +\infty)$,

则导函数 $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$,

由于 $xf'(x) - f(x) < 0$, 因此导函数 $g'(x) < 0$,

因此函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

由于 $f(3) = 0$, 因此 $g(3) = 0$,

因此当 $0 < x < 3$ 时, 函数 $g(x) > 0$,

即 $f(x) > 0$;

当 $x > 3$ 时, 函数 $g(x) < 0$, 即 $f(x) < 0$,

由 $(x-1)f(x) > 0$, 可得 $\begin{cases} x-1 > 0, \\ f(x) > 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-1 < 0, \\ f(x) < 0, \end{cases}$ 解得 $1 < x < 3$, 综上可得 $(x-1)f(x) > 0$ 的解集为 $(1, 3)$.

故选 A.]

7. AC [令函数 $g(x) = \ln x \cdot f(x)$,

则 $g'(x) = \frac{f(x)}{x} + \ln x \cdot f'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $g(1) = 0$, 所以 $g(e) = f(e) > 0$, $g\left(\frac{1}{e}\right) = -f\left(\frac{1}{e}\right) < 0$,

所以 $f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e) > 0$, $f\left(\frac{1}{e}\right) > 0$, $f(1)$ 的大小不确定. 故选 AC.]

8. BCD [令 $g(x) = e^{2x}f(x)$, 则 $g'(x) = e^{2x}[f'(x) + 2f(x)]$, $x \in \mathbf{R}$,

由 $f'(x) + 2f(x) > 0$, 可得 $g'(x) > 0$,

故 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

由 $g(1) < g(2)$, 得 $f(1) < e^2 f(2)$, 故 A 不正确;

由 $g(-1) > g(-2)$, 得 $e^2 f(-1) > f(-2)$, 故 B 正确;

由 $g(2) < g(3)$, 得 $f(2) < e^2 f(3)$, 故 C 正确;

由 $g(-1) > g(-3)$, 得 $e^4 f(-1) > f(-3)$, 故 D 正确, 故选 BCD.]

9. $(0, 2)$ [令 $h(x) = x^2 f(x)$, 则 $h'(x) = 2x f(x) + x^2 f'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 不等式

$f(x) > \frac{3}{x^2}$ 可以转化为 $x^2 f(x) > 4 \times \frac{3}{4} = 2^2 f(2)$, 即 $h(x) > h(2)$, 所以 $0 < x < 2$.]

10. $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ [令 $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}, x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, $g'(x) = \frac{f'(x)\sin x - f(x)\cos x}{\sin^2 x} < 0, 0 < x < \pi$.

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内单调递减.

奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, 因此函数 $g(x)$ 为偶函数.

当 $x \in (0, \pi)$ 时, 不等式 $f(x) < \sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x$ 化为

$$\frac{f(x)}{\sin x} < \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin \frac{\pi}{4}},$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} < x < \pi.$$

当 $x \in (-\pi, 0)$ 时, 不等式 $f(x) < \sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x$ 化为

$$\frac{f(x)}{\sin x} > \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}, \therefore -\frac{\pi}{4} < x < 0.$$

综上可得, $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$.]

课时作业(二十五)

1. A [根据题意导函数 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ 恒成立,

因此函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 函数 $f(x)$ 既无极大值也无极小值.

故选 A.]

2. C [由题意可知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f'(x) = e^x - 1$,

令 $f'(x) = 0$, 可得 $x = 0$,

当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

故选 C.]

3. D [因为 $f(x) = x^3 - 3ax + 2, x \in \mathbf{R}$,

所以 $f'(x) = 3x^2 - 3a$,

又因为 $x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点,

所以 $f'(1) = 3 - 3a = 0$,

解得 $a = 1$,

所以 $f(x) = x^3 - 3x + 2, f'(x) = 3x^2 - 3$,

令 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$, 得 $x_1 = -1, x_2 = 1$,

所以当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (-1, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取极大值, 在 $x = 1$ 处取极小值,

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$.

故选 D.]

4. B [由题意可得 $f'(x) = 2x^2 - ax + 1$,

若函数 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内存在极值点,

则 $f'(x)$ 在 $(1, 2)$ 内有变号零点,

即 $ax = 2x^2 + 1$ 在 $(1, 2)$ 内有解,

即 $a = 2x + \frac{1}{x}$ 在 $(1, 2)$ 内有解,

等价于直线 $y = a$ 与函数 $y = 2x + \frac{1}{x}$ 在 $(1, 2)$ 内的图象有交点,

因为 $y = 2x + \frac{1}{x}$ 在 $(1, 2)$ 内单调递增,

所以 $y = 2x + \frac{1}{x} \in \left(3, \frac{9}{2}\right)$,

所以 $a \in \left(3, \frac{9}{2}\right)$.

故选 B.]

5. AD [由题可得 $f'(x) = e^{x-1}[x^2 + (a+2)x + a - 1], x \in \mathbf{R}$,

因为 $x = -2$ 是函数 $f(x) = (x^2 + ax - 1) \cdot e^{x-1}$ 的极值点,

所以 $f'(-2) = 0$, 则 $4 - 2(a+2) + a - 1 = 0$, 解得 $a = -1$,

故 $f(x) = (x^2 - x - 1)e^{x-1}$,

$f'(x) = e^{x-1}(x^2 + x - 2) = (x-1)(x+2)e^{x-1}$,

当 $x < -2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $-2 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -2), (1, +\infty)$,

单调递减区间为 $(-2, 1)$, 故 A 正确, B 错误.

由上可知, $f(x)$ 的极大值为 $f(-2) = 5e^{-3}$, 极小值为 $f(1) = -1$, 故 C 错误, D 正确. 故选 AD.]

6. ABD [因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(0) = 0$, 故 A 正确; 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 因此 $f(-x) = [(-x)^2 - 3] \cdot e^{-x} + 2 = -f(x)$, 因此 $f(x) = -(x^2 - 3)e^{-x} - 2$, 故 B 正确; 当 $x > 0$ 时, $f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^x + 2$, $f'(x) = (x^2 + 2x - 3) \cdot e^x = (x+3)(x-1) \cdot e^x$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 1$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$, 因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 因此奇函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值, 故 D 正确; 当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq 2$, 即 $(x^2 - 3) \cdot e^x \geq 0$, 解得 $x \geq \sqrt{3}$, 当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值, $f(-1) = -(1-3) \cdot e - 2 = 2e - 2 > 2$, 因此在 $(-\infty, 0)$ 上也存在满足 $f(x) \geq 2$ 的区间, 故 C 错误. 故选 ABD.]

7. 0 [函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$, 则 $f'(x) = 2\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$, 令 $F(x) = 2\ln(1+x) + \frac{x}{1+x} (x > -1)$, 则 $F'(x) = \frac{2}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}$, 可得 $F'(x) > 0$ 在 $(-1, +\infty)$ 上恒成立, 则 $F(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 又 $F(0) = 0$, 所以当 $-1 < x < 0$ 时, $F(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x > 0$ 时, $F(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值, $f(x)_{\text{极小值}} = f(0) = 0$.]

8. (0, 2) [$f(x) = \ln x + \frac{1}{2}ax^2 - 2\sqrt{2}x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{且导函数 } f'(x) = \frac{1}{x} + ax - 2\sqrt{2} = \frac{ax^2 - 2\sqrt{2}x + 1}{x},$$

因此方程 $ax^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 时有两个不等的正实根 x_1, x_2 ,

根据根与系数的关系可得

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta = 8 - 4a > 0, \\ x_1 + x_2 = \frac{2\sqrt{2}}{a} > 0, \text{解得 } 0 < a < 2. \\ x_1 x_2 = \frac{1}{a} > 0, \end{cases}$$

所以实数 a 的取值范围是 $(0, 2)$.]

9. 解: (1) 因为直线 $2x + y + 1 = 0$ 的斜率为 $k = -2$, 又函数 $f(x) = (x^2 - ax - a)e^x$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线垂直于直线 $2x + y + 1 = 0$, 所以函数 $f(x) = (x^2 - ax - a)e^x$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线斜率为 $\frac{1}{2}$, 所以 $f'(0) = \frac{1}{2}$, 由 $f'(x) = (2x - a)e^x + (x^2 - ax - a)e^x = (x^2 + 2x - ax - 2a)e^x$, 所以 $f'(0) = -2a = \frac{1}{2}$, 解得 $a = -\frac{1}{4}$.

(2) 由 (1) 知, $f(x) = e^x \left(x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \right)$,

则 $f'(x) = e^x (x+2) \left(x + \frac{1}{4} \right)$,

令 $f'(x) = e^x (x+2) \left(x + \frac{1}{4} \right) = 0$, 可得 $x = -2$ 或 $x = -\frac{1}{4}$.

当 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in \left(-2, -\frac{1}{4}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

故当 $x = -2$ 时, $f(x)$ 取极大值, 极大值为 $f(-2) = \frac{15}{4e^2}$,

当 $x = -\frac{1}{4}$ 时, 函数 $f(x)$ 取极小值, 极小值为 $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}}$.

10. 解: 由题意, $f'(x) = 2x - (m+2) + \frac{m}{x} =$

$$\frac{2x^2 - (m+2)x + m}{x} = \frac{(x-1)(2x-m)}{x}, x > 0.$$

当 $m \leq 0$ 时, $2x - m > 0$, 令 $f'(x) = \frac{(x-1)(2x-m)}{x} > 0$,

解得 $x > 1$,

令 $f'(x) < 0$, 解得 $0 < x < 1$.

故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

故 $f(x)$ 无极大值, 不成立;

当 $m = 2$ 时, $f'(x) = \frac{2(x-1)^2}{x} \geq 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(x)$ 无极大值, 不成立;

当 $0 < m < 2$ 时, 令 $f'(x) = \frac{(x-1)(2x-m)}{x} > 0$, 解得 $x > 1$ 或

$$0 < x < \frac{m}{2}, \text{令 } f'(x) < 0, \text{则 } \frac{m}{2} < x < 1,$$

故 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{m}{2}\right)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{m}{2}, 1\right)$ 内单

调递减, 故 $f(x)$ 在 $x = \frac{m}{2}$ 处取得极大值;

当 $m > 2$ 时, 令 $f'(x) = \frac{(x-1)(2x-m)}{x} > 0$, 解得 $x > \frac{m}{2}$

或 $0 < x < 1$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $1 < x < \frac{m}{2}$,

故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 和 $\left(\frac{m}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增, 在 $\left(1, \frac{m}{2}\right)$ 内单

调递减, 故 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值,

综上, 实数 m 的取值范围为 $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

课时作业(二十六)

1. D [由 $f(x) = (x+2)e^x$, 得 $f'(x) = e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x$.

当 $x \in [-5, -3)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (-3, 5]$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以函数 $f(x)$ 在 $x = -3$ 处取得极小值, 也是最小值.

$f(-3) = (-3+2)e^{-3} = -e^{-3}$, 即 $f(x)$ 的最小值为 $-e^{-3}$,

故选 D.]

2. D [因为 $x > 0, y > 0$, 且 $xy + 2y^2 - 36 = 0$,

所以 $x = \frac{36 - 2y^2}{y} > 0$, 即 $0 < y < 3\sqrt{2}$,

则 $xy^2 = (36 - 2y^2)y$, 令 $g(y) = (36 - 2y^2)y = 36y - 2y^3$, $0 < y < 3\sqrt{2}$,

则 $g'(y) = 36 - 6y^2 = 6(\sqrt{6} - y)(\sqrt{6} + y)$,

当 $0 < y < \sqrt{6}$ 时, $g'(y) > 0$, $g(y)$ 单调递增, 当 $\sqrt{6} < y < 3\sqrt{2}$ 时, $g'(y) < 0$, $g(y)$ 单调递减, 故 $y = \sqrt{6}$ 时, $g(y)$ 取得最大值 $24\sqrt{6}$.

故选 D.]

$$3. \text{A} \quad [f'(x) = 2x + (a-1) - \frac{3}{x} = \frac{2x^2 + (a-1)x - 3}{x},$$

设 $g(x) = 2x^2 + (a-1)x - 3$, 因为 $\Delta = (a-1)^2 + 24 > 0$, 因此 $g(x) = 0$ 有两个不同的实数根, 又 $g(0) = -3 < 0$, 因此 $g(x) = 0$ 的两根一正一负,

由题意可知正根在 $(1, 2)$ 内,

$$\text{所以} \begin{cases} g(1) = 2 + (a-1) - 3 < 0, \\ g(2) = 8 + 2(a-1) - 3 > 0, \end{cases}$$

解得 $-\frac{3}{2} < a < 2$. 故选 A.]

$$4. \text{B} \quad [\text{法一(导数法)}: \text{由选项知 } a > 0, f(x) = \frac{x+2}{e^x+a}, x \in \mathbf{R}, \text{得}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x+a) - (x+2)e^x}{(e^x+a)^2} = \frac{a - (x+1)e^x}{(e^x+a)^2}, \text{因为 } f(x) \text{ 有}$$

最大值, 所以 $f(x)$ 在极值点处取最大值, 设 $f'(x_0) = 0$, 得 $a = e^{x_0}(x_0+1)$, 代入 $f(x_0) = \frac{x_0+2}{e^{x_0}+a} = 1$, 得 $\frac{x_0+2}{e^{x_0}(x_0+2)} = 1$,

即 $e^{x_0} = 1$, 解得 $x_0 = 0$, 所以 $a = e^{x_0}(x_0+1) = e^0(0+1) = 1$. 故选 B.

法二(分离参数法): 由选项知 $a > 0$, 所以 $e^x + a$ 恒大于 0. 由 $f(x) = \frac{x+2}{e^x+a} \leq 1$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 得 $x+2 \leq e^x + a$, 即 $x+2-e^x \leq a$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立且等号成立. 设 $g(x) = x+2-e^x$, 则 $g'(x) = 1-e^x$. 当 $x < 0$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; 当 $x > 0$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减. 所以 $g(x)_{\max} = g(0) = 1$, 所以 $a = 1$. 故选 B.]

$$5. \text{AC} \quad [\text{根据题意可知, 点 } P(1, f(1)) \text{ 为切点, 代入切线方程 } y = 3x + 1 \text{ 可得,}$$

$$f(1) = 3 \times 1 + 1 = 4, \text{ 因此 } f(1) = 1 + a + b + 5 = 4, \text{ 所以 } a + b = -2,$$

$$\text{又根据函数 } f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5, \text{ 得导函数 } f'(x) = 3x^2 + 2ax + b,$$

$$\text{而根据切线 } y = 3x + 1 \text{ 的斜率可知, } f'(1) = 3, \text{ 所以 } 3 + 2a + b = 3, \text{ 所以 } 2a + b = 0,$$

根据 $\begin{cases} a+b=-2, \\ 2a+b=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=-4, \end{cases}$ 因此选项 A 正确, 选项 B 错误;

$$\text{根据函数 } f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5, \text{ 可得 } f'(x) = 3x^2 + 4x - 4 = (3x-2)(x+2), \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x = \frac{2}{3} \text{ 或 } x = -2,$$

当 x 变化时, 函数 $f(x)$, 导函数 $f'(x)$ 的变化情况如表,

x	-3	$(-3, -2)$	-2	$(-2, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, 1)$	1
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	8	↗	极大值	↘	极小值	↗	4

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(-2) = 13$, 又 $f(1) = 4$,

所以 $f(x)$ 在 $[-3, 1]$ 上的最大值为 13, 最小值不为 4, 故 C 正确, D 错误.

故选 AC.]

$$6. \text{AD} \quad [f(x) = x^2 + a \ln x \text{ 的定义域为 } (0, +\infty), f'(x) = 2x + \frac{a}{x},$$

$$\text{当 } a = \frac{1}{2} \text{ 时, } f'(x) = 2x + \frac{1}{2x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{1}{2x}} = 2,$$

$$\text{当且仅当 } 2x = \frac{1}{2x} (x > 0), \text{ 即当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时, 等号成立,}$$

因此当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 的切线斜率的最小值为 2, 所以选项 A 正确;

$$\text{当 } a = \frac{1}{2} \text{ 时, } f'(x) = 2x + \frac{1}{2x} > 0 \text{ 对任意的 } x > 0 \text{ 恒成立,}$$

因此当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 那么函数 $f(x)$ 无最大值, 所以选项 B 错误;

$$\text{当 } a = -\frac{1}{2} \text{ 时, 函数 } f(x) = x^2 - \frac{1}{2} \ln x, f'(x) = 2x - \frac{1}{2x} = \frac{4x^2 - 1}{2x},$$

$$\text{由 } f'(x) < 0, \text{ 可得 } 0 < x < \frac{1}{2}, \text{ 由 } f'(x) > 0, \text{ 可得 } x > \frac{1}{2},$$

所以此时 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\frac{1}{2}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, \frac{1}{2})$,

$$\text{则 } f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2,$$

$$\text{所以 } f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) > 0,$$

所以当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 有最小值, 且最小值大于 0, 函数 $f(x)$ 无零点, C 错误, D 正确. 故选 AD.]

$$7. -2 - \sin 2 \quad [\text{函数 } f(x) = x^2 - 4x + (x-2)\cos x - \sin x,$$

$$\text{可得 } f'(x) = (x-2)(2-\sin x),$$

$$\text{因为 } 2 - \sin x > 0, \text{ 当 } x < 2 \text{ 时, } f'(x) < 0;$$

$$\text{当 } x > 2 \text{ 时, } f'(x) > 0,$$

$$\text{从而 } m = f(x)_{\min} = f(2) = -4 - \sin 2,$$

$$a = 2, \text{ 所以 } m + a = -2 - \sin 2.]$$

$$8. -\frac{27}{16} \quad [\text{由 } f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x, \text{ 可得 } f'(x) = \cos x +$$

$$\cos 2x, \text{ 令 } \cos x + \cos 2x = 0, \text{ 解得 } 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0,$$

$$\text{即 } (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0,$$

$$\text{可得 } \cos x = -1 \text{ 或 } \cos x = \frac{1}{2}, x \in [-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi],$$

$$\text{解得 } x = -\pi, x = \pi, x = -\frac{5\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3},$$

$$f(-\pi) = 0, f(\pi) = 0, f\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}, f(2\pi) = 0, f(-2\pi) = 0,$$

所以 $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$ 上的最小值与最大值之积为 $-\frac{27}{16}$.]

$$9. \text{解: 设 } g(x) = f'(x), g'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}(1+x) - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}, x > -1,$$

由 $g'(x) = 0$ 可得 $x = e - 1$, 当 $x \in (-1, e - 1)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

当 $x \in (e - 1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

所以 $f'(x)$ 的最大值为 $f'(e - 1) = \frac{1}{e}$.

$$10. (1) \text{证明: 当 } a = 1 \text{ 时, } f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1, x > 0,$$

$$\text{则 } f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2},$$

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

故 $f(x) \geq f(1) = 0$.

$$(2) \text{解: 因为 } f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{ax-1}{x^2}, x > 0,$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 此时函数没有最小值, 不符合题意;

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 可得 $x > \frac{1}{a}$, $f(x)$ 单调递增;

由 $f'(x) < 0$ 可得 $0 < x < \frac{1}{a}$, $f(x)$ 单调递减,

故当 $x = \frac{1}{a}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最小值 $f\left(\frac{1}{a}\right) = a \ln \frac{1}{a} - 1 + a = -1$,

即 $1 - \ln a = 0$,

所以 $a = e$.

课时作业(二十七)

$$1. \text{证明: (1) 令 } g(x) = f(x) - x = e^x - 1 - x,$$

$$\text{则 } g'(x) = e^x - 1,$$

当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

故 $g(x) > g(0) = 0$, 即当 $x > 0$ 时, $f(x) > x$ 成立.

(2) 由(1)可得当 $x > 0$ 时, $e^x > 1 + x$,

要证 $e^x - 2 > \ln x$, 即证 $e^x - 2 > x - 1 \geq \ln x$,

即证 $x - 1 - \ln x \geq 0$,

$$\text{令 } h(x) = x - 1 - \ln x,$$

$$\text{则 } h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x},$$

当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

所以 $h(x)_{\min} = h(1) = 0$,

即 $h(x) = x - 1 - \ln x \geq 0$ 恒成立,

所以 $e^x - 2 > \ln x$.

$$2. \text{解: 由题意可知, 存在 } x \text{ 使 } x^2 - ax \leq \ln x (x > 0) \text{ 成立,}$$

则存在 x , 使 $a \geq x - \frac{\ln x}{x} (x > 0)$.

$$\text{令 } h(x) = x - \frac{\ln x}{x} (x > 0),$$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{x^2 + \ln x - 1}{x^2},$$

因为 $y = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $y = \ln x - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $y = x^2 + \ln x - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且当 $x = 1$ 时, $y = 0$.

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) < 0$;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$,

所以 $h(x)_{\min} = h(1) = 1$, 所以 $a \geq 1$.

所以实数 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

$$3. \text{解: (1) 当 } a = -1 \text{ 时, } f(x) = x \ln x + x, f'(x) = \ln x + 2,$$

$$\text{则 } f(1) = 1, f'(1) = 2,$$

所以函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 1 = 2(x - 1)$, 即 $2x - y - 1 = 0$.

(2) 因为对任意 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \leq x^2 + 2$ 恒成立, 所以 $x \ln x - ax \leq x^2 + 2$ 恒成立.

即 $a \geq \ln x - x - \frac{2}{x}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立.

$$\text{设 } h(x) = \ln x - x - \frac{2}{x} (x > 0), \text{ 则 } h'(x) = \frac{1}{x} - 1 + \frac{2}{x^2} = -\frac{(x-2)(x+1)}{x^2},$$

令 $h'(x) = 0$, 得 $x_1 = 2, x_2 = -1$ (舍去),

当 $x \in (0, 2)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

故 $h(x)_{\max} = h(2) = \ln 2 - 3$,

所以 $a \geq \ln 2 - 3$,

故实数 a 的取值范围是 $[\ln 2 - 3, +\infty)$.

课时作业(二十八)

$$1. \text{解: 函数 } y = f(x) \text{ 的定义域是 } (0, +\infty),$$

若函数 $f(x)$ 在定义域上恰有一个零点, 即方程 $a = \frac{\ln x}{x}$ 恰有一个解.

$$\text{令 } g(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} (x > 0),$$

当 $0 < x < e$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

当 $x > e$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

故当 $x = e$ 时, $g(x)$ 取得极大值, 也是最大值, $g(e) = \frac{1}{e}$;

又当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$,

故当 $a \leq 0$ 或 $a = \frac{1}{e}$ 时, 方程 $a = \frac{\ln x}{x}$ 恰有一个解,

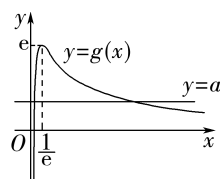
即函数 $f(x)$ 在定义域上恰有一个零点.

即实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0] \cup \left\{\frac{1}{e}\right\}$.

$$2. \text{解: 令 } f(x) = ax - \ln x - 2 = 0, \text{ 因为 } x > 0, \text{ 所以 } a = \frac{\ln x + 2}{x},$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{\ln x + 2}{x} (x > 0),$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{-1 - \ln x}{x^2},$$



令 $g'(x) > 0$, 则 $0 < x < \frac{1}{e}$; 令 $g'(x) < 0$, 则 $x > \frac{1}{e}$,

故 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 内单调递增, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递减, 从而 $g(x)_{\max} = g(\frac{1}{e}) = e$, 因此当 $a > e$ 时, 直线 $y = a$ 与 $y = g(x)$ 的图象没有交点;

当 $a = e$ 或 $a \leq 0$ 时, 直线 $y = a$ 与 $y = g(x)$ 的图象有 1 个交点;

当 $0 < a < e$ 时, 直线 $y = a$ 与 $y = g(x)$ 的图象有 2 个交点.

综上, 当 $a > e$ 时, 函数 $f(x)$ 没有零点; 当 $a = e$ 或 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 有 1 个零点; 当 $0 < a < e$ 时, 函数 $f(x)$ 有 2 个零点.

阶段检测(四)

1. D [因为 $P = P_0 e^{-kt}$,

求导得 $P' = P_0 \cdot e^{-kt} \cdot (-kt)' = -kP_0 e^{-kt}$.

故选 D.]

2. D [由导函数图象可知, 当 $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (-3, 3)$ 时, $f'(x) \leq 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减.

对于 A, 3 是函数 $f(x)$ 的极小值点, $f(x)$ 的极小值为 $f(3)$, 故 A 错误;

对于 B, $f(x)$ 的极值点有两个, 极大值点 -3, 极小值点 3, 故 B 错误;

对于 C, 当 $x \in (-\infty, -3)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数单调递增, 当 $x \in (-3, 3)$ 时, $f'(x) \leq 0$, 函数单调递减, 故 C 错误;

对于 D, 由题干图象可知 $f'(1) < 0$, 即函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线的斜率小于零, 故 D 正确.

故选 D.]

3. B [$f'(x) = x - \frac{3}{x} + 2 = \frac{x^2 + 2x - 3}{x}$, 定义域为 $(0, +\infty)$.

令 $f'(x) < 0$, 得 $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) < 0$, 解得 $-3 < x < 1$. 又 $x > 0$,

故 $0 < x < 1$. 所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, 1)$. 故选 B.]

4. C [因为 $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3}$ ($x \geq 2$),

所以 $f'(x) = \frac{e^x(x-3)(x+1)}{(x^2-3)^2}$,

令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > 3$; 令 $f'(x) < 0$, 解得 $2 \leq x < 3$,

故 $f(x)$ 在 $[2, 3)$ 上单调递减, 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增,

故 $f(x)_{\min} = f(3) = \frac{e^3}{6}$. 故选 C.]

5. B [易得导函数 $f'(x) = 3x^2 - 2ax$, 那么 $f'(2) = 3 \times 4 - 4a = 0$, 解得 $a = 3$.

当 $a = 3$ 时, 导函数 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$,

因此当 $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

故 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 符合题意.

所以 $a = 3$. 故选 B.]

6. C [根据题意得导函数 $f'(x) = e^x + (x+1) \cdot e^x = (x+2)e^x$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -2$,

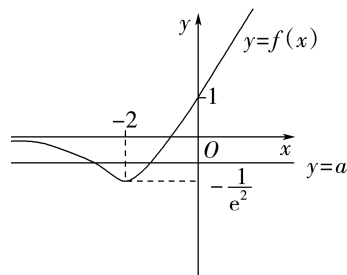
根据导函数 $f'(x) < 0$ 得 $x < -2$, $f'(x) > 0$, 得 $x > -2$,

因此函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -2)$, 单调递增区间为 $(-2, +\infty)$,

因此函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(-2) = (-2+1)e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$, 当

$x < -1$ 时, $f(x) < 0$,

作出 $f(x)$ 的图象.



根据图象可知 $y = a$ 与 $f(x)$ 的图象恰有两个公共点时,

$-\frac{1}{e^2} < a < 0$. 故选 C.]

7. ABC [对于 A, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$

$= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x) - f(1)}{2\Delta x} = 2f'(1) = 4$, 故 A 正确;

对于 B, 由 $f(x) = x^2 + 3xf'(2) + \ln x$, 得 $f'(x) = 2x + 3f'(2) + \frac{1}{x}$, 则 $f'(2) = 4 + 3f'(2) + \frac{1}{2}$, 解得 $f'(2) = -\frac{9}{4}$,

故 B 正确;

对于 C, 因为 $f(x) = \ln(2x+1)$,

所以 $f'(x) = \frac{1}{2x+1} (2x+1)' = \frac{2}{2x+1}$,

令 $\frac{2}{2x_0+1} = 1$, 解得 $x_0 = \frac{1}{2}$, 故 C 正确;

对于 D, $\left(\frac{\cos x}{x}\right)' = \frac{(\cos x)'x - \cos x(x)'}{x^2} = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$, 故 D 错误.

故选 ABC.]

8. AC [由题意知, $f'(x) = 3x^2 - 1$,

令 $f'(x) > 0$ 得 $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

令 $f'(x) < 0$ 得 $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 内单调递减, 在 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$,

$(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ 是极值点, 故 A 正确;

因为 $f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0$, $f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0$,

$f(-2) = -5 < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ 上有一个零点,

当 $x \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $f(x) \geq f(\frac{\sqrt{3}}{3}) > 0$, 即函数 $f(x)$ 在

$[-\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ 上无零点,

综上所述, 函数 $f(x)$ 有一个零点, 故 B 错误;

令 $h(x) = x^3 - x$, 该函数的定义域为 $\mathbf{R}$, $h(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -h(x)$,

则 $h(x)$ 是奇函数, 点 $(0, 0)$ 是 $h(x)$ 图象的对称中心, 将 $h(x)$ 的图象向上平移一个单位长度得到 $f(x)$ 的图象,

所以点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心, 故 C 正确;

令 $f'(x) = 3x^2 - 1 = 2$, 可得 $x = \pm 1$, 又 $f(1) = f(-1) = 1$, 当切点坐标为 $(1, 1)$ 时, 切线方程为 $y = 2x - 1$, 当切点坐标为 $(-1, 1)$ 时, 切线方程为 $y = 2x + 3$, 故 D 错误. 故选 AC.]

9. -3 [因为 $y = x + \ln x$, 所以 $y' = 1 + \frac{1}{x}$, 即曲线 $y = x + \ln x$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线斜率 $k = 1 + 1 = 2$, 切线方程为 $y = 2x - 1$,

又由 $y = x^2 - 2x - a$, 得 $y' = 2x - 2$, 设切点坐标为 (x_0, y_0) , 令 $2x_0 - 2 = 2$, 解得 $x_0 = 2$, 将 $x_0 = 2$ 代入 $y = 2x - 1$, 可得 $y_0 = 3$, 将点 $(2, 3)$ 代入 $y = x^2 - 2x - a$, 可得 $3 = 4 - 4 - a$, 解得 $a = -3$.]

10. 3 (答案不唯一) [由题可得 $f'(x) = k - e^x$.

当 $k \leq 0$ 时, $f'(x) = k - e^x < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 不存在最值;

当 $k > 0$ 时, 令 $f'(x) = k - e^x = 0$, 可得 $x = \ln k$,

当 $x < \ln k$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > \ln k$ 时, $f'(x) < 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln k)$ 上单调递增, 在 $(\ln k, +\infty)$ 上单调递减, 若函数 $f(x) = kx - e^x$ 在 $(1, +\infty)$ 上存在最值, 则 $\ln k > 1$, 解得 $k > e$,

所以实数 k 的一个值为 3.]

11. 解: 因为 $f(x) \geq 2\ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $ax + \frac{a-2}{x} + 2 - 2a - 2\ln x \geq 0 (a > 0)$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立.

令 $g(x) = ax + \frac{a-2}{x} + 2 - 2a - 2\ln x, x \geq 1$,

则 $g'(x) = a - \frac{a-2}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{ax^2 - 2x - a + 2}{x^2}$
 $= \frac{(x-1)[ax + (a-2)]}{x^2}$.

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 1, x_2 = -\frac{a-2}{a}$.

若 $-\frac{a-2}{a} = 1$, 即 $a = 1$, 则 $g'(x) \geq 0$,

函数 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 又 $g(1) = 0$,

所以 $g(x) \geq g(1) = 0$,

所以 $f(x) \geq 2\ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立.

若 $-\frac{a-2}{a} > 1$, 即 $0 < a < 1$, 则当 $x \in (0, 1) \cup (-\frac{a-2}{a},$

$+\infty)$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增;

当 $x \in (1, -\frac{a-2}{a})$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减,

所以 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 $g(-\frac{a-2}{a})$,

又因为 $g(1) = 0$, 所以 $g(-\frac{a-2}{a}) < 0$, 不合题意.

若 $-\frac{a-2}{a} < 1$, 即 $a > 1$, 则当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

所以 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 $g(1)$,

又因为 $g(1) = 0$, 所以 $g(x) \geq g(1) = 0$, 所以 $f(x) \geq 2\ln x$ 恒成立.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

12. 解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = 2ae^{2x} + (a - 2)e^x - 1 = (ae^x - 1) \cdot (2e^x + 1)$.

若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减;

若 $a > 0$, 则由 $f'(x) = 0$ 得 $x = -\ln a$.

当 $x \in (-\infty, -\ln a)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (-\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 由(1)知当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上最多仅有一个零点, 故 $a \leq 0$ 不符合题意.

当 $a > 0$ 时, 由(1)知 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 欲使 $f(x)$ 有两个零点, 首先

$f(-\ln a) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a < 0$,

令 $h(a) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a (a > 0)$,

$\therefore h'(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} > 0, \therefore h(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

而 $h(1) = 1 - 1 = 0$,

$\therefore$ 当 $0 < a < 1$ 时, $h(a) < 0$,

即 $f(-\ln a) < 0$.

其次, 证 $f(x)$ 在 $x \in (-\infty, -\ln a)$ 和 $x \in (-\ln a, +\infty)$ 上各有 1 个零点.

当 $x \in (-\infty, -\ln a)$ 时, $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x = a(e^{2x} + e^x) - (2e^x + x)$,

这里 $a(e^{2x} + e^x) > 0$, 只需 $2e^x + x < 0$ 即可, 可取 $x = -1$, 即 $\frac{2}{e} - 1 < 0, \therefore f(-1) > 0$, 又 $f(-\ln a) < 0$,

$\therefore \exists x_1 \in (-1, -\ln a)$, 使 $f(x_1) = 0$, 即 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上存在一个零点 x_1 ;

当 $x \in (-\ln a, +\infty)$ 时, $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x > ae^{2x} - 2e^x - e^x = ae^{2x} - 3e^x$.

令 $ae^{2x} - 3e^x = 0, \therefore ae^x - 3 = 0, \therefore x = \ln \frac{3}{a}$,

$\therefore f(\ln \frac{3}{a}) > 0$, 又 $f(-\ln a) < 0$,

$\therefore \exists x_2 \in (-\ln a, \ln \frac{3}{a})$, 使 $f(x_2) = 0$,

即 $f(x)$ 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上存在一个零点 x_2 .

综上, 实数 a 的取值范围为 $(0, 1)$.

课时作业(二十九)

1. D [对于 A, 由 $\frac{17\pi}{9} = -\frac{\pi}{9} + 2\pi$, 可得 $\frac{\pi}{9}$ 与 $\frac{17\pi}{9}$ 的终边不相同, 故 A 错误;

对于 B, 由题意 α 为第二象限角, 可得 $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi +$

$\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $-2k\pi - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \alpha < -2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 为第四象限角, 故 B 错误;

对于 C, 当 $m > 0$ 时, 终边经过点 (m, m) 的角的集合是 $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$;

当 $m < 0$ 时, 终边经过点 (m, m) 的角的集合是 $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 故 C 错误;

对于 D, 由题意可得, 扇形的半径 $r = \frac{1}{\sin 2}$,

可得扇形面积 $S = \frac{1}{2}ar^2 = \frac{4}{2} \times \frac{1}{\sin^2 2} = \frac{2}{\sin^2 2}$, 故 D 正确. 故选 D.]

2. D [依题意, 得 $x < 0, r = OP = \sqrt{x^2 + 4}$, 其中 O 为坐标原点, 则 $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{1}{3}$, 所以 $x = -4\sqrt{2}$. 故选 D.]

3. D [$300^\circ = 360^\circ - 60^\circ$, 则 300° 角是第四象限角, 故 $\sin 300^\circ < 0$, A 错误; $-305^\circ = -360^\circ + 55^\circ$, 则 -305° 角是第一象限角, 故 $\cos(-305^\circ) > 0$, B 错误; $-\frac{22\pi}{3} = -8\pi + \frac{2\pi}{3}$, 则 $-\frac{22\pi}{3}$ 是第二象限角, 故 $\tan(-\frac{22\pi}{3}) < 0$, C 错误; $3\pi < 10 < \frac{7\pi}{2}$, 则 10 是第三象限角, 故 $\sin 10 < 0$, D 正确. 故选 D.]

4. C [当 $k = 2n (n \in \mathbf{Z})$ 时, $2n\pi \leq \alpha \leq 2n\pi + \frac{\pi}{3} (n \in \mathbf{Z})$, 此时 α 的终边和 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ 的终边相同; 当 $k = 2n + 1 (n \in \mathbf{Z})$ 时, $2n\pi + \pi \leq \alpha \leq 2n\pi + \pi + \frac{\pi}{3} (n \in \mathbf{Z})$, 此时 α 的终边和 $\pi \leq \alpha \leq \pi + \frac{\pi}{3}$ 的终边相同.

故选 C.]

5. B [当 $t > 0$ 时, 由三角函数的定义可得 $\sin \theta =$

$$\frac{-8t}{\sqrt{(-6t)^2 + (-8t)^2}} = \frac{-8t}{10t} = -\frac{4}{5},$$

$$\cos \theta = \frac{-6t}{\sqrt{(-6t)^2 + (-8t)^2}} = \frac{-6t}{10t} = -\frac{3}{5},$$

$$\text{此时, } 2\sin \theta \cos \theta = \frac{24}{25};$$

当 $t < 0$ 时, 由三角函数的定义可得 $\sin \theta =$

$$\frac{-8t}{\sqrt{(-6t)^2 + (-8t)^2}} = \frac{-8t}{-10t} = \frac{4}{5},$$

$$\cos \theta = \frac{-6t}{\sqrt{(-6t)^2 + (-8t)^2}} = \frac{-6t}{-10t} = \frac{3}{5},$$

$$\text{此时, } 2\sin \theta \cos \theta = \frac{24}{25}.$$

$$\text{综上, } 2\sin \theta \cos \theta = \frac{24}{25}.$$

故选 B.]

6. C [由题意可得 $\csc \frac{5\pi}{4} = \frac{1}{\sin \frac{5\pi}{4}} = -\sqrt{2}$, A 正确;

$$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = \cos \alpha \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = 1, \text{ B 正确};$$

函数 $f(x) = \sec x$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, C 错误;

$$\sec^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \csc^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 +$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 1 + \frac{4}{\sin^2 2\alpha} \geq 5,$$

当 $\sin 2\alpha = \pm 1$ 时, 等号成立, D 正确.

故选 C.]

7. AC [终边在第二象限的角的集合为 $\{\alpha \mid 90^\circ + 360^\circ \cdot k < \alpha < 180^\circ + 360^\circ \cdot k, k \in \mathbf{Z}\}$, A 正确;

与 -65° 终边相同的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = -65^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, B 错误;

$$\alpha = 665^\circ = 360^\circ + 305^\circ,$$

则 665° 角与 305° 角终边相同且 305° 角为第四象限角,

所以角 α 是第四象限角, C 正确;

当 α 为直角时, D 显然错误.

故选 AC.]

8. BC [由角 α 的终边在第三象限, 得 $\pi + 2k\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 则 $\frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 因此 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二象限角或第四象限角.

$$\text{当 } \frac{\alpha}{2} \text{ 是第二象限角时, } \left| \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right| + \left| \frac{2\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right| - \left| \frac{3\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2}} \right| = 1 - 2 - (-3) = 2;$$

$$\text{当 } \frac{\alpha}{2} \text{ 是第四象限角时, } \left| \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right| + \left| \frac{2\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right| - \left| \frac{3\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2}} \right| = -1 + 2 - (-3) = 4.$$

故选 BC.]

9. ABD [终边所在射线方向相反的两个角相差 $(2k+1)\pi (k \in \mathbf{Z})$, 故 A 正确;

设扇形的圆心角为 α , 半径为 r , 由扇形弧长公式得 $l = ar = \frac{\pi}{3}r = \frac{\pi}{2}$, 解得 $r = \frac{3}{2}$,

则扇形面积 $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3\pi}{8}$, 故 B 正确;

终边落在直线 $y = -x$ 上的角的集合为 $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 故 C 错误;

因为 $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$, 可知 3 为第二象限角, 4 为第三象限角,

由三角函数值的象限符号可得 $\cos 3 < 0, \sin 4 < 0$,

所以 $\cos 3 \cdot \sin 4 > 0$, 故 D 正确.

故选 ABD.]

10. 三 [因为 $\cos \alpha < 0$ 且 $\tan \alpha > 0$, 所以角 α 所在的象限是第三象限.]

11. $120^\circ - 90^\circ$ [若时钟拨慢 20 分钟, 则分针逆时针转动, 且为正角, 所以可得 $\frac{4}{12} \times 360^\circ = 120^\circ$, 所以分针转过的角是 120° ,

若时针从 6 时走到 9 时, 时针顺时针走动的是负角,

所以时针转过的角为 $-\frac{3}{12} \times 360^\circ = -90^\circ$.]

12. $\frac{8\pi}{3} + 4\sqrt{3}$ [取优弧 BC 所在圆的圆心为 D, 连接 AD, BD, CD,

则 $BD \perp AB, CD \perp AC$,

则 $AD = 4, BD = CD = 2$, 所以 $\angle BAD = \angle CAD = \frac{\pi}{6}$, 则

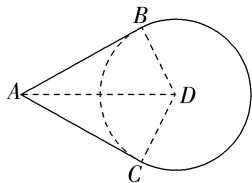
$$\angle BDC = \frac{2\pi}{3},$$

$$AB = AC = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

故优弧 BC 对应的圆心角为 $\frac{4\pi}{3}$, 对应的扇形面积为 $\frac{1}{2} \times$

$$\frac{4\pi}{3} \times 2^2 = \frac{8\pi}{3},$$

$$\text{而 } S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3},$$



$$\text{所以该封闭图形的面积为 } \frac{8\pi}{3} + S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = \frac{8\pi}{3} + 4\sqrt{3}.]$$

课时作业(三十)

1. C [$\sqrt{2} \sin 2025^\circ + \tan 2025^\circ = \sqrt{2} \sin(5 \times 360^\circ + 225^\circ) + \tan(5 \times 360^\circ + 225^\circ) = \sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$. 故选 C.]

2. C [由于 $\tan \theta = 2$,

$$\text{则 } \frac{\cos \theta - 3 \sin \theta}{\sin \theta + 5 \cos \theta} = \frac{1 - 3 \tan \theta}{\tan \theta + 5} = -\frac{5}{7}.$$

故选 C.]

3. A [因为 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{3}$

$$= \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

$$= \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{所以 } \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{3}.$$

故选 A.]

4. B [$\sqrt{1 - 2 \sin(\pi - 2) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\right)}$

$$= \sqrt{1 + 2 \sin 2 \cos 2}$$

$$= \sqrt{(\sin 2 + \cos 2)^2}$$

$$= \sin 2 + \cos 2.$$

故选 B.]

5. B [因为 $\sin \alpha - 2 \cos \alpha = 1$,

$$\text{所以 } \sin \alpha = 2 \cos \alpha + 1, \text{ 又 } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\text{所以 } 5 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha = 0, \text{ 解得 } \cos \alpha = -\frac{4}{5} \text{ 或 } \cos \alpha = 0,$$

又因为 α 是第三象限角,

$$\text{所以 } \cos \alpha = -\frac{4}{5}, \sin \alpha = 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right) + 1 = -\frac{3}{5},$$

$$\text{可得 } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}. \text{ 故选 B.]}$$

6. C [将已知等式两边平方, 可得 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta =$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{7}{4},$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}, \text{ 可得 } (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\text{而 } \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{又 } \theta + \frac{\pi}{4} \in \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right),$$

$$\therefore \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) < 0,$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) = -\frac{1}{2} \times \left[1 - \left(-\frac{3}{8}\right)\right] = -\frac{11}{16}.$$

故选 C.]

7. BC [由题意可得 $A + B + C = \pi$,

对于 A, $\sin(A + B) = \sin(\pi - C) = \sin C$, 故 A 错误;

$$\text{对于 B, } \sin \frac{B+C}{2} = \sin \frac{\pi-A}{2} = \cos \frac{A}{2}, \text{ 故 B 正确;}$$

对于 C, $\tan(A + B) = \tan(\pi - C) = -\tan C$, 故 C 正确;

对于 D, $\cos(A + B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$, 故 D 错误.

故选 BC.]

8. ACD [对于 A, 因为 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$,

$$\text{所以 } (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{25},$$

$$\text{即 } \sin \theta \cos \theta = -\frac{12}{25}, \text{ A 正确;}$$

$$\text{对于 B, C, } (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{49}{25},$$

$$\text{因为 } \theta \in (0, \pi), \text{ 且 } \sin \theta \cos \theta = -\frac{12}{25} < 0,$$

所以 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$, 即 $\sin \theta - \cos \theta > 0$,

$$\text{所以 } \sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5}, \text{ B 错误, C 正确;}$$

$$\text{对于 D, 联立 } \begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}, \\ \sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5}, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = -\frac{3}{5},$$

$$\text{所以 } \tan \theta = -\frac{4}{3}, \text{ D 正确.}$$

故选 ACD.]

9. 1 $\frac{3}{5}$ $\frac{3}{5}$ [由 $\tan \alpha = 2$, 得

$$\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{4 \sin \alpha - 3 \cos \alpha} = \frac{2 \tan \alpha + 1}{4 \tan \alpha - 3} = \frac{2 \times 2 + 1}{4 \times 2 - 3} = 1,$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha - 1}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{4 - 1}{4 + 1} = \frac{3}{5},$$

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{3}{5}.]$$

10. $\frac{6}{7}$ [$\because$ 角 α 终边上一点 $P(-4, 3)$,

$$\therefore \tan \alpha = -\frac{3}{4},$$

$$\text{则原式} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(-\pi - \alpha)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$$

$$= \frac{-\sin \alpha - \sin \alpha}{-\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{-2 \tan \alpha}{-\tan \alpha + 1}$$

$$= \frac{-2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)}{\frac{3}{4} + 1} = \frac{6}{7}.]$$

$$11. \text{解: (1) } f(\alpha) = \frac{\sin(2\pi - \alpha) \tan(\pi + \alpha) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \tan(3\pi - \alpha)}$$

$$= \frac{-\sin \alpha \tan \alpha (-\cos \alpha)}{-\cos \alpha (-\tan \alpha)} \\ = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \tan \alpha}{\cos \alpha \cdot \tan \alpha} = \sin \alpha.$$

$$\text{所以 } f(\alpha) = \sin \alpha = -\frac{1}{2},$$

$$\text{因为 } \alpha \in (0, 2\pi), \text{ 所以 } \alpha = \frac{7\pi}{6} \text{ 或 } \alpha = \frac{11\pi}{6}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } f(\alpha) = \sin \alpha,$$

$$\text{所以 } f(\alpha) - f\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5},$$

$$\text{所以 } \sin \alpha = \frac{1}{5} - \cos \alpha,$$

$$\text{所以 } \cos^2 \alpha + \left(\frac{1}{5} - \cos \alpha\right)^2 = 1,$$

$$\text{即 } (5\cos \alpha - 4)(5\cos \alpha + 3) = 0,$$

$$\text{所以 } \cos \alpha = \frac{4}{5} \text{ 或 } \cos \alpha = -\frac{3}{5}.$$

$$\text{又因为 } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\text{所以 } \cos \alpha = -\frac{3}{5},$$

$$\text{所以 } \sin \alpha = \frac{1}{5} - \cos \alpha = \frac{1}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}.$$

$$\text{所以 } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{4}{3}.$$

课时作业(三十一)

$$1. \text{B} \quad [\cos 54^\circ \cos 24^\circ + \sin 54^\circ \cos 66^\circ = \cos 54^\circ \cos 24^\circ + \sin 54^\circ \cdot$$

$$\sin 24^\circ = \cos(54^\circ - 24^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 故选 B.}]$$

$$2. \text{A} \quad [\text{因为 } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$= -\frac{1}{2}, \sin \alpha \sin \beta = -\frac{5}{12},$$

$$\text{所以 } \cos \alpha \cos \beta = -\frac{1}{12},$$

$$\text{所以 } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}.$$

故选 A.]

$$3. \text{D} \quad [\text{因为 } \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = \frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3},$$

$$\text{又因为 } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{所以 } \theta - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{所以 } \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

故选 D.]

$$4. \text{C} \quad [\text{由题意 } \frac{\tan \alpha}{\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{3}{2},$$

$$\text{可得 } -2 \tan \alpha = 3 \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 3 \times \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha},$$

$$\text{所以 } \tan \alpha = \frac{1}{2} \text{ 或 } \tan \alpha = -3,$$

$$\text{又因为 } \alpha \text{ 为第一象限角, 可得 } \tan \alpha = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2 \tan \alpha - 1 + \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\sqrt{2}}{10}. \text{ 故选 C.}]$$

$$5. \text{B} \quad [\text{因为 } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

$$\text{所以 } x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right),$$

$$\text{因为 } \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } x + \frac{\pi}{6} \in \left(\pi, \frac{7\pi}{6}\right),$$

$$\text{所以 } \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\sqrt{1 - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= -\sqrt{1 - \frac{1}{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \tan\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3} - 2x\right) = -\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{2 \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{1 - \tan^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = -\frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{4}{3}.$$

故选 B.]

$$6. \text{D} \quad [\text{因为 } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \text{ 所以 } \frac{\pi}{4} + \alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\text{由 } \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\frac{3}{5},$$

$$\text{得 } \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5},$$

$$\text{因为 } \beta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \text{ 所以 } \frac{3\pi}{4} + \beta \in (\pi, 2\pi),$$

$$\text{由 } \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \beta\right) = \frac{12}{13},$$

$$\text{得 } \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \beta\right) = -\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13},$$

$$\text{所以 } \sin\left[\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \left(\frac{3\pi}{4} + \beta\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \beta\right)$$

$$= -\frac{3}{5} \times \frac{12}{13} - \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{56}{65},$$

$$\text{由 } \sin\left[\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \left(\frac{3\pi}{4} + \beta\right)\right] = \sin\left(\alpha - \beta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\alpha - \beta), \text{ 所以 } \cos(\alpha - \beta) = \frac{56}{65}.$$

故选 D.]

7. AC [对于 A, $\tan 75^\circ + \tan 120^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) - \tan 60^\circ =$

$$\frac{1 + \tan 30^\circ}{1 - \tan 30^\circ} - \sqrt{3} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} - \sqrt{3} = 2, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{对于 B, } \frac{1}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{2}{2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4, \text{ 故}$$

B 错误;

$$\text{对于 C, } (1 + \tan 20^\circ) \cdot (1 + \tan 25^\circ) = 1 + \tan 20^\circ + \tan 25^\circ + \tan 20^\circ \tan 25^\circ = 1 + \tan 45^\circ \cdot (1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ) + \tan 20^\circ \tan 25^\circ = 1 + 1 = 2, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{对于 D, } \frac{1}{\cos 80^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ}$$

$$= \frac{\sin 80^\circ - \sqrt{3} \cos 80^\circ}{\sin 80^\circ \cos 80^\circ}$$

$$= \frac{4\left(\frac{1}{2} \sin 80^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 80^\circ\right)}{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}$$

$$= \frac{4 \sin(80^\circ - 60^\circ)}{\sin 160^\circ} = \frac{4 \sin 20^\circ}{\sin(180^\circ - 20^\circ)}$$

$$= \frac{4 \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4, \text{ 故 D 错误.}$$

故选 AC.]

8. ABD [已知 $\tan \alpha = 3 \tan \beta, \alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\text{对于 A, 若 } \alpha = \frac{\pi}{4}, \text{ 则 } \tan \alpha = 1, \tan \beta = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - 1 \times \frac{1}{3}} = 2, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{对于 B, 若 } \alpha = 2\beta, \text{ 则 } \tan \alpha = \tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = 3 \tan \beta,$$

$$\text{由 } \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 得 } \tan \beta > 0, \text{ 故 } \frac{2}{1 - \tan^2 \beta} = 3, \text{ 解得 } \tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \beta = \frac{\pi}{6}, \alpha = \frac{\pi}{3}, \text{ 故 } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \text{ 故 B 正确;}$$

$$\text{对于 C, } \because \tan \alpha = 3 \tan \beta, \alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\therefore \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 \tan \beta}{1 + 3 \tan^2 \beta} = \frac{2}{\frac{1}{\tan \beta} + 3 \tan \beta} \leq$$

$$\frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{当且仅当 } \frac{1}{\tan \beta} = 3 \tan \beta, \text{ 即 } \tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 时等号成立, 故 C 错误;}$$

$$\text{对于 D, 由 } \tan \alpha = 3 \tan \beta, \text{ 得 } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3 \sin \beta}{\cos \beta}, \text{ 即 } \sin \alpha \cos \beta = 3 \sin \beta \cos \alpha.$$

$$\therefore \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} =$$

$$\frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{4 \cos \alpha \sin \beta} = \frac{1}{2}, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 ABD.]

9. BC [因为 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{3}$,

$$\sin(\alpha - \beta) = -\frac{1}{6} = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} - \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\text{所以 } \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}, \text{ A 错误;}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}, \text{ B 正确;}$$

$$\text{因为 } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{3}, \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta} = \frac{2}{3},$$

$$\text{即 } 3 \tan \alpha = 2 \tan \beta, \text{ C 正确;}$$

$$\sin 2\alpha \sin 2\beta = 2 \sin \alpha \cos \alpha \times (2 \sin \beta \cos \beta) = 4(\sin \alpha \cos \beta) \times (\cos \alpha \sin \beta) = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}, \text{ D 错误.}$$

故选 BC.]

10. 0 [因为 $\tan \alpha = 1$, 所以 $\sin \alpha = \cos \alpha$,

$$\text{所以 } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha) = 0.]$$

11. $\sqrt{3}$ [$\because \tan 60^\circ = \tan(10^\circ + 50^\circ)$

$$= \frac{\tan 10^\circ + \tan 50^\circ}{1 - \tan 10^\circ \tan 50^\circ},$$

$$\therefore \tan 10^\circ + \tan 50^\circ$$

$$= \tan 60^\circ (1 - \tan 10^\circ \tan 50^\circ)$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan 10^\circ \tan 50^\circ,$$

$$\therefore \text{原式} = \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan 10^\circ \tan 50^\circ + \sqrt{3} \tan 10^\circ \cdot \tan 50^\circ = \sqrt{3}.]$$

12. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ [因为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \beta \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \sin \alpha =$

$$\frac{7\sqrt{2}}{10}, \cos \beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } \cos \alpha > 0, \sin \beta < 0,$$

$$\text{所以 } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{98}{100}} = \frac{\sqrt{2}}{10},$$

$$\sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\sqrt{1 - \frac{20}{25}} = -\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{10} \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) - \frac{7\sqrt{2}}{10} \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$= \frac{7\sqrt{10} - 2\sqrt{10}}{50} = \frac{\sqrt{10}}{10}.]$$

课时作业(三十二)

1. C [$\because \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$$\therefore \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \sqrt{5} - 2.$$

故选 C.]

2. A [因为 $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right) = -\cos 2\alpha$,

$$\text{所以 } -\cos 2\alpha + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

$$\text{即 } \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha).$$

$$\text{又因为 } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 所以 } \cos \alpha + \sin \alpha > 0,$$

$$\text{所以 } \cos \alpha - \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{即 } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{所以 } \alpha + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right),$$

$$\text{所以 } \alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{所以 } \alpha = \frac{\pi}{12}. \text{ 故选 A.]}$$

$$3. \text{ B } \quad [\text{由 } \alpha + \beta = \frac{\pi}{3}, \text{ 可得 } \beta = \frac{\pi}{3} - \alpha, \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{2}{3},$$

$$\text{则 } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2} + \frac{\cos 2\beta + 1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\cos 2\alpha + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2\alpha\right) \right] + 1$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha \right) + 1$$

$$= \frac{1}{2} \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = \frac{2}{3}.$$

故选 B.]

$$4. \text{ D } \quad [\text{法一: } \cos(140^\circ - \alpha) + \sin(110^\circ + \alpha) = \sin(130^\circ - \alpha),$$

$$\text{即 } -\cos(40^\circ + \alpha) + \cos(20^\circ + \alpha) = \cos(40^\circ - \alpha),$$

$$\text{故 } \cos(20^\circ + \alpha) = \cos(40^\circ - \alpha) + \cos(40^\circ + \alpha),$$

$$\text{即 } \cos 20^\circ \cos \alpha - \sin 20^\circ \sin \alpha = 2\cos 40^\circ \cos \alpha,$$

$$\text{故 } \cos 20^\circ \cos \alpha - 2\cos 40^\circ \cos \alpha = \sin 20^\circ \sin \alpha,$$

$$\text{即 } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos 20^\circ - 2\cos 40^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{\cos(30^\circ - 10^\circ) - 2\cos(30^\circ + 10^\circ)}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 10^\circ + \frac{3}{2} \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \sin(10^\circ - 30^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{-\sqrt{3} \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = -\sqrt{3}.$$

$$\text{法二: 由 } \cos(140^\circ - \alpha) + \sin(110^\circ + \alpha) = \sin(130^\circ - \alpha),$$

$$\text{得 } \cos(140^\circ - \alpha) = \sin(130^\circ - \alpha) - \sin(110^\circ + \alpha) = 2\cos 120^\circ \cdot$$

$$\sin(10^\circ - \alpha) = -\sin(10^\circ - \alpha),$$

$$\text{即 } \sin(50^\circ - \alpha) = \sin(10^\circ - \alpha).$$

$$\therefore \sin(50^\circ - \alpha) - \sin(10^\circ - \alpha) = 2\cos(30^\circ - \alpha) \cdot \sin 20^\circ = 0,$$

$$\text{故 } 30^\circ - \alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}, \text{ 即 } \alpha = -60^\circ - k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{则 } \tan \alpha = \tan(-60^\circ - k \cdot 180^\circ) = \tan(-60^\circ) = -\sqrt{3}. \text{ 故选 D.]}$$

$$5. \text{ ACD } \quad [\sin 72^\circ \sin 78^\circ - \cos 72^\circ \sin 12^\circ = \sin 72^\circ \cdot \cos 12^\circ -$$

$$\cos 72^\circ \sin 12^\circ = \sin(72^\circ - 12^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\frac{\tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ} = \frac{1}{2} \times \frac{2 \tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ} = \frac{1}{2} \tan 45^\circ = \frac{1}{2}, \text{ 故 B 错}$$

$$\text{误; } \cos^4 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{\pi}{8} = \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} \right) \cdot \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} - \right.$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} \left. \right) = \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\cos^2 75^\circ + \cos^2 15^\circ + \cos 15^\circ \sin 15^\circ = \sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ + \frac{1}{2} \sin 30^\circ =$$

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \text{ 故 D 正确. 故选 ACD.]}$$

$$6. \text{ AC } \quad [\text{由题意, 易得 } \alpha + \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), 2\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

$$\text{所以 } \sin 2\alpha = \sqrt{1 - \cos^2 2\alpha} = \frac{12}{13}, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } \cos(\alpha - \beta) = \cos[2\alpha - (\alpha + \beta)]$$

$$= \cos 2\alpha \cos(\alpha + \beta) + \sin 2\alpha \sin(\alpha + \beta)$$

$$= \left(-\frac{5}{13}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \frac{12}{13} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{29\sqrt{5}}{65}, \text{ 故 B 错误;}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] = \frac{1}{2} \times$$

$$\left(-\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{29\sqrt{5}}{65}\right) = \frac{8\sqrt{5}}{65}, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$= \frac{1}{2} \times \left[\frac{29\sqrt{5}}{65} - \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \right] = \frac{21\sqrt{5}}{65},$$

$$\text{所以 } \tan \alpha \tan \beta = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{21}{8}, \text{ 故 D 错误. 故选 AC.]}$$

$$7. -1 \quad [\sin 40^\circ (\tan 10^\circ - \sqrt{3})$$

$$= \sin 40^\circ \left(\frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} - \sqrt{3} \right)$$

$$= \sin 40^\circ \cdot \frac{\sin 10^\circ - \sqrt{3} \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$= \frac{2\sin 40^\circ \left(\frac{1}{2} \sin 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 10^\circ \right)}{\cos 10^\circ}$$

$$= \frac{2\sin 40^\circ \sin(10^\circ - 60^\circ)}{\cos 10^\circ} = \frac{-2\sin 40^\circ \sin 50^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$= \frac{-\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\cos 10^\circ} \times 2 = -\frac{\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ} = -1.]$$

$$8. \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \quad (\text{答案不唯一}) \quad [\text{因为 } \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - \beta),$$

$$\text{所以 } \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\text{所以 } \cos \alpha \sin \beta = 0, \text{ ①}$$

$$\text{又 } \cos(\alpha + \beta) \neq \cos(\alpha - \beta),$$

$$\text{即 } \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \neq \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\text{即 } \sin \alpha \sin \beta \neq 0, \text{ ②}$$

$$\text{结合 ①② 得 } \cos \alpha = 0, \text{ 且 } \sin \alpha \neq 0, \sin \beta \neq 0,$$

$$\text{故可取 } \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}.]$$

$$9. \text{ 解: (1) 由 } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ 得 } \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + \alpha < \frac{3\pi}{4},$$

$$\text{可得 } \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{所以 } \cos 2\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) =$$

$$2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

(2) 由(1)的结论, 可知 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}$,

结合 $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, 解得 $\cos^2 \alpha = \frac{9+4\sqrt{2}}{18}$, $\sin^2 \alpha = \frac{9-4\sqrt{2}}{18}$,

因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

所以 $\cos \alpha = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$, $\sin \alpha = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

由 $\cos \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$,

可得 $\sin \beta = -\sqrt{1-\cos^2 \beta} = -\frac{1}{3}$.

所以 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{4+\sqrt{2}}{6} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} +$

$\frac{4-\sqrt{2}}{6} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, 可得 $\alpha - \beta \in (0, \pi)$,

所以 $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$.

阶段检测(五)

1. A [原式 $= \sin(720^\circ + 270^\circ) \cos(720^\circ - 60^\circ) \tan(360^\circ - 30^\circ) = \sin 270^\circ \cos(-60^\circ) \tan(-30^\circ) = \sin 270^\circ \cos 60^\circ (-\tan 30^\circ) = -1 \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$. 故选 A.]

2. B [$\because \frac{3\pi}{2} < 5 < 2\pi$,

$\therefore \sin 5 < 0, \cos 5 > 0$,

平面内点 P 的坐标为 $(\sin 5, \cos 5)$,

则点 P 位于第二象限.

故选 B.]

3. B [$\because$ 角 α 的终边过点 $P(1, y)$, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$,

$\therefore \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{3}$,

得 $1+y^2=9$, 得 $y^2=8$,

得 $y=\pm 2\sqrt{2}$.

故选 B.]

4. A [因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 且 $\tan \alpha = 3$,

故 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3$, 又 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \left(\frac{\sin \alpha}{3}\right)^2 = 1$,

解得 $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

故选 A.]

5. C [法一(三角变换法): 由题可得 $6\sin \alpha \cos^2 \alpha = 8\sin \alpha \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$, 结合 α 为第二象限角知 $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$,

得 $4\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$. 因为 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 所以 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\frac{1+\sin \alpha}{2-\cos \alpha} = \frac{1+\frac{\sqrt{5}}{5}}{2+\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1+\frac{\sqrt{5}}{5}}{2 \times \left(1+\frac{\sqrt{5}}{5}\right)} =$

$\frac{1}{2}$. 故选 C.

法二(弦化切): 因为 α 为第二象限角, 所以 $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0, \tan \alpha < 0, \sin 2\alpha \neq 0$, 结合 $3\sin 2\alpha \cos \alpha = 8\sin \alpha \cos 2\alpha$, 知 $\cos 2\alpha \neq 0$, 于是得 $3\tan 2\alpha = 8\tan \alpha$, 利用二倍角公式知 $\frac{3 \times 2\tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha} = 8\tan \alpha$, 得 $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$, 则 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha =$

$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\frac{1+\sin \alpha}{2-\cos \alpha} = \frac{1+\frac{\sqrt{5}}{5}}{2+\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}$. 故选 C.]

6. B [由 $\sin \theta (\tan 80^\circ - \sqrt{3}) = \sin 80^\circ \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sin 80^\circ}{\tan 80^\circ - \sqrt{3}} = \frac{\sin 80^\circ}{\frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ} - \sqrt{3}}$

$= \frac{\sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ}{\sin 80^\circ - \sqrt{3} \cos 80^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{4\sin(80^\circ - 60^\circ)} = \frac{1}{4}$,

因为 θ 为锐角, 所以 $\cos \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

所以 $\sin(\theta + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{8}$.

故选 B.]

7. ACD [对于 A, 由 $-\frac{17\pi}{6} = -4\pi + \frac{7\pi}{6}$, 又 $\frac{7\pi}{6}$ 为第三象限角, 所以 $-\frac{17\pi}{6}$ 是第三象限角, 故 A 正确;

对于 B, 经过 30 分钟, 钟表的分针是顺时针转动, 故转过 $-\pi$ 弧度, 故 B 错误;

对于 C, 由题可得 $r = OP = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$,

所以 $\sin \alpha = -\frac{4}{5}, \cos \alpha = -\frac{3}{5}$,

所以 $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{7}{5}$, 故 C 正确;

对于 D, 由题可得扇形所在圆的半径为 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} = 3$, 所以该扇形的

面积为 $\frac{1}{2} \times \pi \times 3 = \frac{3\pi}{2}$, 故 D 正确.

故选 ACD.]

8. ABD [因为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}$, 可得 $\alpha - \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$,

$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{4}{5}$,

所以 $\cos \alpha = \cos\left[\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right]$

$= \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4}$

$= \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}$, 故 A 正确;

可得 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$,

$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{7\sqrt{2}}{10} \times \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{7}{25}$, 故 B 正确;

$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{24}{25}$, 故 C 错误;

$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{5}$, 故 D 正确. 故选 ABD.]

9. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ [由 $\pi < x < \frac{7\pi}{4}$, 得 $\frac{5\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < 2\pi$,

又因为 $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{3}{5}$,

所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\frac{4}{5}$,

所以 $\cos x = \cos\left[\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \frac{\pi}{4}\right]$
 $= \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos\frac{\pi}{4} + \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin\frac{\pi}{4}$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{10}.$

10. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ [由 $\begin{cases} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{2}, \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \end{cases}$ 且 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

解得 $\begin{cases} \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \\ \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \end{cases}$

故 $\sin \theta - \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$

11. 解: (1) 由题意得 $y_1 > 0$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \alpha > 0$,

则 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{3}{5} = \frac{y_1}{1}$,

则 $y_1 = \frac{3}{5}$.

(2) $\frac{2\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sqrt{2+2\cos 2\alpha}}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}$
 $= \frac{\cos \alpha + 1 + \sqrt{4\cos^2 \alpha}}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}$
 $= \frac{\cos \alpha + 1 + \sqrt{4\cos^2 \alpha}}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{3\cos \alpha + 1}{\sin \alpha - \cos \alpha}$
 $= \frac{3 \times \frac{4}{5} + 1}{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}} = -17.$

12. 解: 由题易知当 $x=2$ 时, $f(\alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

当 $x=4$ 时, $f(\alpha) = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$.

$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$,

$\therefore -1 \leq \sin 2\alpha \leq 1, \therefore 0 \leq \sin^2 2\alpha \leq 1$,

$\therefore \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha \leq 1$, 即 $f(\alpha) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

当 $x=6$ 时,

$f(\alpha) = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3$
 $= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha)$

$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha - \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$.

猜想: 当 $x=2k, k \in \mathbf{N}_+$ 时, $f(\alpha)$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2^{k-1}}, 1\right]$.

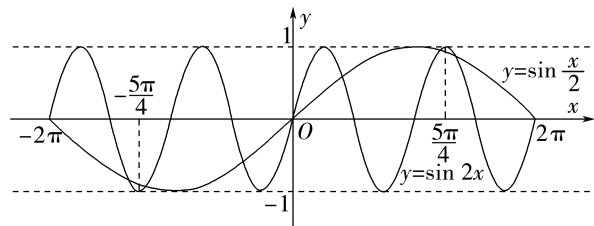
课时作业(三十三)

1. D [根据题意, $y = \sin 2x$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, $y = \sin \frac{x}{2}$

的最小正周期为 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$,

采用“五点法”作图, 在同一直角坐标系中画出函数 $y = \sin 2x$

和 $y = \sin \frac{x}{2}$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上的图象, 如图所示,



观察图象, 可得两函数图象在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有 9 个交点. 故选 D.]

2. C [由已知, 得 $a - \frac{\pi}{3} = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $a = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$,

因为 $a > 0$, 所以取 $k=0$, 得 a 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$. 故选 C.]

3. C [因为 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$,

所以 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$,

所以 $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$,

所以 $-\sqrt{3}\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in \left[-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right]$,

所以 $1 - \sqrt{3} \leq -\sqrt{3}\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 \leq \frac{5}{2}$,

所以 $f(x)$ 的值域为 $\left[1 - \sqrt{3}, \frac{5}{2}\right]$.

故选 C.]

4. D [对于 A, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $2x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,

由正弦函数的性质, 可知 $y = \sin 2x$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,

可知 A 项不正确;

对于 B, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $2x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,

由余弦函数的性质, 可知 $y = \cos 2x$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,

可知 B 项不正确;

对于 C, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $y = |\cos x| = \cos x$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

上单调递减, 可知 C 项不正确;

对于 D, 函数 $y = |\sin x|$ 的最小正周期为 π ,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $y = |\sin x| = \sin x$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递

增, 可知 D 项正确.

故选 D.]

5. C [由题意得 $\begin{cases} 1 - 2\cos x \geq 0, \\ \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0, \end{cases}$

得 $\begin{cases} \cos x \leq \frac{1}{2}, \\ \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$

$$\text{解得} \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \\ \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{即 } \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

又 $x \in [0, 2\pi]$, 所以 $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$. 故选 C.]

6. **AB** [选项 C 中, 函数 $y = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi, \text{故排除 C; 将 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 依次代入选项 A, B, D 中的}$$

解析式, 求得函数值分别为 $-\frac{1}{2}, 2, 1$, 故 A, B 正确, D 错误.

故选 AB.]

7. **ACD** [对于 A, 函数 $f(x) = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期

$$T = \frac{\pi}{2}, \text{所以 A 正确; 对于 B, 令 } 2x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{得}$$

$$x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{即函数 } f(x) \text{ 的定义域为 } \left\{x \mid x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}, \text{所以 B 错误; 对于 C, 令 } 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{解得}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}, \text{所以函数 } f(x) \text{ 的图象关于点 } \left(\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, 0\right), k \in \mathbf{Z} \text{ 对称, 所以 C 正确; 对于 D, 令 } k\pi - \frac{\pi}{2} < 2x -$$

$$\frac{\pi}{4} < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{解得 } \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} < x < \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}, \text{故函}$$

数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\right), k \in \mathbf{Z}$, 所以 D 正确.

故选 ACD.]

8. **ACD** [对于 A, 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T ,

$$\text{则 } f(x+T) = f(x),$$

$$\text{即 } \cos 2(x+T) + 2\sin(x+T) = \cos 2x + 2\sin x, \text{则}$$

$$\begin{cases} 2T = 2k_1\pi, \\ T = 2k_2\pi, \end{cases} \quad k_1, k_2 \in \mathbf{N}^*,$$

所以最小正周期 $T = 2\pi$, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $f(x)$ 为连续函数且定义域为 $\mathbf{R}$, 所以若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(0) = 0$,

而 $f(0) = \cos 0 + 2\sin 0 = 1 \neq 0$, 所以 $f(x)$ 不是奇函数, 故 B 错误;

$$\text{对于 C, } f(\pi-x) = \cos[2(\pi-x)] + 2\sin(\pi-x) = \cos(2\pi-2x) + 2\sin x = \cos 2x + 2\sin x = f(x),$$

故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, C 正确;

$$\text{对于 D, 因为 } f(x) = \cos 2x + 2\sin x = 1 - 2\sin^2 x + 2\sin x = -2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2},$$

$$\text{当 } x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 时, } \sin x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \text{ 因为 } y = -2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \text{ 在 } t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ 上单调递减, } t = \sin x \text{ 在 } x \in$$

$$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 上单调递增,}$$

所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 故 D 正确. 故选 ACD.]

9. $\frac{3\pi}{2}$ 1 [若 $a=0$, 则 $f(x)$ 为常函数, 不符合题意, 故 $a \neq 0$.

由 $f(-x) = f(x)$ 知 $2\sin(-ax + \theta) = 2\sin(ax + \theta)$, 故 $\cos \theta \sin ax = 0$, 因为 $\sin ax$ 不恒为 0, 故 $\cos \theta = 0$, 由 $0 \leq \theta < 2\pi$ 得 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $\theta = \frac{3\pi}{2}$. 因为 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 所

以最小正周期 $T = \frac{2\pi}{|a|} \geq \pi$, 即 $|a| \leq 2$, 则 $|a| = 1$ 或 $|a| = 2$.

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) = 2\sin\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos ax = 2\cos |a|x$, 为

偶函数, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 不符合题意.

当 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 时, $f(x) = 2\sin\left(ax + \frac{3\pi}{2}\right) = -2\cos ax$, 为偶函数,

$f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 符合题意.

$$\text{故 } \theta = \frac{3\pi}{2}, f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2\cos \frac{2\pi}{3}a = 1.]$$

10. $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ [由已知得, $y = 1 - \cos^2 x + 2\cos x = -(\cos x -$

$$1)^2 + 2, \text{令 } t = \cos x, \text{得 } y = -(t-1)^2 + 2, \text{显然当 } t = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \text{ 时, } y = -\frac{1}{4}, \text{当 } t = 1 \text{ 时, } y = 2, \text{又由 } x \in$$

$$\left[-\frac{2\pi}{3}, \alpha\right] \text{ 可知 } \cos x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right], \text{可使函数的值域为}$$

$$\left[-\frac{1}{4}, 2\right], \text{所以 } \alpha \geq 0, \text{且 } \alpha \leq \frac{2\pi}{3}, \text{从而可得 } \alpha \text{ 的取值范围}$$

$$\text{是 } \left[0, \frac{2\pi}{3}\right].]$$

11. 解: (1) 函数 $f(x) = a \sin \omega x \cos \omega x = \frac{a}{2} \sin 2\omega x$, 故无论 a 和 ω 取

何值, 函数 $f(x)$ 都不可能为偶函数, 故排除 ②;

$$\text{若选 ①③ 时, } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{2} \sin \frac{\pi\omega}{2} = 1, \text{故 } \frac{a}{2} = 1, \text{解得 } a = 2, \text{且}$$

$$\frac{\pi\omega}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}), \text{解得 } \omega = 4k + 1 (k \in \mathbf{Z}), \text{故函数 } f(x)$$

存在且不唯一, 故不合题意, 舍去;

$$\text{若选 ①④ 时, } \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}, \text{解得 } T = \pi, \text{故 } \omega = 1, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{2} \sin \frac{\pi}{2} =$$

$$1, \text{故 } \frac{a}{2} = 1, \text{解得 } a = 2, \text{故函数 } f(x) = \sin 2x;$$

$$\text{若选 ③④ 时, } \frac{a}{2} = 1, \text{解得 } a = 2, \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}, \text{解得 } T = \pi, \text{故 } \omega =$$

$$1, \text{所以函数 } f(x) \text{ 唯一存在, 函数 } f(x) = \sin 2x.$$

$$(2) \text{利用 (1) 的结论, } g(x) = \sin 2x - 2\cos^2 x + 1$$

$$= \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{整理得 } -\frac{\pi}{8} + k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbf{Z},$$

由于 $x \in (0, \pi)$,

当 $k=0$ 和 $k=1$ 时, 函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0, \frac{3\pi}{8}\right]$ 和

$$\left[\frac{7\pi}{8}, \pi\right).$$

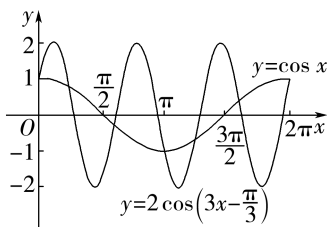
课时作业(三十四)

$$1. \text{B} [\because y = \sin 2x = \sin \left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right],$$

∴将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $y = \sin 2x$ 的图象.

故选 B.]

2. C [根据“五点法”作图,画出函数 $y = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$ 与 $y = \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图象,



观察图象,可知曲线 $y = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$ 与 $y = \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有 7 个交点.

故选 C.]

3. D [根据题中图象知 $\begin{cases} A+b=4, \\ b-A=0, \end{cases}$

所以 $A=2, b=2, T=4 \times \left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) = \pi$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$,

又函数图象经过最高点 $\left(\frac{\pi}{6}, 4\right)$,

代入函数 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi) + 2$,

得 $\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 1$,

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$,

所以 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$. 故选 D.]

4. A [因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增且 $x = \frac{\pi}{12}$ 为 $f(x)$

图象的一条对称轴, 所以 $\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{\pi}{12} - \left(-\frac{5\pi}{12}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{12}\right) =$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\omega + \varphi\right) = 1$, 得 $0 < \omega \leq 2$, 且 $\frac{\pi}{12}\omega + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi (k_1 \in$

$\mathbf{Z})$. ①

因为 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心, 所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

$\sin\left(\frac{\pi}{3}\omega + \varphi\right) = 0$, 得 $\frac{\pi}{3}\omega + \varphi = k_2\pi (k_2 \in \mathbf{Z})$. ②

由①②得 $\omega = -2 + 4(k_2 - 2k_1) (k_1, k_2 \in \mathbf{Z})$, 结合 $0 < \omega \leq 2$,

得 $\omega = 2$, 则 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi (k_1 \in \mathbf{Z})$, 又 $-\pi < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi =$

$\frac{\pi}{3}$, 故 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in$

$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$, 所以 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.]

5. BD [$y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到

$y_1 = \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象,

再将 $y_1 = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上各点的横坐标伸长为原来

的 2 倍(纵坐标不变), 得 $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

A 选项, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 0$, 故 $x = \frac{2\pi}{3}$ 不是 $f(x)$ 的

图象的一条对称轴, A 错误;

B 选项, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = 1$, 故 $x = \frac{\pi}{6}$ 为函数 $f(x)$ 的

图象的一条对称轴, B 正确;

C 选项, $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = -1$, 故 $x = \frac{7\pi}{6}$ 为函数 $f(x)$ 的

图象的一条对称轴, C 错误;

D 选项, $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 0$,

故 $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 为函数 $f(x)$ 的图象的一个对称中心, D 正确. 故选 BD.]

6. BC [由题图可知 $A=2, \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{T}{4}$,

∴ $T = \pi, \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$, 故 A 错误;

根据 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$ 的图象经过点 $\left(\frac{\pi}{12}, 2\right)$,

可得 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi\right) = 2$, 所以 $\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

结合 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 解得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 可得 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin 0 = 0$, 故 B 正确;

将函数 $y = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 得到的图象对应的函数为

$y = 2\cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) =$

$2\cos\left(-2x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$, 故 C 正确;

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$,

根据正弦函数的性质, 可知 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增, 在

$\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,

结合 $f(0) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}, f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}$, 可知若

$f(x) = m$ 在 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有且只有一个实数根, 则 m 的取

值范围是 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup \{2\}$, 故 D 错误.

故选 BC.]

7. $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$ [由 $f(x) = A\sin(\omega x +$

$\varphi)$ 的图象知, $A=2, T=2 \times \left[\frac{5\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right)\right] = \pi$, 所以 $\omega =$

$\frac{2\pi}{T} = 2$,

由 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = 2$, 得 $2 \times \left(-\frac{\pi}{12}\right) + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得

$\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

因为 $|\varphi| < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $2x + \frac{2\pi}{3} \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$,

令 $2x + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$, 解得 $x = \frac{5\pi}{12}$,

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调递增区间为 $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$.

8.4 6 [对于函数 $f(t) = 28 + A\sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{3\pi}{4}\right)$ ($A > 0$), 其最

小正周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}} = 16 < 24$, 最大值为 $A + 28$, 最小值为

$-A + 28$, 因为这天的最大温差为 8°C ,

所以 $(A + 28) - (-A + 28) = 2A = 8$, 解得 $A = 4$.

令 $f(t) \geq 30$, 则 $4\sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{3\pi}{4}\right) + 28 \geq 30$,

即 $\sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{3\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2}$,

因为 $t \in [0, 24)$, 所以 $\frac{\pi}{8}t + \frac{3\pi}{4} \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}\right)$,

所以 $\frac{3\pi}{4} \leq \frac{\pi}{8}t + \frac{3\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{6}$ 或 $\frac{13\pi}{6} \leq \frac{\pi}{8}t + \frac{3\pi}{4} \leq \frac{17\pi}{6}$, 解得 $t \in \left[0, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{34}{3}, \frac{50}{3}\right]$, 所以一天中需要降温的时长为 $\frac{2}{3} + \left(\frac{50}{3} - \frac{34}{3}\right) = 6$ h.]

9. 解: (1) 由题图可知 $A = 1$, $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega}$, 得 $\omega = 2$,

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 1$, 即 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$),

所以 $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$,

所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

(2) 将 $f(x)$ 图象上各点纵坐标保持不变, 横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$,

得到 $y = \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 再将所得图象上各点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,

得到 $g(x) = \sin\left[4\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right]$ 的图象,

可得 $g(x) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 4x$,

由 $4x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), 得 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$ ($k \in \mathbf{Z}$),

所以 $g(x)$ 的图象的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, 0\right)$ ($k \in \mathbf{Z}$),

令 $2k\pi \leq 4x \leq 2k\pi + \pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), 得 $\frac{k\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 所

以 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right]$ ($k \in \mathbf{Z}$).

阶段检测(六)

1. B [将函数 $g(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 可得函数 $f(x) = \cos 2x$ 的图象, 故选 B.]

2. A [对于 A, $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 其最小正周

期为 2π , A 正确; 对于 B, $y = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, 其最小正周期为 π , B 错误; 对于 C, $y = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, 为常值函数, 不存在最小正周期, C 错误; 对于 D, $y = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$, 其最小正周期为 π , D 错误, 故选 A.]

3. A [$f(x) = \sin\left[3\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \sin(3\omega x + \pi) = -\sin 3\omega x$,

由 $T = \frac{2\pi}{3\omega} = \pi$, 得 $\omega = \frac{2}{3}$,

即 $f(x) = -\sin 2x$, 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, $2x \in \left[-\frac{\pi}{6},$

$\frac{\pi}{3}\right]$, $\sin 2x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$,

$\therefore -\sin 2x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right]$, 即 $f(x) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right]$,

所以 $f(x)_{\min} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选 A.]

4. B [对于 A, 根据正切函数的周期公式 $T = \frac{\pi}{|\omega|}$, 得函数

$f(x)$ 的最小正周期为 2π , 选项 A 错误;

对于 B, 根据正切函数图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$, 令 $\frac{1}{2}x +$

$\frac{\pi}{3} = \frac{k\pi}{2}$, 解得 $x = k\pi - \frac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$,

所以当 $k = 1$ 时得到 $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$, 选项 B 正确;

对于 C, 令 $\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,

解得 $x \neq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,

即 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 选项 C 错误;

对于 D, 当 $x = \frac{7\pi}{3} \in \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right)$ 时, $\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$, 函数没有意义, 选项 D 错误.

故选 B.]

5. D [由题意, $f(-x) = \cos(-x) - \cos(-2x) = \cos x - \cos 2x = f(x)$, 所以该函数为偶函数.

又 $f(x) = \cos x - \cos 2x = -2\cos^2 x + \cos x + 1 = -2\left(\cos x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$,

所以当 $\cos x = \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\frac{9}{8}$. 故选 D.]

6. B [因为 $f(x) = \sqrt{2}\sin x + 4\cos x = 3\sqrt{2}\sin(x + \varphi)$, 其中 $\sin \varphi =$

$\frac{4}{3\sqrt{2}}$, $\cos \varphi = \frac{1}{3}$,

又当 $x = \theta$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值, 所以 $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,

所以 $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,

则 $\tan \theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi + 2k\pi\right)$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

故选 B.]

7. AB [由题意, 可得 $\frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1 = \frac{T}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega} = 2$, 所以 $\omega = \pi$,

由题意可得图象过点 $\left(\frac{5}{6}, -1\right)$, 可得 $-1 = \cos\left(\pi \times \frac{5}{6} + \varphi\right)$, 解得 $\frac{5\pi}{6} + \varphi = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 可得 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 所

以 $f(x) = \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right)$, 故 C 错误;

由 $f\left(x + \frac{1}{3}\right) = \cos\left[\pi\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$

$= -\sin \pi x$, $f\left(x + \frac{1}{3}\right)$ 为奇函数, 故 A 正确;

由 $f\left(x + \frac{5}{6}\right) = \cos\left[\pi\left(x + \frac{5}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \cos(\pi x + \pi)$

$= -\cos \pi x$, $f\left(x + \frac{5}{6}\right)$ 是偶函数, 故 B 正确;

$f\left(\frac{2026}{5}\right) = f\left(404 + \frac{6}{5}\right) = f\left(\frac{6}{5}\right) = \cos\left(\pi \times \frac{6}{5} + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \cos \frac{41\pi}{30}$, $f\left(\frac{2025}{7}\right) = f\left(288 + \frac{9}{7}\right) = f\left(\frac{9}{7}\right) =$

$\cos\left(\pi \times \frac{9}{7} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{61\pi}{42}$,

因为函数 $y = \cos x$ 在 $x \in (\pi, 2\pi)$ 上单调递增,

所以 $\cos \frac{41\pi}{30} < \cos \frac{61\pi}{42}$,

所以 $f\left(\frac{2026}{5}\right) < f\left(\frac{2025}{7}\right)$, 故 D 错误. 故选 AB.]

8. BC [A 选项, 令 $f(x) = \sin 2x = 0$, 解得 $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 即为 $f(x)$ 的零点,

令 $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, 解得 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}$,

即为 $g(x)$ 的零点,

显然 $f(x), g(x)$ 的零点不同, A 选项错误;

B 选项, 显然 $f(x)_{\max} = g(x)_{\max} = 1$, B 选项正确;

C 选项, $f(x), g(x)$ 的最小正周期均为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, C 选项正确;

D 选项, 根据正弦函数的性质, $f(x)$ 的图象的对称轴满足

$2x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 即 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$,

$g(x)$ 的图象的对称轴满足 $2x - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 即 $x =$

$\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}$,

显然 $f(x), g(x)$ 图象的对称轴不同, D 选项错误.

故选 BC.]

9. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ [因为函数 $f(x) = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{3} + \varphi\right)$ 是奇函数,

所以 $f(0) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 0$,

所以 $\frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$,

则 $\tan \varphi = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.]

10. $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ [$\because \frac{1}{2}T = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}, \omega > 0$,

$\therefore \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$,

$\therefore \omega = 2$.

又图象过点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 且 $\frac{\pi}{3}$ 为单调递减区间上的零点,

$\therefore \frac{\pi}{3}\omega + \varphi = \pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

$\therefore \varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 而 $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$,

$\therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$,

$\therefore$ 点 $P(\omega, \varphi)$ 的坐标为 $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$.]

11. 解: (1) 因为 $f(x) = \sin \omega x \cos \varphi + \cos \omega x \sin \varphi$,

所以 $f(0) = \sin(\omega \cdot 0) \cos \varphi + \cos(\omega \cdot 0) \cdot \sin \varphi =$

$\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

(2) 因为 $f(x) = \sin \omega x \cos \varphi + \cos \omega x \sin \varphi = \sin(\omega x + \varphi)$, 所以 $f(x)$ 的最大值为 1, 最小值为 -1.

若选条件①: 因为 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的最大值为 1, 最小值为 -1, 所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$ 无解, 故条件①不能使函数 $f(x)$ 存在.

若选条件②: 因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 且

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1, f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -1$,

所以 $\frac{T}{2} = \frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \pi$, 所以 $T = 2\pi, \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$,

所以 $f(x) = \sin(x + \varphi)$.

又因为 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -1$, 所以 $\sin\left(-\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = -1$,

所以 $-\frac{\pi}{3} + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$. 所以 $\omega = 1, \varphi = -\frac{\pi}{6}$.

若选条件③: 因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 在

$\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $x = -\frac{\pi}{3}$ 处取得最

小值 -1, 即 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -1$. 以下与条件②相同.

12. 解: (1) 因为 $f(x) = \cos \frac{\omega x}{2} \sin \frac{\omega x}{2} = \frac{1}{2} \sin \omega x$, 且 $y = f(x)$ 的最

小正周期是 4π ,

所以 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi$, 解得 $\omega = \frac{1}{2}$,

所以 $f(x) = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}x$.

令 $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

解得 $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}$,

即 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}$.

(2) 由 (1) 知 $f(x) = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$, 所以 $g(x) = [f(x)]^2 +$

$$\sqrt{3}f(-x)f(\pi-x) = \frac{1}{4} \sin^2 \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin\left(-\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{8} \sin x$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right)$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{令 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{得 } 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{所以 } g(x) \text{ 的单调递减区间为 } \left[2k\pi - \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}.$$

课时作业(三十五)

1. B [由余弦定理得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B = 49$, 整理得 $BC^2 - 8BC + 15 = 0$, 解得 $BC = 3$ 或 $BC = 5$, 经检验均符合题意.

故选 B.]

2. D [对于 A, 已知两角及其中一角的对边, 三角形确定, 只有一解; 对于 B, 已知两边及其夹角, 用余弦定理, 只有一解; 对于 C, 已知两边及其中一边的对角, 且已知的是两边中较大边所对的角, 所以三角形有一解; 对于 D, $b \sin A = 16 \sin 45^\circ = 8\sqrt{2} < a < b$, 有两解, 故选 D.]

3. C [由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

$$\text{得 } \frac{4}{\sin 60^\circ} = \frac{4\sqrt{6}}{\sin B},$$

$$\text{解得 } \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 因为 } a > b, \text{ 所以 } A > B, \text{ 又因为 } 0^\circ < B <$$

120° , 所以 $B = 45^\circ$. 故选 C.]

4. B [在 $\triangle ABC$ 中, $4c^2 + a^2 = b^2$,

$$\text{由余弦定理得 } b^2 = 4c^2 + a^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$\text{则 } 3c^2 = -2ac \cos B > 0,$$

因此 $\cos B < 0$, 即 B 为钝角, 所以 $\triangle ABC$ 为钝角三角形.

故选 B.]

5. D [因为 $A = 105^\circ, B = 45^\circ$, 所以 $C = 180^\circ - 105^\circ - 45^\circ = 30^\circ$,

$$\text{由正弦定理 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 得 } c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2},$$

$$\text{因为 } \sin A = \sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ)$$

$$= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} =$$

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{2}. \text{ 故选 D.}]$$

6. ABD [在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A : (\sin A + \sin B) : (\sin B + \sin C) = 2 : 5 : 7$,

由正弦定理得 $a : (a+b) : (b+c) = 2 : 5 : 7$, 设 $a = 2t (t > 0)$,

则 $a+b=5t, b+c=7t$, 得 $b=3t, c=4t$, 因此 $a : b = 2 : 3$, $a : c = 1 : 2$, A 和 B 正确;

由 $c > b > a$, 得 C 为 $\triangle ABC$ 的最大内角, 而 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{1}{4} < 0$, 因此 C 为钝角,

即 $\triangle ABC$ 是钝角三角形, C 错误, D 正确.

故选 ABD.]

7. ABD [对于 A, $a = \sqrt{15}, b = 4, c = 6$, 根据 $\sqrt{15} + 4 > 6$, 可知 a, b, c 可以构成三角形,

结合余弦定理, 可得角 A, B, C 均有唯一解, 所以 $\triangle ABC$ 有唯一解, A 项符合题意;

$$\text{对于 B, 由 } A = \frac{\pi}{3}, B = \frac{\pi}{6}, \text{ 可得 } C = \pi - A - B = \frac{\pi}{2},$$

所以 $\triangle ABC$ 是以 c 为斜边的直角三角形, 结合 $a = 2$, 可知 $\triangle ABC$ 有唯一解, B 项符合题意;

$$\text{对于 C, } b \sin A = 4 \times \frac{\sqrt{11}}{4} = \sqrt{11},$$

$$\text{可得 } a = 2\sqrt{3} \in (b \sin A, b),$$

所以 $\triangle ABC$ 有两解, C 项不符合题意;

$$\text{对于 D, 由余弦定理得 } b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$$

$$\text{即 } 16 = c^2 + 12 - 2 \cdot 2\sqrt{3}c \cdot \frac{1}{4},$$

$$\text{整理得 } c^2 - \sqrt{3}c - 4 = 0, \text{ 解得 } c = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{19}}{2} (\text{舍负}),$$

所以 $\triangle ABC$ 有唯一解, D 项符合题意.

故选 ABD.]

8. $\frac{3\sqrt{15}}{16}$ [由 $\cos A = -\frac{1}{4}$ 得 $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$, 由正弦定理可得

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}, \text{ 所以 } \sin B = \frac{AC \sin A}{BC} = \frac{3\sqrt{15}}{16}.]$$

9. $\frac{\pi}{3}$ 4 [由 $a \cos C + \sqrt{3}a \sin C - b - c = 0$ 及正弦定理得

$$\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C - \sin B - \sin C = 0. \text{ 因为 } \sin B = \sin(\pi - A - C) = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C, \text{ 所以}$$

$$\sqrt{3} \sin A \sin C - \cos A \sin C - \sin C = 0. \text{ 由于 } \sin C \neq 0, \text{ 所以}$$

$$\sqrt{3} \sin A - \cos A - 1 = 0, \text{ 所以 } \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}. \text{ 又 } 0 < A < \pi,$$

$$\text{故 } A = \frac{\pi}{3}. \text{ 由题意知 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{3},$$

$$\text{故 } bc = 4 \text{ ①. 而 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \text{ 且 } a = 2, \text{ 故 } b^2 + c^2 = 8$$

$$\text{②, 由 ①② 得 } b = c = 2, \text{ 所以 } b + c = 4.]$$

10. 解: (1) 利用正弦定理化简已知等式可得

$$\sqrt{3} \sin B \sin A = \sin A \cos B,$$

$$\text{又 } \sin A > 0, \text{ 可得 } \sqrt{3} \sin B = \cos B,$$

$$\text{可得 } \frac{\sin B}{\cos B} = \tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}, B \in (0, \pi),$$

$$\text{可得 } B = \frac{\pi}{6}.$$

(2) 因为 $\sin C = \sqrt{3} \sin A$, 由正弦定理得 $c = \sqrt{3}a$,

又因为 $b = 3$,

由余弦定理可得 $b^2 = 9 = a^2 + 3a^2 - 2 \times a \times \sqrt{3}a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = a^2$,

所以 $a = 3, c = \sqrt{3}a = 3\sqrt{3}$.

11. 解: (1) 由题知 $\sin 2C = \sqrt{3} \sin C$,

即 $2 \sin C \cos C = \sqrt{3} \sin C, \therefore C \in (0, \pi)$,

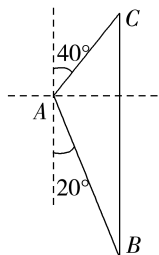
$\therefore \sin C > 0, \therefore \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}, C = \frac{\pi}{6}$.

(2) $\because S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{3}, \therefore \frac{1}{2}ab \sin C = 6\sqrt{3}$, 解得 $a = 4\sqrt{3}$, 由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \therefore c^2 = 48 + 36 - 2 \times 4\sqrt{3} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$, 解得 $c = 2\sqrt{3}$ (舍负), 所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a + b + c = 6\sqrt{3} + 6$.

课时作业(三十六)

1. C [在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理 $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD$, 得 $AB^2 + 2AB - 8 = 0$, 解得 $AB = 2$ 或 $AB = -4$ (舍去), 即 $AB = AD, \therefore \angle ABD = \frac{\pi}{6}$. 又 $\triangle BCD$ 是等边三角形, $\therefore \angle ABC = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 又 $BC = BD = 2\sqrt{3}$, $\therefore$ 由勾股定理可得 $AC = 4, \therefore \triangle ABC$ 的周长为 $2 + 4 + 2\sqrt{3} = 6 + 2\sqrt{3}$. 故选 C.]

2. D [记轮船行驶到某处的位置为 A, 灯塔的位置为 B, 20 分钟后轮船的位置为 C, 如图所示, 则 $AB = 10, AC = 6, \angle CAB = 120^\circ$, 所以 $BC^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \times 10 \times 6 \times (-\frac{1}{2}) = 196$, 所以 $BC = 14$. 故 20 分钟后, 轮船与灯塔的距离为 14 n mile. 故选 D.]



3. D [在 $\triangle ACD$ 中, $\angle ACD = 30^\circ, \angle ADC = 120^\circ$, 又 $\angle ADB = 75^\circ$, 所以 $\angle BDC = 45^\circ, \angle CAD = 30^\circ, \angle ACD = \angle CAD = 30^\circ$, 所以 $AD = CD = 10\sqrt{3}$, 在 $\triangle BCD$ 中, $\angle CBD = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$, 由正弦定理得 $BD = \frac{CD \sin \angle BCD}{\sin \angle CBD} = \frac{10\sqrt{3} \sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{6}$, 在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得 $AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos \angle ADB = (10\sqrt{3})^2 + (5\sqrt{2} + 5\sqrt{6})^2 - 2 \times 10\sqrt{3} \times (5\sqrt{2} + 5\sqrt{6}) \times \cos 75^\circ = 500$, 所以 $AB = 10\sqrt{5}$, 即基站 A, B 之间的距离为 $10\sqrt{5}$ km. 故选 D.]

4. A [在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $AB = 10, \angle AEB = 30^\circ$, 则 $BE = 20$, 在 $\triangle BED$ 中, $\angle DBE = 45^\circ, \angle BED = 105^\circ$, 所以 $\angle BDE = 30^\circ$, 由正弦定理得 $\frac{DE}{\sin \angle DBE} = \frac{BE}{\sin \angle BDE}$, 即 $\frac{DE}{\sin 45^\circ} = \frac{20}{\sin 30^\circ}$, 解得 $DE = 20\sqrt{2}$, 所以在等腰直角 $\triangle DCE$ 中, 直角边 $DC = 20$. 故选 A.]

5. 200 [在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 45^\circ$.

设 $AB = h$, 则 $BC = h$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\angle ADB = 30^\circ$, 所以 $BD = \sqrt{3}h$.

在 $\triangle BCD$ 中, $\angle CBD = 30^\circ, CD = 200$ m,

由余弦定理可得 $CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \cdot BD \cdot$

$\cos \angle CBD$, 即 $40\,000 = h^2 + 3h^2 - 2h \cdot \sqrt{3}h \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$,

解得 $h = 200$ (舍负),

所以塔高 $AB = 200$ m.]

6. $\sqrt{3}$ [在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC = 1$ km, $C = 120^\circ$, 得 $A = 30^\circ$,

由正弦定理 $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$, 得 $AB = \frac{BC \sin C}{\sin A} = 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (km).]

7. 解: (1) 由题意知 $AB = 10(3 + \sqrt{3})$ n mile,

$\angle DBA = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ, \angle DAB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$,

可得 $\angle ADB = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ$,

$\sin 105^\circ = \sin(45^\circ + 60^\circ) = \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$,

在 $\triangle DAB$ 中, 由正弦定理得 $\frac{DB}{\sin \angle DAB} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}$, 即

$DB = \frac{AB \sin \angle DAB}{\sin \angle ADB} = \frac{10(3 + \sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = 20\sqrt{3}$ (n mile).

(2) 在 $\triangle DBC$ 中, $\angle DBC = \angle DBA + \angle ABC = 30^\circ + (90^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$,

$BC = 40\sqrt{3}$ n mile,

由余弦定理得 $CD^2 = BD^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC \cdot \cos \angle DBC$

$= 1\,200 + 4\,800 - 2 \times 20\sqrt{3} \times 40\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 3\,600$,

可得 $CD = 60$ (n mile), 则需要的时间 $t = \frac{60}{30} = 2$ (h).

所以救援船到达 D 点需要 2 h.

阶段检测(七)

1. B [$\because A = \frac{\pi}{3}, a = \sqrt{3}, b = 1$, 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

得 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$,

又 $\because B \in (0, \pi)$, 且 $b < a, \therefore B < A$,

$\therefore B = \frac{\pi}{6}$. 故选 B.]

2. A [在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $a = 5, b = 7, c = 4$,

由余弦定理的推论可得 $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{16 + 25 - 49}{2 \times 4 \times 5}$

$= -\frac{1}{5}$,

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B > 0$,

所以 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$,

因此 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$= 4\sqrt{6}$.

故选 A.]

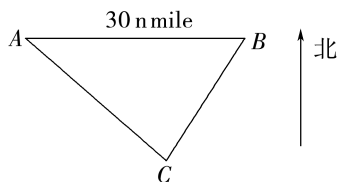
3. B [由正弦定理可将 $(a+c)(\sin A - \sin C) = b(\sin A - \sin B)$ 化为 $(a+c)(a-c) = b(a-b)$, 即 $a^2 + b^2 - c^2 = ab$, 由余弦定理的推论可得

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2},$$

又 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$.

故选 B.]

4. A [根据题意作出示意图如图,



由题意可知 $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle ACB = 75^\circ$, $AB = 30$ n mile,
 $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$
 $= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4},$

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理可知 $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$, 即
 $\frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{30}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}},$

解得 $BC = 30(\sqrt{3} - 1)$ (n mile).

甲船的行驶时间为 $30 \div 15 = 2$ (h),

所以乙船的速度为 $30(\sqrt{3} - 1) \div 2 = 15(\sqrt{3} - 1)$ (n mile/h).
 故选 A.]

5. C [因为 $B = \frac{\pi}{3}$, $b^2 = \frac{9}{4}ac$,

则由正弦定理得

$$\sin A \sin C = \frac{4}{9} \sin^2 B = \frac{1}{3}.$$

由余弦定理可得 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B = a^2 + c^2 - ac =$
 $\frac{9}{4}ac,$

即 $a^2 + c^2 = \frac{13}{4}ac$, 根据正弦定理得 $\sin^2 A + \sin^2 C$

$$= \frac{13}{4} \sin A \sin C = \frac{13}{12},$$

所以 $(\sin A + \sin C)^2 = \sin^2 A + \sin^2 C + 2 \sin A \sin C = \frac{7}{4},$

因为 A, C 为三角形内角,

则 $\sin A > 0, \sin C > 0$, 则 $\sin A + \sin C = \frac{\sqrt{7}}{2}.$

故选 C.]

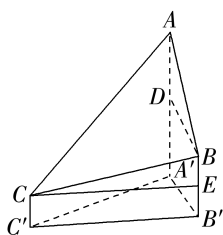
6. B [如图所示, 根据题意过 C 作 $CE \parallel C'B'$, 交 BB' 于 E, 过 B 作 $BD \parallel A'B'$, 交 AA' 于 D, 则 $BE = 100$,

$$C'B' = CE = \frac{100}{\tan 15^\circ}.$$

在 $\triangle A'C'B'$ 中, $\angle C'A'B' = 75^\circ$,

$$\text{则 } BD = A'B' = \frac{C'B' \times \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}.$$

又在 B 点处测得 A 点的仰角为 45° , 所以 $AD = BD =$
 $\frac{C'B' \times \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}$, 所以高度差 $AA' - CC' = AD + BE =$



$$\frac{C'B' \times \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} + 100 = \frac{\frac{100}{\tan 15^\circ} \times \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} + 100 = \frac{100 \sin 45^\circ}{\sin 15^\circ} +$$

$$100 = \frac{100 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right)} + 100 = 100(\sqrt{3} + 1) + 100 \approx 373. \text{ 故}$$

选 B.]

7. BC [由题意可知, $\cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{1}{4}$, B 正确;

对于 A, C, 由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 9 + 16 -$
 $2 \times 3 \times 4 \times \frac{1}{4} = 19,$

得 $c = \sqrt{19}$, 则 $a + b + c = 7 + \sqrt{19}$, A 错误, C 正确;

对于 D, 由余弦定理的推论得 $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} =$
 $\frac{19 + 9 - 16}{2 \times \sqrt{19} \times 3} = \frac{2\sqrt{19}}{19}$, D 错误.

故选 BC.]

8. AD [对于 A, 由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 因为 $\sin B >$
 $\sin C$, 所以 $b > c$, 则 $B > C$, 故 A 正确; 对于 B, 因为 $a = 2\sqrt{6}$,
 $b = 4$, $A = \frac{\pi}{4}$, 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 则 $\sin B =$

$$\frac{b \sin A}{a} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 因为 } a > b, \text{ 所以 } A > B, \text{ 则 } B \in$$

$(0, \frac{\pi}{4})$, 所以三角形有一解, 故 B 错误;

对于 C, 因为 $b \cos B - c \cos C = 0$,

所以 $\sin B \cos B - \sin C \cos C = 0$, 即 $\sin 2B = \sin 2C$, 所以
 $2B = 2C$ 或 $2B + 2C = \pi$, 即 $B = C$ 或 $B + C = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\triangle ABC$

为等腰三角形或直角三角形, 故 C 错误;

对于 D, 因为 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)$, 所以
 $\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{4} \times 2ab \cos C$, 即 $\sin C = \cos C$, 因为 $C \in (0,$
 $\pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{4}$, 故 D 正确.

故选 AD.]

9. $1 + \sqrt{6}$ $\frac{3 - \sqrt{6}}{6}$ [在 $\triangle ABC$ 中, $a = 3, c = 2, A = 60^\circ$,

则 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 即 $3^2 = b^2 + 2^2 - 2b \times 2 \times \cos 60^\circ$,
 所以 $b = 1 + \sqrt{6}$ (舍负),

$$\text{又 } \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$

$$\text{所以 } \cos B = \frac{2^2 + 3^2 - (1 + \sqrt{6})^2}{2 \times 2 \times 3} = \frac{3 - \sqrt{6}}{6}.$$

10. $\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{3}$ [在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $A = \frac{\pi}{3}, B = \frac{\pi}{4}$, 所以
 $C = \frac{5\pi}{12},$

$$\sin C = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4},$$

由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$,

$$\text{则 } AB = \frac{BC \sin C}{\sin A} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{3}.$$

11. 解: 连接 AC, 如图所示.

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 中分别使用余弦定理可得

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos B,$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \times CD \cos D.$$

又因为 $B + D = 180^\circ$,

$$\text{所以 } \cos D = \cos(180^\circ - B) = -\cos B,$$

$$\text{因此 } 2^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \times 2 \times 4\sqrt{2} \cos B = (2\sqrt{5})^2 + 4^2 + 2 \times 2\sqrt{5} \times 4 \cos B.$$

解得 $\cos B = 0$, 因此 $\cos D = 0$, 则 $B = D = 90^\circ$.

$$\text{所以四边形 } ABCD \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \times 2 \times 4\sqrt{2} + \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{5} = 4(\sqrt{2} + \sqrt{5}).$$

12. 解: (1) 由余弦定理, 可知 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = 9 + 12 - 12 = 9$, 所以 $AC = 3$.

$$\text{所以 } \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{9 + 9 - 12}{2 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3}.$$

(2) 如图, 因为 D 在 BA 的延长线上, $AE \perp AC$, 所以 $\angle BAC + \angle DAE = 90^\circ$, 因

$$\text{为 } \cos \angle BAC = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } \sin \angle DAE = \frac{1}{3}.$$

$$\text{因为 } \cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}, B \in (0, \pi),$$

$$\text{所以 } \sin B = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

因为 $DE \parallel BC$, 所以 $\angle B + \angle ADE = 180^\circ$,

$$\text{所以 } \sin \angle ADE = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{在 } \triangle ADE \text{ 中, } \frac{AE}{\sin \angle ADE} = \frac{DE}{\sin \angle DAE}, \text{ 即 } \frac{AE}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}}, \text{ 解得}$$

$$AE = 6.$$

$$\text{在 Rt} \triangle ACE \text{ 中, } CE = \sqrt{AC^2 + AE^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}.$$

课时作业(三十七)

1. D [因为 $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$, 故 A 错误;

因为 $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AB} - \vec{AB} = \mathbf{0}$, 故 B 错误;

因为 $\mathbf{0} - \vec{AB} = -\vec{AB} = \vec{BA}$, 故 C 错误;

根据向量加法的三角形法则可知 $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \mathbf{0}$, 故 D 正确. 故选 D.]

2. A [对于 A, 向量 $\vec{AB}$ 与向量 $\vec{BA}$ 的长度相等, 方向相反, 故正确;

对于 B, 当 a 或 b 为零向量时, 零向量与任意向量平行, 但是方向任意, 故错误;

对于 C, 若 a 与 b 方向相反时, 有 $|a| + |b| = |a - b|$, 若 $|a| + |b| = |a - b|$, 则当 a 或 b 为零向量时, 不能推出 a 与 b 方向相反, 故错误;

对于 D, 当 $a + b = \mathbf{0}$ 时, 因为零向量的方向任意, 所以这时 $a + b$ 的方向不与 a, b 的方向相同, 故错误.

故选 A.]

3. A [若 $a \parallel b$, 则 $a = \lambda b$.

$$\text{若 } 2e_1 - e_2 = \lambda \left(-e_1 + \frac{1}{2}e_2 \right),$$

知 e_1, e_2 是同一平面内两个不共线的向量,

$$\text{则 } \begin{cases} -\lambda = 2, \\ \frac{1}{2}\lambda = -1, \end{cases} \text{ 解得 } \lambda = -2, \text{ 选项 A 正确;}$$

$$\text{若 } e_1 + 2e_2 = \lambda(2e_1 + e_2),$$

知 e_1, e_2 是同一平面内两个不共线的向量,

$$\text{则 } \begin{cases} 2\lambda = 1, \\ \lambda = 2, \end{cases} \lambda \text{ 无解, 选项 B 错误;}$$

$$\text{若 } e_1 - 2e_2 = \lambda(e_1 + 2e_2),$$

知 e_1, e_2 是同一平面内两个不共线的向量,

$$\text{则 } \begin{cases} \lambda = 1, \\ 2\lambda = -2, \end{cases} \lambda \text{ 无解, 选项 C 错误;}$$

$$\text{若 } e_1 - e_2 = \lambda(2e_1 - 4e_2),$$

知 e_1, e_2 是同一平面内两个不共线的向量,

$$\text{则 } \begin{cases} 2\lambda = 1, \\ -4\lambda = -1, \end{cases} \lambda \text{ 无解, 选项 D 错误.}$$

故选 A.]

4. B [$\because \vec{AB} = 3e, \vec{CD} = -3e, \therefore \vec{AB} = -\vec{CD}$,

$\therefore$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

又 $\because |\vec{AD}| = 3, \therefore$ 四边形 ABCD 是菱形. 故选 B.]

5. B [设 $c = \lambda a + \mu b = (\lambda + \mu)m + (\lambda - \mu)n$,

又 $c = 2m - 7n, m, n$ 是两个不共线的非零向量,

$$\text{所以 } \begin{cases} \lambda + \mu = 2, \\ \lambda - \mu = -7, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \lambda = -\frac{5}{2}, \\ \mu = \frac{9}{2}. \end{cases} \text{ 故选 B.}]$$

6. D [因为在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{BD} = 3\vec{DC}$,

$$\text{所以 } \vec{AD} - \vec{AB} = 3(\vec{AC} - \vec{AD}), \text{ 化简得 } \vec{AD} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC},$$

因为 $\vec{AF} = 2\vec{FC} = \frac{2}{3}\vec{AC}$, E 是 AD 的中点,

$$\text{所以 } \vec{EF} = \vec{AF} - \vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AC} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}\right) = \frac{7}{24}\vec{AC} - \frac{1}{8}\vec{AB}.$$

故选 D.]

7. BCD [对于 A, 因为 $\vec{MB} + \vec{DA} + \vec{BM} = \vec{MB} + \vec{BM} + \vec{DA} = \vec{DA}$, 所以 A 错误;

对于 B, 因为 $(\vec{AD} + \vec{MB}) + (\vec{BC} + \vec{CM}) = \vec{AD} + \vec{MB} + \vec{BM} = \vec{AD}$, 所以 B 正确;

对于 C, 因为 $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$, 所以 C 正确;

对于 D, 因为 $\vec{OC} + \vec{CD} + \vec{AO} = \vec{OD} - \vec{OA} = \vec{AD}$, 所以 D 正确. 故选 BCD.]

8. ABC [对于 A, 因为 $EF = \frac{1}{2}BC = CD, EF \parallel CD$, 所以 $\vec{EF} = \vec{CD}$, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $DE \parallel AB$, 所以 $\vec{AB}$ 与 $\vec{DE}$ 共线, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $BD=CD$, 所以 $\overrightarrow{BD}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 是相反向量, 故 C 正确;

对于 D, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 故 D 错误. 故选 ABC.]

9. CD [如图所示,

对于 A, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, 故 A 错误;

对于 B, $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, 故 B 错误;

对于 C, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 故 C 正确;

对于 D, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}=3(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})-\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CB}-3\overrightarrow{CD}$, 故 D 正确.

故选 CD.]

10. $b-a$ $-a-b$ [如图, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=b-a$,

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-a-b$.]

11. 4 [由 $\overrightarrow{BD}=k(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$,

可得 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD})$,

整理得 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\frac{k}{k+1}\overrightarrow{CB}$,

又 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\frac{4}{5}\overrightarrow{CB}$,

所以 $-\frac{k}{k+1}=-\frac{4}{5}$, 解得 $k=4$.]

12. 1 [$\because \overrightarrow{OA}=3a+5b, \overrightarrow{OB}=4a+7b, \overrightarrow{OC}=a+mb$,

$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=a+2b, \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=-2a+(m-5)b$,

$\because A, B, C$ 三点共线,

不妨设 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$,

$\therefore a+2b=\lambda[-2a+(m-5)b]=-2\lambda a+\lambda(m-5)b$,

$\therefore \begin{cases} 1=-2\lambda, \\ 2=\lambda(m-5), \end{cases}$ 解得 $\lambda=-\frac{1}{2}, m=1$.]

课时作业(三十八)

1. D [$\because a=(1,1), b=(1,-1)$,

$\therefore \frac{1}{2}a=(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{3}{2}b=(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$,

$\therefore \frac{1}{2}a-\frac{3}{2}b=(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}+\frac{3}{2})=(-1, 2)$.

故选 D.]

2. C [能作为基底的向量不可以是共线向量,

对于 A, 因为 $e_1=(1,3), e_2=(-2,-6)$, 所以 $1\times(-6)=3\times(-2)$, 故 $e_1\parallel e_2$, 所以不可以作基底, 故 A 错误;

对于 B, 因为 $e_1=(\sqrt{2}, 1), e_2=(2, \sqrt{2})$, 所以 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2=1\times 2$, 故 $e_1\parallel e_2$, 所以不可以作基底, 故 B 错误;

对于 C, 因为 $e_1=(1,2), e_2=(2,-1)$, 所以 $1\times(-1)\neq 2\times$

2, 故 e_1, e_2 不共线, 所以可以作基底, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $e_1=(-3,-4), e_2=(3,4)$, 所以 $-3\times 4=-4\times 3$, 故 $e_1\parallel e_2$, 所以不可以作基底, 故 D 错误.

故选 C.]

3. D [由题意可知 $\overrightarrow{P_1P_2}=(3,-3)$.

若 $\overrightarrow{P_1P}=\frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2}$, 则 P 点坐标为 (2,2);

若 $\overrightarrow{P_1P}=\frac{2}{3}\overrightarrow{P_1P_2}$, 则 P 点坐标为 (3,1).

故选 D.]

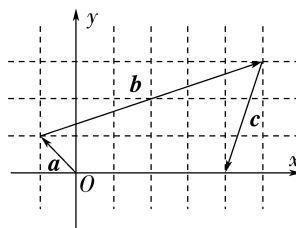
4. A [因为 $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{EF}$,

所以 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD})$,

所以 $\frac{4}{3}\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$, 整理得 $\overrightarrow{AE}=\frac{12}{25}(\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD})=\frac{12}{25}a+\frac{9}{25}b$.

故选 A.]

5. B [建立如图所示的坐标系, 则 $a=(-1,1), b=(6,2), c=(-1,-3)$,



$\therefore c=\lambda a+\mu b$,

$\therefore (-1,-3)=\lambda(-1,1)+\mu(6,2)$,

$\therefore \begin{cases} -\lambda+6\mu=-1, \\ \lambda+2\mu=-3, \end{cases} \therefore \lambda=-2, \mu=-\frac{1}{2}$,

$\therefore \lambda+\mu=-\frac{5}{2}$. 故选 B.]

6. B [因为 D 为 BC 边上靠近点 C 的三等分点, E 为线段 AD (含端点) 上一动点,

所以当 E, D 不重合时, $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{EB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EB}+$

$\frac{2}{3}(\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{EB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EC}$,

因为 $\overrightarrow{ED}=\lambda\overrightarrow{EB}+\mu\overrightarrow{EC}(\lambda, \mu\in\mathbf{R})$,

所以 $\begin{cases} \lambda=\frac{1}{3}, \\ \mu=\frac{2}{3}, \end{cases}$

当 E, D 重合时, $\overrightarrow{ED}=\mathbf{0}$, 此时 $\mathbf{0}=\overrightarrow{ED}=\lambda\overrightarrow{EB}+\mu\overrightarrow{EC}$, $k\in\mathbf{Z}$, 则必有 $\mu=2\lambda$ 成立,

综上, 都有 $\mu=2\lambda$ 成立, 即只有选项 B 始终成立.

故选 B.]

7. AB [$\because a=(1,3), b=(-2,1), \therefore a+b=(-1,4), a-b=(3,2)$,

$b-a=(-3,-2), -a-b=-(a+b)=(1,-4)$.

故选 AB.]

8. **ACD** [对于 A, 因为 $\overrightarrow{OC} = (-2, 1)$, $\overrightarrow{BA} = (2, -1)$, 所以 $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{BA}$,

又直线 OC, BA 不重合, 所以直线 OC 与 BA 平行, 选项 A 正确;

对于 B, 因为 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{CA}$, 所以选项 B 错误;

对于 C, 因为 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = (0, 2) = \overrightarrow{OB}$, 所以选项 C 正确;

对于 D, 因为 $\overrightarrow{AC} = (-4, 0)$, $\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA} = (0, 2) - 2(2, 1) = (-4, 0)$, 所以选项 D 正确. 故选 ACD.]

9. **ACD** [对于 A, $\because E$ 为 AC 边的中点,

$\therefore \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BE} - 2\overrightarrow{BE} = \mathbf{0}$, A 正确;

对于 B, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC} \neq \mathbf{0}$, B 错误;

对于 C, $\because \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE}$, $\therefore \overrightarrow{BA} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BC} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$,

$\therefore \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$,

$\therefore \overrightarrow{BA}^2 = \overrightarrow{BC}^2$, $\therefore |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}|$, C 正确;

对于 D, $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}, \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}, \frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}$ 分别表示与 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ 同向的单位向量,

$\therefore \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 表示 $\angle BAC$ 的平分线的向量,

$\therefore \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{\sqrt{3}\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}$, $\therefore AD$ 为 $\angle BAC$ 的平分线.

故选 ACD.]

10. (2, 4) [$\because$ 在梯形 $ABCD$ 中, $CD = 2AB$, $AB \parallel CD$, $\therefore \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$, 设点 D 的坐标为 (x, y) ,

则 $\overrightarrow{DC} = (4-x, 2-y)$, 又 $\overrightarrow{AB} = (1, -1)$,

$\therefore (4-x, 2-y) = 2(1, -1)$,

即 $\begin{cases} 4-x=2, \\ 2-y=-2, \end{cases} \therefore \begin{cases} x=2, \\ y=4, \end{cases}$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(2, 4)$.]

11. $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ [$\because \overrightarrow{AB} = (4, 3)$, $\therefore$ 与向量 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量为

$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{5}(4, 3) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$.]

12. $\frac{7}{10}$ [由题意得 $\overrightarrow{AP} = (m + \frac{1}{10})\overrightarrow{AB} + \frac{1}{10}\overrightarrow{BC} = (m + \frac{1}{10}) \cdot$

$\overrightarrow{AB} + \frac{1}{10}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = m\overrightarrow{AB} + \frac{1}{10}\overrightarrow{AC}$,

因为 N 为线段 AC 上靠近 A 点的三等分点,

所以 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + \frac{3}{10}\overrightarrow{AN}$,

又 B, P, N 三点共线, 所以 $\frac{3}{10} + m = 1$, 则 $m = \frac{7}{10}$.]

课时作业(三十九)

1. **A** [因为 $|\mathbf{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \times 5 + 4 \times 12 = 63$,

设 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 θ , 所以 $\cos \theta = \frac{63}{5 \times 13} = \frac{63}{65}$.]

2. **A** [$\because$ 向量 $\mathbf{a} = (1, -1)$, $\mathbf{b} = (-2, 3)$, $\mathbf{c} = (1, 1)$,

$\therefore \mathbf{a} + \mathbf{b} = (-1, 2)$,

$\therefore (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (-1, 2) \cdot (1, 1) = -1 \times 1 + 2 \times 1 = 1$.

故选 A.]

3. **C** [因为 $\mathbf{a} = (m, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 3)$,

所以 $|\mathbf{a}| = \sqrt{m^2 + 1}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = m \times 0 + 1 \times 3 = 3$.

因为 $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} - \mathbf{b})$, 所以 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$,

即 $\mathbf{a}^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = m^2 + 1 - 3 = 0$,

解得 $m = \pm\sqrt{2}$. 故选 C.]

4. **A** [因为 $\mathbf{b} = (3, 4)$, 所以 $|\mathbf{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,

所以 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的投影向量的坐标为 $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b} = \frac{-5 \times 5}{5^2} \mathbf{b} = -\mathbf{b} =$

$(-3, -4)$.

故选 A.]

5. **C** [设 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = m (m > 0)$,

因为 $3\mathbf{a} + 4\mathbf{b} + 5\mathbf{c} = \mathbf{0}$, 所以 $3\mathbf{a} + 4\mathbf{b} = -5\mathbf{c}$,

两边平方得 $9|\mathbf{a}|^2 + 24\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 16|\mathbf{b}|^2 = 25|\mathbf{c}|^2$,

代入 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = m$,

得 $9m^2 + 24\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 16m^2 = 25m^2$, 所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

故选 C.]

6. **D** [因为 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, 则 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,

设 $\overrightarrow{CP} = k\overrightarrow{CD} (0 \leq k \leq 1)$,

则 $\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} = k(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$, 则 $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}k\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}$, 又

$\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,

则 $(m-1)\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = k(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$,

故 $\begin{cases} m-1 = -k, \\ \frac{1}{2} = \frac{2}{3}k, \end{cases}$ 解得 $k = \frac{3}{4}, m = \frac{1}{4}$,

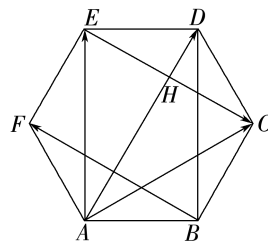
因为 $AC = 3, AB = 2\sqrt{2}, \angle BAC = \frac{\pi}{4}$,

则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = (\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) \cdot$

$(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{8}{3} -$

$\frac{9}{4} - \frac{1}{3} \times 3 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{19}{12}$. 故选 D.]

7. **ABC** [对于 A, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$, 而 $\overrightarrow{EC}$ 与 $\overrightarrow{BF}$ 为相反向量, 故 A 错误;



对于 B, 由正六边形的性质知 AD 平分等边 $\triangle ACE$ 的内角 $\angle EAC$ 交 EC 于 H ,

所以 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AH}$,

在 $\text{Rt} \triangle EDH$, $\text{Rt} \triangle AEH$ 中, $|\overrightarrow{AH}| = \sqrt{3}|\overrightarrow{EH}| = 3|\overrightarrow{DH}|$,

$\angle DEH = \angle EAH = \frac{\pi}{6}$,

课时作业(四十)

所以 $|\overrightarrow{AD}| = 4|\overrightarrow{DH}| = \frac{4}{3}|\overrightarrow{AH}|$, 所以 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$, 故

B 错误;

对于 C, 因为 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DE}$, 所以 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DE}$, 故 C 错误;

对于 D, 由正六边形的性质知 $\angle ABD = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\overrightarrow{AD}$ 在 $\overrightarrow{AB}$

上的投影向量为 $\overrightarrow{AB}$, 故 D 正确.

故选 ABC.]

8. **ACD** [对于 A, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3, 0)$, 则 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 3$, $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = (0, 3)$, 则 $|\mathbf{a} - 2\mathbf{b}| = 3$,

所以 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - 2\mathbf{b}|$, 故 A 正确;

对于 B, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (1, 2)$, 又 $\mathbf{b} = (1, -1)$,

则 $\frac{1}{1} \neq \frac{2}{-1}$, 所以 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{b}$ 不平行, 故 B 错误;

对于 C, $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = (4, -1)$,

又 $|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) = 4 \times 2 + (-1) \times 1 = 7$,

故投影向量为 $\frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})}{|\mathbf{a}|} \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{7}{5}\mathbf{a}$, 故 C 正确;

对于 D, 由题可得 $\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$

$$= \frac{2 \times 1 + 1 \times (-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2} \times \sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \text{ 又 } \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in [0, \pi],$$

所以 $\sin \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sqrt{1 - \cos^2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, 故 D 正确. 故

选 ACD.]

9. **AC** [由 $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 2, |\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = \sqrt{13}$,

可得 $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 4\mathbf{b}^2 = 13$,

将 $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 2$ 代入, 可得 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -1$, 故 A 正确;

因为 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = -3 \neq 0$, 故 B 错误;

由 $|\mathbf{a} - 2\mathbf{b}|^2 = \mathbf{a}^2 - 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 4\mathbf{b}^2 = 21$,

可得 $|\mathbf{a} - 2\mathbf{b}| = \sqrt{21}$, 故 C 正确;

设 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 θ , 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = -1$,

故 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, 又 $0 \leq \theta \leq \pi$, 则 $\theta = \frac{2\pi}{3}$, 故 D 错误. 故选 AC.]

10. 11 [设 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 θ , 因为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角的余弦值为

$$\frac{1}{3}, \text{ 即 } \cos \theta = \frac{1}{3},$$

又 $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 3$, 所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = 1 \times 3 \times \frac{1}{3} = 1$,

所以 $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2 = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = 2 \times 1 + 3^2 = 11$.]

11. $2\sqrt{3}$ [由题意得, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos 60^\circ = 1, |\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{a}^2 + 4\mathbf{b}^2 + 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} = \sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}$.]

12. $-\frac{5}{2}$ [因为 $\mathbf{a} = (4, -3), \mathbf{b} = (0, -2)$,

则 $\mathbf{a} - t\mathbf{b} = (4, -3) - (0, -2t) = (4, 2t - 3), |\mathbf{a}| =$

$$\sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5, |\mathbf{b}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2,$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 16 - 3(2t - 3) = 25 - 6t,$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = -2(2t - 3) = 6 - 4t,$$

若 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$,

$$\text{则 } \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{c}|} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{b}| |\mathbf{c}|}, \text{ 即 } \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{b}|}, \text{ 即 } \frac{25 - 6t}{5} = \frac{6 - 4t}{2}, \text{ 解}$$

$$\text{得 } t = -\frac{5}{2}.]$$

1. **B** [设水流速度为 $\mathbf{v}_1$, 船在静水中的速度为 $\mathbf{v}_2$, 实际行驶速度 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$,

根据题意, 可得 $|\mathbf{v}_1| = 2, |\mathbf{v}| = 8$, 且 $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}$,

$$\text{所以 } |\mathbf{v}_2| = \sqrt{|\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}|^2} = \sqrt{2^2 + 8^2} = 2\sqrt{17} \text{ m/s},$$

即小船实际航行的速度大小为 $2\sqrt{17}$ m/s.

故选 B.]

2. **B** [连接 AB, OM , 如图,

$$\begin{aligned} \text{则 } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) \\ &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = \\ &= \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{MO}^2 - 1, \end{aligned}$$

根据图形知, 当点 M 位于正六边形各边的中点时, 此时 $|\overrightarrow{MO}|$ 取得最小值为 $\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{MO}|^2 - 1$ 取得最小值为 2,

所以 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 的最小值是 2.

故选 B.]

3. **A** [$\because \triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$,

$$\therefore \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \angle BAC = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} |\overrightarrow{AB}| \cdot$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3},$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| = 4,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos \angle BAC = 4 \cos \frac{\pi}{3} = 2,$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}, \therefore \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD},$$

$$\text{由 } \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \text{ 得 } \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD},$$

$$\therefore C, P, D \text{ 三点共线}, \therefore m + \frac{3}{4} = 1,$$

$$\text{解得 } m = \frac{1}{4}.$$

$$\therefore |\overrightarrow{AP}|^2 = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \right)^2 = \frac{1}{16}\overrightarrow{AC}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \cdot$$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{16}\overrightarrow{AC}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2} \geq 2 \times \frac{1}{4} |\overrightarrow{AC}| \times \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| +$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

当且仅当 $|\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AB}|$ 时取等号,

$$\therefore |\overrightarrow{AP}|_{\min} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

故选 A.]

4. **ABD** [对于 A, $\because \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$,

$$\text{即 } \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \text{ 即 } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC},$$

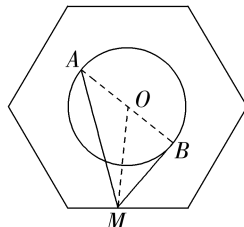
即点 D 是边 BC 的中点, 故 A 正确;

$$\text{对于 B, } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3} \left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right)$$

$$= \frac{1}{3} (-|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{BC}|) = 0,$$

即 $AD \perp BC$,

故直线 AD 过 $\triangle ABC$ 的垂心, 故 B 正确;



课时作业(四十一)

对于 C, $\because \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$,

即 $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, 即 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}$,

即点 D 在边 CB 的延长线上, 故 C 错误;

对于 D, $\because \overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 且 $x + y = \frac{1}{2}$,

设 $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AD}$,

则 $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AD} = 2x\overrightarrow{AB} + 2y\overrightarrow{AC}$, 且 $2x + 2y = 1$,

故 M, B, C 三点共线, 且 $|\overrightarrow{AM}| = 2|\overrightarrow{AD}|$,

即 $\triangle BCD$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的一半, 故 D 正确. 故选 ABD.]

5. $\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$ [由 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, 得 $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$,

即 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3m}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3n}\overrightarrow{AF}$,

$\because D, E, F$ 三点共线,

$\therefore \frac{1}{3m} + \frac{2}{3n} = 1$,

$\therefore m + n = \frac{1}{3}(m + n) \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n} \right)$

$= \frac{1}{3} \left(3 + \frac{n}{m} + \frac{2m}{n} \right) \geq \frac{3+2\sqrt{2}}{3}$,

当且仅当 $m = \frac{\sqrt{2}+1}{3}, n = \frac{\sqrt{2}+2}{3}$ 时取等号,

所以 $m + n$ 的最小值为 $\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$.]

6. $-\frac{1}{16}$ [法一(极化恒等式): 如图 1,

取 OB 的中点 D, 连接 PD, 则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} = |\overrightarrow{PD}|^2 - |\overrightarrow{OD}|^2 = |\overrightarrow{PD}|^2 - \frac{1}{4}$, 即求 PD 的最小值.

由图可知, 当 $PD \perp AB$ 时,

$PD_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{4}$,

则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP}$ 的最小值是 $-\frac{1}{16}$.

法二(坐标法): 以 OB 所在的直线为 x 轴, 过点 A 且垂直于 OB 的直线为 y 轴, 建立如图 2 所示的平面直角坐标系,

则 $A \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, $O \left(-\frac{1}{2}, 0 \right)$,

$B \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$, 可得直线 AB 的方程

为 $2x + \frac{2\sqrt{3}}{3}y = 1$, 设 $P \left(x, \frac{\sqrt{3}}{2}(1-2x) \right)$, 则 $\overrightarrow{OP} = \left(x + \frac{1}{2}, \right.$

$\left. \frac{\sqrt{3}}{2}(1-2x) \right)$,

$\overrightarrow{BP} = \left(x - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}(1-2x) \right)$,

所以 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} = 4x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 4 \left(x - \frac{3}{8} \right)^2 - \frac{1}{16}$,

当 $x = \frac{3}{8}$ 时, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP}$ 取得最小值 $-\frac{1}{16}$.]

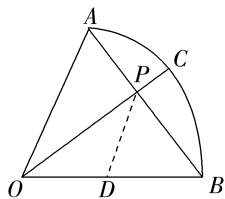


图 1

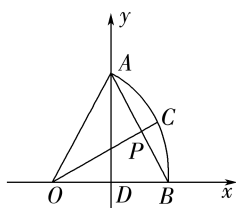


图 2

1. C [(1+5i)i = -5+i, 其虚部为 1. 故选 C.]

2. B [法一: 由 $i \cdot z + 2 = 2i$, 得 $i \cdot z = -2 + 2i$, 则 $z = \frac{-2+2i}{i} = \frac{(-2+2i)(-i)}{-i^2} = 2+2i$,

得 $|z| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$, 故选 B.

法二: 由 $i \cdot z + 2 = 2i$, 得 $i \cdot z = -2 + 2i$,

$\therefore |iz| = |-2+2i|$, $\therefore |z| = 2\sqrt{2}$.]

3. D [由复数的几何意义可知, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = (-1, -3) + (-2, -1) = (-3, -4)$, 所以向量 $\overrightarrow{CA}$ 对应的复数是 $-3-4i$. 故选 D.]

4. B [在复平面内, 复数 $\frac{-2-i}{1+i} = \frac{(-2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

对应的点为 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$, 所在的象限为第二象限.

故选 B.]

5. D [因为复数 $z = 1+i$ 是方程 $z^2 + az + b = 0$ 的根,

所以复数 $z = 1-i$ 也是方程 $z^2 + az + b = 0$ 的根,

所以 $-a = (1+i) + (1-i)$, 且 $b = (1+i)(1-i)$,

即 $a = -2, b = 2$, 则 $a + 2b = 2$. 故选 D.]

6. C [对于 A 选项, $e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$, A 错误;

对于 B 选项, $e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$, 为纯虚数, B 错误;

对于 C 选项, $\left| \frac{e^{xi}}{\sqrt{3}+i} \right| = \left| \frac{\cos x + i \sin x}{\sqrt{3}+i} \right| = \frac{|\cos x + i \sin x|}{|\sqrt{3}+i|} = \frac{\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1}} = \frac{1}{2}$, C 正确;

对于 D 选项, $2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$, 则 $\cos 2 < 0, \sin 2 > 0$, 所以复数

$e^{2i} = \cos 2 + i \sin 2$ 在复平面内对应的点位于第二象限, D 错误.

故选 C.]

7. ACD [对于 A, 由共轭复数的定义知, $z = 3+2i$ 的共轭复数为 $\bar{z} = 3-2i$, 故 A 正确;

对于 B, 复数 $z = 3+2i$ 的模 $|z| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$, 故 B 错误;

对于 C, $z^2 = (3+2i)^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 2i + (2i)^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$, 故 C 正确;

对于 D, $\frac{z+3}{z-i} = \frac{3+2i+3}{3+2i-i} = \frac{6+2i}{3+i} = \frac{2(3+i)}{3+i} = 2 \in \mathbf{R}$, 故 D 正确. 故选 ACD.]

8. BCD [若 $z = i$, 满足 $|z| = 1$, 故 A 错误;

若 $z = 2+3i$, 则 $\bar{z} = 2-3i$, 故 B 正确;

若 z 的实部是 1, 则点 P 的集合所构成的图形是直线, 故 C 正确;

若 $1 \leq |z| \leq \sqrt{2}$,

则点 P 的集合所构成的图形是以原点为圆心, $1, \sqrt{2}$ 为半径的两个圆所夹的圆环,

故所求面积为 $\pi \times (\sqrt{2})^2 - \pi \times 1^2 = \pi$, 故 D 正确.

故选 BCD.]

9. ABC [满足 $|z-1+i|=3$ 的复数 z

在复平面内对应点的轨迹是以 $(1, -1)$ 为圆心, 3 为半径的圆, 如图, 由图可知, 虚部最大的复数 $z=1+2i$, 即复数 z 虚部的最大值为 2, 故 A 正确;

实部最小的复数 $z=-2-i$, 实部最

大的复数 $z=4-i$, 所以实部的取值范围是 $[-2, 4]$, 故 B 正确;

$|z+1+i|$ 表示复数 z 在复平面内对应的点到 $(-1, -1)$ 的距离, 所以 $|z+1+i|$ 的最小值为 $3-2=1$, 故 C 正确;

由图可知, 复数 z 在复平面内对应的点位于第一、二、三、四象限, 故 D 错误. 故选 ABC.]

10. 2 [$\because m-2+(m^2-4)i \geq 0 (m \in \mathbf{R})$,

$$\therefore \begin{cases} m^2-4=0, \\ m-2 \geq 0, \end{cases} \text{ 解得 } m=2.]$$

11. $\sqrt{10}$ [$\left| \frac{3+i}{i} \right| = \frac{|3+i|}{|i|} = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}.]$

12. -8 [由棣莫弗公式 $[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n$

$$= r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

$$\text{可得 } \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right]^4$$

$$= 2^4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 16 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$= -8 + 8\sqrt{3}i,$$

故所求的实部为 -8.]

阶段检测(八)

1. C [若 $z=-1-i$,

$$\text{则 } |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}. \text{ 故选 C.}]$$

2. D [由 $z=1-2i$, 得 $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1+4=5$.

故选 D.]

3. C [对于 A, $\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QP} \neq \overrightarrow{PQ}$, 所以 A 错误;

对于 B, $\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{BQ}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PA}) - \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{QB} \neq \overrightarrow{PQ}$, 所以 B 错误;

对于 C, $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PC}) + (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{QC}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{PQ}$, 所以 C 正确;

对于 D, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{QA} \neq \overrightarrow{PQ}$, 所以 D 错误. 故选 C.]

4. C [对于 A, 当 $a \perp b$ 时, 则 $a \cdot b = 0$,

所以 $x \cdot (x+1) + 2x = 0$, 解得 $x=0$ 或 $x=-3$, 即必要性不成立, 故 A 错误;

对于 B, 当 $a \parallel b$ 时, 则 $2(x+1) = x^2$, 解得 $x=1 \pm \sqrt{3}$, 即必要性不成立, 故 B 错误;

对于 C, 当 $x=0$ 时, $a=(1, 0)$, $b=(0, 2)$, 故 $a \cdot b = 0$,

所以 $a \perp b$, 即充分性成立, 故 C 正确;

对于 D, 当 $x=-1+\sqrt{3}$ 时, 不满足 $2(x+1) = x^2$, 所以 $a \parallel b$ 不成立, 即充分性不成立, 故 D 错误.

故选 C.]

5. C [法一: 设 $b=(x, y)$, 则 $a-b=(2-x, -y)$. 由 $|a-b|=2$, 得 $(2-x)^2 + (-y)^2 = 4$, 即 $(x-2)^2 + y^2 = 4$, 所以点 $(x,$

$y)$ 的轨迹是圆心为 $(2, 0)$, 半径 $r=2$ 的圆. 又 $|b| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$, 点 $(0, 0)$ 在点 (x, y) 的轨迹圆上, 所以 $|b|_{\max} = 2r = 4$. 故选 C.

法二: 令原点为 $O(0, 0)$, $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, 则 $|a-b| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{BA}| = 2$, 所以点 B 在以 A $(2, 0)$ 为圆心, 2 为半径的圆上. 所以 $|b|_{\max} = |\overrightarrow{OB}|_{\max} = 4$. 故选 C.

法三(三角不等式): 因为 $a=(2, 0)$, 所以 $|a|=2$, 所以 $2 = |a-b| \geq |b| - |a|$, 即 $|b| \leq 2 + |a| = 2 + 2 = 4$, 当且仅当 a 与 b 同向时等号成立, 所以 $|b|$ 的最大值为 4. 故选 C.]

6. C [$\because |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$, $\therefore O$ 到 $\triangle ABC$ 三个顶点的距离相等,

$\therefore O$ 是 $\triangle ABC$ 的外心.

$$\because \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \mathbf{0},$$

$\therefore N$ 是 $\triangle ABC$ 的重心.

$$\because \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA},$$

$$\therefore \overrightarrow{PB} \cdot (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}) = 0, \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0,$$

$$\therefore \overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{CA},$$

同理得到 $\overrightarrow{PC} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{CB}$,

$\therefore P$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心. 故选 C.]

7. AB [因为 $z = \frac{2+4i}{1+i} = \frac{(2+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 3+i$, 所以 $z-3=i$ 为

纯虚数, 故选项 A, B 正确;

$z=3+i$, 则 z 在复平面内对应的点 $(3, 1)$ 位于第一象限, 故选项 C 错误;

$$|z-2| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}, \text{ 故选项 D 错误.}$$

故选 AB.]

8. ACD [因为 $a=(1, 2)$, $b=(3, 1)$,

$$\text{则 } |a| = \sqrt{5}, |b| = \sqrt{10}, a \cdot b = 1 \times 3 + 2 \times 1 = 5.$$

$$\text{对于 A, } (a-b) \cdot a = a^2 - a \cdot b = 5 - 5 = 0,$$

即 $(a-b) \perp a$, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $1 \times 1 \neq 2 \times 3$,

所以 a, b 不共线, 故 B 错误;

对于 C, 设 a 与 b 的夹角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

又 $\theta \in [0, \pi]$,

即 a 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 故 C 正确;

对于 D, a 在 b 上的投影向量是 $\left(\frac{a \cdot b}{|b|^2} \right) b = \frac{1}{2} b = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$,

故 D 正确.

故选 ACD.]

9. 15 [$\because a \parallel b, \therefore 2k = 5 \times 6$, 解得 $k = 15$.]

10. $\sqrt{3}$ [由 $|a-b| = \sqrt{3}$, 得 $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = 3$,

$$\text{即 } 2a \cdot b = a^2 + b^2 - 3.$$

$$\text{由 } |a+b| = |2a-b|,$$

$$\text{得 } a^2 + 2a \cdot b + b^2 = 4a^2 - 4a \cdot b + b^2,$$

$$\text{整理得 } 3a^2 - 6a \cdot b = 0,$$

$$\text{所以 } 3a^2 - 3(a^2 + b^2 - 3) = 0,$$

$$\text{所以 } b^2 = 3, \text{ 所以 } |b| = \sqrt{3}.]$$

11. 解: 由 $z_1 = z_2$, 得 $\begin{cases} m = 2\cos \theta, \\ 4 - m^2 = \lambda + 3\sin \theta, \end{cases}$

消去 m , 可得 $\lambda = 4\sin^2\theta - 3\sin\theta = 4\left(\sin\theta - \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{9}{16}$.

由于 $-1 \leq \sin\theta \leq 1$, 可得 $-\frac{9}{16} \leq \lambda \leq 7$, 即 λ 的取值范围是 $\left[-\frac{9}{16}, 7\right]$.

12. 解: (1) 依题意有 $\overrightarrow{AO} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ ($m, n \in \mathbb{R}$),

因为 $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{DC}$, 所以 $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$,

因为 B, O, D 三点共线, 所以 $\overrightarrow{AO} = m\overrightarrow{AB} + (1-m)\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + \frac{3-3m}{4}\overrightarrow{AC}$,

因为 $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB}$, 所以 $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,

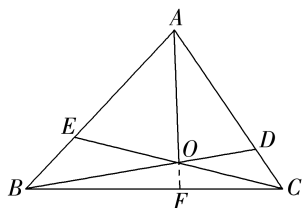
因为 C, O, E 三点共线, 所以 $\overrightarrow{AO} = n\overrightarrow{AC} + (1-n)\overrightarrow{AE} = n\overrightarrow{AC} + \frac{2-2n}{3}\overrightarrow{AB}$,

根据平面向量基本定理, 可得

$$\begin{cases} m = \frac{2-2n}{3}, \\ \frac{3-3m}{4} = n, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m = \frac{1}{3}, \\ n = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

所以 $m+n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

(2) 延长 AO 与 BC 交于点 F , 因为 B, F, C 三点共线,



所以设 $\overrightarrow{AF} = t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}$,

又因为 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 且 $\overrightarrow{AF} \parallel \overrightarrow{AO}$, 所以设 $\overrightarrow{AO} = \lambda\overrightarrow{AF}$,

即 $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \lambda[t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}] = \lambda t\overrightarrow{AB} + \lambda(1-t)\overrightarrow{AC}$,

所以 $\begin{cases} \lambda t = \frac{1}{3}, \\ \lambda(1-t) = \frac{1}{2}, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} t = \frac{2}{5}, \\ \lambda = \frac{5}{6}, \end{cases} \text{ 所以 } \overrightarrow{AO} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AF}, \text{ 则}$

$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AF}$. 所以 $\frac{S'}{S} = \frac{1}{6}$.

课时作业(四十二)

1. C [对于 A, $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = -\frac{1}{n(n-1)} < 0$, 故 $\{a_n\}$ 为递减数列, 故 A 不符合题意.

对于 B, $a_n - a_{n-1} = 1 - 2n - [1 - 2(n-1)] = -2 < 0$, 故 $\{a_n\}$ 为递减数列, 故 B 不符合题意.

对于 C, $a_n - a_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1 > 0$, 故 $\{a_n\}$ 为递增数列, 故 C 符合题意.

对于 D, $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} = -\frac{1}{2^n} < 0$, 故 $\{a_n\}$ 为递减数列, 故 D 不符合题意. 故选 C.]

2. D [由 $a_{n+1} = a_n + 3n + 2$ ($n \geq 1$), 可得 $a_{n+1} - a_n = 3n + 2$ ($n \geq 1$),

则当 $n \geq 2$ 时, $a_n = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + a_3 - a_2 + a_2 - a_1 + a_1$

$$= 3n-1 + 3n-4 + \cdots + 8+5+2$$

$$= \frac{n(2+3n-1)}{2} = \frac{3n^2+n}{2},$$

$$\text{则 } a_{10} = \frac{3 \times 100 + 10}{2} = 155.$$

故选 D.]

3. B [由数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{3}{a_n}$,

$$\text{可得 } a_{n+2} = \frac{3}{a_{n+1}} = a_n,$$

即数列 $\{a_n\}$ 是周期为 2 的数列, 且 $a_1 = 3, a_2 = 1$,

$$\text{则 } a_{2\,024} + a_{2\,025} = a_2 + a_1 = 1 + 3 = 4.$$

故选 B.]

4. D [由题意可得 $a_1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{5} + \cdots + \frac{a_n}{2n-1} = n+1$, ①

当 $n=1$ 时, $a_1 = 2$;

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{5} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2n-3} = n, \text{ ②}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } \frac{a_n}{2n-1} = 1, \text{ 即 } a_n = 2n-1.$$

又 $a_1 = 2$ 不满足 $a_n = 2n-1$,

$$\text{综上所述, } a_n = \begin{cases} 2, & n=1, \\ 2n-1, & n \geq 2. \end{cases}$$

所以 $a_{2\,027} = 4\,053$.

故选 D.]

5. BCD [根据题意, 依次分析选项:

对于 A, 数列 $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$ 的一个通项公式是 $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), A 正确;

对于 B, 数列 1, 2, 3, 4, 5 只有 5 项, 该数列项数是有限的, B 错误;

对于 C, 数列 $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$ 的通项公式可以为 $a_n = (-1)^n$, 也可以为 $a_n = \cos n\pi$, 该数列通项公式不唯一, C 错误;

对于 D, 该数列的通项公式可以为 $b_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n \text{ 为奇数}, \\ \frac{3n}{2}, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ D

错误.

故选 BCD.]

6. BCD [对于 A, 已知 $S_n = n^2 + 1$, 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 2$,

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 1 - [(n-1)^2 + 1] = 2n-1,$$

又 $a_1 = 2$ 不满足 $a_n = 2n-1$,

综上, $a_n = \begin{cases} 2, & n=1, \\ 2n-1, & n \geq 2, \end{cases}$ 故 A 错误;

$$\text{对于 B, } T_n = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}, \text{ 所以数列 } \{S_n\}$$

的前 n 项积为 $T_n = \frac{1}{n+1}$, 故 B 正确;

$$\text{对于 C, 由 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}, \text{ 得 } \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n}, \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{n-2}{n-1}, \dots,$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2},$$

等式左右分别相乘可得 $\frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{n}$,

又 $a_1 = 1$, 所以 $a_n = \frac{1}{n}$, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $S_n = -n^2 + 7n - 3 = -\left(n - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{37}{4}$, 且 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以当 $n = 3$ 或 4 时, S_n 取得最大值, 故 D 正确. 故选 BCD.]

7.4 [法一: 因为 $a_{n+1} - a_n = \frac{2n-3}{2^{n+1}} - \frac{2n-5}{2^n} = \frac{-2n+7}{2^{n+1}}$,

所以当 $n \geq 4$ 时, $a_{n+1} < a_n$; 当 $n \leq 3$ 时, $a_{n+1} > a_n$,

即 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 > a_5 > a_6 > \dots$,

故数列 $\{a_n\}$ 的最大项为第 4 项.

法二: 设数列 $\{a_n\}$ 中的最大项为 a_k ,

则 $\begin{cases} a_k \geq a_{k+1}, \\ a_k \geq a_{k-1}, \end{cases} (k \geq 2),$

即 $\begin{cases} \frac{2k-5}{2^k} \geq \frac{2k-3}{2^{k+1}}, \\ \frac{2k-5}{2^k} \geq \frac{2k-7}{2^{k-1}}, \end{cases}$ 解得 $\frac{7}{2} \leq k \leq \frac{9}{2}$.

因为 $k \in \mathbf{N}^*$, 所以 $k = 4$.

故数列 $\{a_n\}$ 的最大项为第 4 项.]

8. $(-\infty, \frac{3}{2})$ [根据题意, 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列,

而 $a_n = n^2 - 2tn + 5$, 则 $a_{n+1} = (n+1)^2 - 2t(n+1) + 5$.

则 $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - 2t(n+1) + 5 - (n^2 - 2tn + 5) = n^2 + 2n + 1 - 2tn - 2t + 5 - n^2 + 2tn - 5 = 2n + 1 - 2t > 0$ 恒成立,

变形可得 $2t < 2n + 1$,

又由 $n \in \mathbf{N}^*$, 则 $2t < 3$, 解得 $t < \frac{3}{2}$.

即实数 t 的取值范围是 $(-\infty, \frac{3}{2})$.]

9. 解: (1) 由 $a_1 = 1$, 得 $S_1 = a_1 = 1$, 而 $\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+2}{n}$, 当 $n \geq 2$ 时,

$$S_n = S_1 \cdot \frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{S_3}{S_2} \cdot \dots \cdot \frac{S_n}{S_{n-1}} = 1 \times \frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \dots \times \frac{n}{n-2} \times \frac{n+1}{n-1} = \frac{n(n+1)}{2},$$

因为 $S_1 = 1$ 也满足上式, 所以 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(2) 由 (1) 得, 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$,

$$\text{所以 } a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n,$$

因为 $a_1 = 1$ 也满足上式, 所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n$.

10. 解: (1) 因为 $S_n = n^2 \cdot a_n$, ①

$$\text{所以 } S_{n+1} = (n+1)^2 \cdot a_{n+1}, \text{ ②}$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ 得 } a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = (n+1)^2 \cdot a_{n+1} - n^2 \cdot a_n,$$

$$\text{所以 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2}, \text{ 所以 } b_n = \frac{n}{n+2},$$

$$\text{所以 } b_1 = \frac{1}{3}, b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = \frac{3}{5}, b_4 = \frac{2}{3}.$$

$$(2) \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, 由 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2}, \text{ 得 } \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{4}, \frac{a_4}{a_3} =$$

$$\frac{3}{5}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1},$$

$$\text{所以 } \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \dots \times \frac{n-1}{n+1},$$

$$\text{即 } \frac{a_n}{a_1} = \frac{2}{n(n+1)} (n \geq 2),$$

$$\text{又因为 } a_1 = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } a_n = \frac{1}{n(n+1)} (n \geq 2).$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = \frac{1}{2} \text{ 满足上式,}$$

$$\text{故 } a_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

课时作业(四十三)

1. B [根据 $S_3 = 3a_2 = 6$ 得 $a_2 = 2$, 根据 $S_5 = 5a_3 = -5$ 得 $a_3 = -1$, 所以 $\{a_n\}$ 的公差 $d = a_3 - a_2 = -3$, 所以 $a_6 = a_3 + 3d = -10$, 所以 $S_6 = S_5 + a_6 = -5 - 10 = -15$.]

2. D [由题知, 奇数项有 $\frac{n+1}{2}$ 项, 偶数项有 $\frac{n-1}{2}$ 项, 奇数项之和

$$\text{为 } \frac{n+1}{2} a_1 + \frac{\frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}}{2} \cdot 2d = \frac{n+1}{2} \left(a_1 + \frac{n-1}{2} d \right), \text{ 偶数项之}$$

$$\text{和为 } \frac{n-1}{2} (a_1 + d) + \frac{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2}}{2} \cdot 2d = \frac{n-1}{2} \left(a_1 + \frac{n-1}{2} d \right), \text{ 所}$$

以奇数项之和与偶数项之和的比为 $\frac{n+1}{n-1}$. 故选 D.]

3. C [法一: 由 $a_2 + a_6 = 10$, 可得 $2a_4 = 10$, 所以 $a_4 = 5$, 又 $a_4 a_8 = 45$, 所以 $a_8 = 9$. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $d = \frac{a_8 - a_4}{8 - 4} = \frac{9 - 5}{4} = 1$, 又 $a_4 = 5$, 所以 $a_1 = 2$, 所以 $S_5 = 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2} d = 20$. 故选 C.

法二: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则由 $a_2 + a_6 = 10$, 可得 $a_1 + 3d = 5$ ①, 由 $a_4 a_8 = 45$, 可得 $(a_1 + 3d)(a_1 + 7d) = 45$ ②,

由 ①② 可得 $a_1 = 2, d = 1$, 所以 $S_5 = 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2} d = 20$. 故选 C.]

4. A [$\because \{a_n\}, \{b_n\}$ 是等差数列,

$$\therefore \frac{a_6}{b_6} = \frac{\frac{a_1 + a_{11}}{2}}{\frac{b_1 + b_{11}}{2}} = \frac{11 \times \frac{a_1 + a_{11}}{2}}{11 \times \frac{b_1 + b_{11}}{2}} = \frac{S_{11}}{T_{11}} = \frac{3 \times 11}{2 \times 11 + 8} = \frac{11}{10}. \text{ 故}$$

选 A.]

5. C [当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = -1 + 8 = 7$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = -n^2 + 8n - [-(n-1)^2 + 8(n-1)] = -2n + 9$, 显然 $a_1 = 7$ 也符合该式, 所以 $a_n = -2n + 9$, 所以 $|a_n| = \begin{cases} -2n + 9, n \leq 4, \\ 2n - 9, n \geq 5, \end{cases}$ 所以 $\{|a_n|\}$ 的前 12 项和为 $\frac{(7+1) \times 4}{2} + \frac{(1+15) \times 8}{2} = 80$. 故选 C.]

6. D [设第 n 环扇面形石板的块数为 a_n , 上层共有 n 环, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $\{a_n\}$ 是首项为 9, 公差为 9 的等差数列, $a_n = 9 + 9(n-1) = 9n, S_n = \frac{9}{2}(n^2 + n)$,

上层、中层、下层的块数分别为 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$,

由下层比中层多 729 块, 得 $S_{3n} - S_{2n} = S_{2n} - S_n + 729$,

$$\therefore \frac{9}{2}(9n^2 + 3n) - \frac{9}{2}(4n^2 + 2n) = \frac{9}{2}(4n^2 + 2n) - \frac{9}{2}(n^2 + n) + 729, \text{ 解得 } n = 9,$$

∴中下两层共有扇面形石板:

$$S_{27} - S_9 = \frac{9}{2}(27^2 + 27) - \frac{9}{2}(9^2 + 9) = 2\,997,$$

∴中下两层共有扇面形石板 2 997 块.

故选 D.]

7. **BCD** [对于 A, 令 $a=1, b=2, c=3$, 则 $a^2=1, b^2=4, c^2=9$, 不满足 $2b^2=a^2+c^2$, 故 A 错误; 对于 B, 令 $a=b=c$, 则 $2^a=2^b=2^c$, 满足 $2^a+2^c=2 \cdot 2^b$, 故 B 正确; 对于 C, $\because a, b, c$ 成等差数列, $\therefore a+c=2b$, $\therefore (ka+2)+(kc+2)=k(a+c)+4=2(kb+2)$, 即 $ka+2, kb+2, kc+2$ 一定成等差数列, 故 C 正确; 对于 D, 令 $a=b=c$, 则 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$, 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$, 故 D 正确. 故选 BCD.]

8. **AB** [A 选项, 由 $a_1=S_{10}=10$, 得 $10a_1+\frac{10 \times 9}{2}d=10$,

即 $100+45d=10$, 解得 $d=-2$, A 正确;

B 选项, $a_n=10-2(n-1)=12-2n$, B 正确;

C 选项, 由对 B 选项的分析知 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=-n^2+11n$,

所以 $\frac{S_n}{n}=-n+11$,

所以数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为递减数列, C 错误;

D 选项, 由二次函数 $f(n)=-n^2+11n$ 的性质可知, 其对称轴方程为 $n=\frac{11}{2}$,

又 $n \in \mathbb{N}^*$, 所以当 $n=5$ 或 $n=6$ 时, S_n 取得最大值, D 错误. 故选 AB.]

9. 4 [由题意有 $a_2+a_6=2a_4, a_3+a_7=2a_5$,

由 $a_2+a_4+a_6=3a_4=3$, 解得 $a_4=1$,

由 $a_3+a_5+a_7=3a_5=9$, 解得 $a_5=3$,

∴ $a_1+a_8=a_4+a_5=1+3=4$.]

10. 820 [设第 n 排的座位数为 $a_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其公差 $d=2$, 则 $a_n=a_1+(n-1)d=a_1+2(n-1)$. 由已知 $a_{20}=60$, 得 $60=a_1+2 \times (20-1)$, 解得 $a_1=22$, 则剧场总共的座位数为 $\frac{20(a_1+a_{20})}{2}=\frac{20 \times (22+60)}{2}=820$.]

11. 解: (1) 因为 $3a_2=3a_1+a_3$, 所以 $3(a_2-a_1)=a_1+2d$, 所以 $3d=a_1+2d$, 所以 $a_1=d$,

所以 $a_n=nd$.

因为 $b_n=\frac{n^2+n}{a_n}$, 所以 $b_n=\frac{n^2+n}{nd}=\frac{n+1}{d}$,

所以 $S_3=\frac{3(a_1+a_3)}{2}=\frac{3(d+3d)}{2}=6d, T_3=b_1+b_2+b_3=$

$$\frac{2}{d}+\frac{3}{d}+\frac{4}{d}=\frac{9}{d}.$$

因为 $S_3+T_3=21$,

所以 $6d+\frac{9}{d}=21$, 解得 $d=3$ 或 $d=\frac{1}{2}$,

因为 $d>1$, 所以 $d=3$.

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n$.

(2) 因为 $b_n=\frac{n^2+n}{a_n}$, 且 $\{b_n\}$ 为等差数列,

所以 $2b_2=b_1+b_3$, 即 $2 \times \frac{6}{a_2}=\frac{2}{a_1}+\frac{12}{a_3}$,

$$\text{所以 } \frac{6}{a_1+d}-\frac{1}{a_1}=\frac{6}{a_1+2d},$$

$$\text{所以 } a_1^2-3a_1d+2d^2=0,$$

解得 $a_1=d$ 或 $a_1=2d$.

① 当 $a_1=d$ 时, $a_n=nd$,

$$\text{所以 } b_n=\frac{n^2+n}{a_n}=\frac{n^2+n}{nd}=\frac{n+1}{d},$$

$$S_{99}=\frac{99(a_1+a_{99})}{2}=\frac{99(d+99d)}{2}=99 \times 50d,$$

$$T_{99}=\frac{99(b_1+b_{99})}{2}=\frac{99\left(\frac{2}{d}+\frac{100}{d}\right)}{2}=\frac{99 \times 51}{d}.$$

因为 $S_{99}-T_{99}=99$,

$$\text{所以 } 99 \times 50d - \frac{99 \times 51}{d} = 99,$$

$$\text{即 } 50d^2 - d - 51 = 0,$$

$$\text{解得 } d=\frac{51}{50} \text{ 或 } d=-1 \text{ (舍去)}.$$

② 当 $a_1=2d$ 时, $a_n=(n+1)d$, 所以 $b_n=\frac{n^2+n}{a_n}=$

$$\frac{n^2+n}{(n+1)d}=\frac{n}{d},$$

$$S_{99}=\frac{99(a_1+a_{99})}{2}=\frac{99(2d+100d)}{2}$$

$$=99 \times 51d,$$

$$T_{99}=\frac{99(b_1+b_{99})}{2}=\frac{99\left(\frac{1}{d}+\frac{99}{d}\right)}{2}$$

$$=\frac{99 \times 50}{d}.$$

因为 $S_{99}-T_{99}=99$,

$$\text{所以 } 99 \times 51d - \frac{99 \times 50}{d} = 99,$$

$$\text{即 } 51d^2 - d - 50 = 0,$$

$$\text{解得 } d=-\frac{50}{51} \text{ (舍去) 或 } d=1 \text{ (舍去)}.$$

$$\text{综上, } d=\frac{51}{50}.$$

课时作业(四十四)

1. **D** [由 $S_3=a_1+a_2+a_3=a_3(q^{-2}+q^{-1}+1)$, 得 $q^{-2}+q^{-1}+1=3$, 即 $2q^2-q-1=0$,

$$\text{解得 } q=1 \text{ 或 } q=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore a_2=\frac{a_3}{q}=\frac{3}{2} \text{ 或 } -3. \text{ 故选 D.}]$$

2. **C** [根据题意, 设 1 和 2 025 的等比中项为 x ,

$$\text{则有 } x^2=1 \times 2\,025, \text{ 解得 } x=\pm 45.$$

即 1 和 2 025 的等比中项为 ± 45 .

故选 C.]

3. **D** [依题意, 十三个音的频率依次成等比数列, 记为 $\{a_n\}$, 设公比为 q , 则 $a_{13}=a_1q^{12}$, 又 $\because a_{13}=2a_1$,

$$\therefore q=2^{\frac{1}{12}}, \therefore \frac{f_2}{f_1}=\frac{a_7}{a_3}=q^4=\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^4=\sqrt[3]{2}. \text{ 故选 D.}]$$

4. B [数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, a_6, a_{10} 为方程 $x^2 + 2025x + 3 = 0$ 的两根,

所以 $a_6 a_{10} = 3, a_6 + a_{10} = -2025 < 0$,

则 $a_6 < 0, a_8 < 0, a_{10} < 0$,

则 $a_8 = -\sqrt{a_6 a_{10}} = -\sqrt{3}$.

故选 B.]

5. C [$\because a_1 = 2, a_{m+n} = a_m a_n$, 令 $m = 1$, 则 $a_{n+1} = a_1 a_n = 2a_n$, $\therefore \{a_n\}$ 是以 $a_1 = 2$ 为首项, 2 为公比的等比数列, $\therefore a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$.

又 $\because a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+10} = 2^{15} - 2^5$,

$\therefore \frac{2^{k+1}(1-2^{10})}{1-2} = 2^{15} - 2^5$,

即 $2^{k+1}(2^{10}-1) = 2^5 \times (2^{10}-1)$,

$\therefore 2^{k+1} = 2^5, \therefore k+1 = 5, \therefore k = 4$. 故选 C.]

6. BC [因为 $S_n = 2^{n+1} + a$, 所以 $a_1 = 4 + a, a_2 = S_2 - S_1 = 4, a_3 = S_3 - S_2 = 8$.

因为 $\{a_n\}$ 是等比数列, 所以 $a_2^2 = a_1 a_3$, 即 $4^2 = 8(4+a)$, 解得 $a = -2$, 则 A 错误;

等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q = \frac{a_3}{a_2} = 2$, 则 B 正确;

因为 $a_1 = 2, q = 2$, 所以 $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^n$, 则 C 正确;

因为 $a = -2$, 所以 $S_n = 2^{n+1} - 2$, 所以 $S_9 = 2^{10} - 2 = 1022$, 则 D 错误. 故选 BC.]

7. ABD [对于 A, $a_1 > 1$ 且 $a_6 a_7 > 1 > 0 \Rightarrow q > 0$, 而 $\frac{a_6-1}{a_7-1} < 0 \Rightarrow a_6 - 1$ 和 $a_7 - 1$ 异号,

由 $a_1 > 1$ 知 $a_6 - 1 > 0, a_7 - 1 < 0$, 即 $a_6 > 1, a_7 < 1, 0 < q =$

$\frac{a_7}{a_6} < 1$, 故 A 项正确;

对于 B, 从前面的求解过程知 $a_1 > 1, 0 < q < 1$, 说明 $\{a_n\}$ 是递减的正项等比数列, 且 $0 < a_7 < 1$, 所以 $0 < a_8 < 1$,

那么 $0 < a_7 a_8 < 1$, 故 B 项正确;

对于 C, 因为 $\{a_n\}$ 是正项数列, 所以 S_n 没有最大值, 故 C 项错误;

对于 D, 从前面的分析过程可知 $\{a_n\}$ 的前 6 项均大于 1, 从第 7 项起均小于 1, 所以 T_n 的最大值为 T_6 , 故 D 项正确.

故选 ABD.]

8. 2 [由题意, 得 $\begin{cases} S_{\text{奇}} + S_{\text{偶}} = -240, \\ S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = 80, \end{cases}$

解得 $S_{\text{奇}} = -80, S_{\text{偶}} = -160$,

$\therefore q = \frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \frac{-160}{-80} = 2$.]

9. $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}$ [设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$\because a_3 + 2$ 是 a_2, a_4 的等差中项,

$\therefore 2(a_3 + 2) = a_2 + a_4$, ①

又 $a_2 + a_3 + a_4 = 28$, 将①代入得 $a_3 = 8$,

$\therefore a_2 + a_4 = 20$,

则 $\begin{cases} a_1 q + a_1 q^3 = 20, \\ a_1 q^2 = 8, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a_1 = 2, \\ q = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = 32, \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$,

又 $\{a_n\}$ 为递减数列,

$\therefore a_1 = 32, q = \frac{1}{2}$,

$\therefore a_n = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}$.]

10. 证明: $\because a_n = \frac{T_n}{3T_n - 1}$, 且 $a_n = \frac{T_n}{T_{n-1}} (n \geq 2)$,

$\therefore \frac{T_n}{T_{n-1}} = \frac{T_n}{3T_n - 1} (n \geq 2)$,

$\because a_n > 0, \therefore T_n > 0$,

$\therefore 3T_n - 1 = T_{n-1} (n \geq 2)$,

则 $T_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left(T_{n-1} - \frac{1}{2}\right) (n \geq 2)$,

当 $n = 1$ 时, $a_1 = T_1 = \frac{T_1}{3T_1 - 1}$, 得 $T_1 = \frac{2}{3}$,

$\therefore T_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$,

$\therefore$ 数列 $\left\{T_n - \frac{1}{2}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{6}$, 公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列.

课时作业(四十五)

1. C [由 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 3}$, 可得 $a_{n+1} + 1 = \frac{2(a_n + 1)}{a_n + 3}$,

即 $\frac{1}{a_{n+1} + 1} = \frac{1}{a_n + 1} + \frac{1}{2}$,

又 $\frac{1}{a_1 + 1} = \frac{1}{2}$,

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n + 1}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$, 公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列,

即 $\frac{1}{a_n + 1} = \frac{1}{2}n$, 即 $a_n = \frac{2}{n} - 1$, 可得 $a_{10} = -\frac{4}{5}$, 故 AB 错误;

由 $\{a_n\}$ 是递减数列, 可得数列 $\{a_n\}$ 有最大值, 且为 $a_1 = 1$, 故 C 正确, D 错误.

故选 C.]

2. B [因为 $a_{n+1} = 2a_n - n + 1$,

设 $a_{n+1} + x(n+1) + y = 2(a_n + xn + y)$, 化简得 $a_{n+1} = 2a_n + xn + y - x$, 对比原式解方程组得 $x = -1, y = 0$,

即 $a_{n+1} - (n+1) = 2(a_n - n)$,

所以 $\frac{a_{n+1} - (n+1)}{a_n - n} = 2$,

即数列 $\{a_n - n\}$ 是以 $a_1 - 1 = 2$ 为首项, 2 为公比的等比数列,

则 $a_n - n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, 所以 $a_n = 2^n + n$. 故选 B.]

3. AB [由 $a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 1}$, 得 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{3a_n} + \frac{2}{3}$, 即 $\frac{1}{a_{n+1}} - 1 =$

$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_n} - 1\right)$,

又 $a_1 = \frac{3}{5}$, 得 $\frac{1}{a_1} - 1 = \frac{2}{3}$,

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项, $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列, 选项 B 正确;

$\therefore \frac{1}{a_n} - 1 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,

即 $\frac{1}{a_n} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1 = \frac{2+3^n}{3^n}$,

$\therefore a_n = \frac{3^n}{2+3^n}$, 则 $a_3 = \frac{27}{2+27} = \frac{27}{29}$, 选项 A 正确, 选项 D 错误;

$\therefore \frac{1}{a_n} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1$,

$$\therefore S_n = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} \right) + n = \frac{2}{3} \times \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} + n =$$

$n + 1 - \frac{1}{3^n}$, 选项 C 错误.

故选 AB.]

4. BCD [已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} (n \geq 2)$,

所以 $a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1})$,

则 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是首项为 $a_2 - a_1 = 2$, 公比为 2 的等比数列, 故 A 错误;

由 $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ 得 $a_{n+1} - 2a_n = a_n - 2a_{n-1}, a_2 - 2a_1 = 1$,

所以数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 1 的等比数列, 故 B 正确;

因为 $a_{n+1} - a_n = 2^n$,

所以 $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$

$$= 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{1 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} = 2^n - 1, \text{ 故 C 正确};$$

$$S_n = (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - n = \frac{2 \times (1 - 2^{n+1})}{1 - 2} - n = 2^{n+1} - n - 2, \text{ 故 D 正确}.$$

故选 BCD.]

5. $a_n = 2^n - 1$ 2 036 [因为 $a_{n+1} = 2a_n + 1$, 所以 $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$, 所以 $\{a_n + 1\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 所以 $a_n + 1 = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$, 即 $a_n = 2^n - 1$, 所以 $S_{10} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10} - 10 = \frac{2 \times (1 - 2^{10})}{1 - 2} - 10 =$

2 036.]

6. $a_n = 2(n+1) \cdot 5^{n-1}$ [在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 4, a_{n+1} = 5a_n + 2 \times 5^n, n \in \mathbf{N}^*$, 等式两边同时除以 5^{n+1} , 可得 $\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{a_n}{5^n} + \frac{2}{5}$,

设 $b_n = \frac{a_n}{5^n}$, 则 $b_{n+1} = b_n + \frac{2}{5}$,

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 $\frac{4}{5}$, 公差为 $\frac{2}{5}$ 的等差数列.

由等差数列的通项公式可得 $b_n = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}(n-1) = \frac{2n+2}{5}, a_n =$

$$5^n b_n = 2(n+1) \cdot 5^{n-1}.]$$

7. 证明: (1) 因为 $S_n = 2 + a_{n+1} = 2 + (S_{n+1} - S_n)$,

所以 $2S_n = S_{n+1} + 2$, 所以 $S_{n+1} - 2 = 2(S_n - 2)$,

因为 $S_1 - 2 \neq 0$, 所以 $S_n - 2 \neq 0, \frac{S_{n+1} - 2}{S_n - 2} = 2$,

故数列 $\{S_n - 2\}$ 为等比数列, 首项为 $S_1 - 2 = 1$, 公比为 2.

(2) 由 (1) 可知 $S_n - 2 = 2^{n-1}$,

$$\text{所以 } \frac{1}{S_n} = \frac{1}{2 + 2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\text{所以 } T_n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) < 2.$$

课时作业(四十六)

1. 解: (1) 因为数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 是公比为 3 的等比数列, 且 $a_2 + b_3 = 30, b_2 = a_4 + 2$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 1 + d + 9b_1 = 30, \\ 3b_1 = 1 + 3d + 2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} d = 2, \\ b_1 = 3, \end{cases}$$

所以 $a_n = 2n - 1, b_n = 3^n$.

$$(2) T_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n)$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$$

$$= [1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)] + (3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n) =$$

$$\frac{n[1 + (2n - 1)]}{2} + \frac{3(1 - 3^n)}{1 - 3} = \frac{3^{n+1}}{2} + n^2 - \frac{3}{2}.$$

2. 解: (1) 由 $S_3 = 5S_1$, 可得 $3a_1 + 3d = 5a_1$, 即 $a_1 = \frac{3}{2}d$.

又因为 $a_{2n} = 2a_n - 1$, 所以当 $n = 1$ 时, 可得 $a_2 = 2a_1 - 1$, 即 $a_1 + d = 2a_1 - 1$.

$$\text{联立 } \begin{cases} a_1 = \frac{3}{2}d, \\ a_1 + d = 2a_1 - 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 3, \\ d = 2, \end{cases}$$

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n + 1$.

$$(2) \text{ 因为 } b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right),$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots +$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{n}{6n+9}.$$

3. 解: (1) $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是各项都为正数的等比数列, 设公差为 d , 公比为 $q (q > 0)$,

由 $a_1 = 2, b_1 = 1, a_3 + b_2 = 8, a_2 = b_3$, 可得 $2 + 2d + q = 8, 2 + d = q^2$, 解得 $d = q = 2$ (负值舍去),

则 $a_n = 2n, b_n = 2^{n-1}$.

(2) 数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + n \times 2^n$,

$$2T_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \cdots + n \times 2^{n+1},$$

两式相减, 得 $-T_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} =$

$$\frac{2(1 - 2^n)}{1 - 2} - n \cdot 2^{n+1} = (1 - n) \cdot 2^{n+1} - 2,$$

$$\text{故 } T_n = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$

$$(3) c_n = \begin{cases} a_n, n \text{ 为奇数} \\ b_n, n \text{ 为偶数} \end{cases} = \begin{cases} 2n, n \text{ 为奇数} \\ 2^{n-1}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

则数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 $S_{2n} = (2 + 6 + 10 + \cdots + 4n - 2) + (2 + 8 + \cdots + 2^{2n-1})$

$$= \frac{1}{2} n (2 + 4n - 2) + \frac{2(1 - 4^n)}{1 - 4} = 2n^2 + \frac{2}{3} \cdot 4^n - \frac{2}{3}.$$

课时作业(四十七)

1. C [依题意, 不同边长的正方形的个数构成以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 127$, 即 $\frac{1 - 2^n}{1 - 2} =$

127, 解得 $n = 7$, 即有 7 种不同边长的正方形. 又正方形的边

长构成以 16 为首项, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为公比的等比数列. 因此, 最小的正

方形的边长为 $16 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{7-1} = 2$. 故选 C.]

2. BD [由 S_3, S_9, S_6 成等差数列, 得 $2S_9 = S_3 + S_6$, 得 $q \neq 1$,

$$\therefore 2 \times \frac{a_1(1-q^9)}{1-q} = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} + \frac{a_1(1-q^6)}{1-q},$$

$$\therefore 2q^9 = q^3 + q^6, \text{ 得 } 2(q^3)^2 - q^3 - 1 = 0,$$

故 $q^3 = -\frac{1}{2}$ 或 $q^3 = 1$ (舍去), 故 A 错误;

$$a_3 + a_6 = a_3 - \frac{1}{2}a_3 = \frac{1}{2}a_3, 2a_9 = 2a_3q^6 = \frac{1}{2}a_3,$$

$\therefore a_3, a_9, a_6$ 成等差数列, 故 B 正确;

$$S_3 = \frac{\frac{3}{2}a_1}{1-q}, S_6 = \frac{\frac{3}{4}a_1}{1-q}, S_9 = \frac{\frac{9}{8}a_1}{1-q},$$

$\therefore \frac{S_6}{S_3} = \frac{1}{2}, \frac{S_9}{S_6} = \frac{3}{2}, \therefore S_3, S_6, S_9$ 不成等比数列, 故 C 错误;

$$S_{12} = \frac{\frac{15}{16}a_1}{1-q}, S_6 + S_9 = \frac{\frac{3}{4}a_1}{1-q} + \frac{\frac{9}{8}a_1}{1-q} = \frac{\frac{15}{8}a_1}{1-q}, 2S_{12} = \frac{\frac{15}{8}a_1}{1-q},$$

满足 $S_6 + S_9 = 2S_{12}$, 可得 S_6, S_{12}, S_9 成等差数列, 故 D 正确. 故选 BD.]

3.3 [设塔的顶层共有 a_1 盏灯, 则数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列,

$$\therefore S_7 = \frac{a_1(1-2^7)}{1-2} = 381,$$

解得 $a_1 = 3$.]

4. $\sqrt{5}$ [设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\therefore a_1 = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i,$$

则前 10 项和为

$$S_{10} = 10a_1 + \frac{10 \times 9}{2}d = 10i + 45d = 45 + 10i,$$

解得 $d = 1, a_3 = a_1 + 2d = 2 + i, \therefore |a_3| = \sqrt{5}$.]

5. (1) 解: 由 $a_3, a_4, a_5 - 8$ 成等差数列, 得 $2a_4 = a_3 + a_5 - 8$,

$$\therefore 2a_1 \times 2^3 = a_1 \times 2^2 + a_1 \times 2^4 - 8, \text{ 解得 } a_1 = 2,$$

$$\therefore a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n.$$

(2) 证明: 由 (1) 知, $a_n = 2^n$,

$$\text{则 } b_n = \frac{\log_2 a_n}{a_n} = \frac{\log_2 2^n}{2^n} = \frac{n}{2^n},$$

$$\therefore T_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}, \text{ ①}$$

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^{n+1}}, \text{ ②}$$

$$\text{两式作差, 得 } \frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}.$$

$$\therefore T_n = 2 - \frac{n+2}{2^n} < 2.$$

又 $b_n = \frac{n}{2^n} > 0, \therefore \{T_n\}$ 是递增数列,

$$\therefore T_n \geq T_1 = \frac{1}{2}, \text{ 可得 } \frac{1}{2} \leq T_n < 2.$$

6. 解: (1) 由 $\{a_n + b_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1 + b_1 = 4, a_2 + b_2 = 8$,

则 $\{a_n + b_n\}$ 的公比为 $\frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} = 2$, 首项为 4, 所以 $a_n + b_n = 2^{n+1}$,

因为 $a_1 - b_1 = 0, a_2 - b_2 = 2$, 且 $\{a_n - b_n\}$ 是等差数列,

则 $\{a_n - b_n\}$ 的公差为 $(a_2 - b_2) - (a_1 - b_1) = 2$, 首项为 0, 所以 $a_n - b_n = 2n - 2$.

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } \begin{cases} a_n + b_n = 2^{n+1}, \\ a_n - b_n = 2n - 2, \end{cases}$$

$$\text{则 } \begin{cases} a_n = 2^n + n - 1, \\ b_n = 2^n - n + 1. \end{cases}$$

(3) 由 (2) 知 $S_n = (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n) + (1 + 2 + \cdots + n) - n =$

$$\frac{2(1-2^n)}{1-2} + \frac{n(n+1)}{2} - n = 2^{n+1} + \frac{n^2 - n - 4}{2}.$$

阶段检测(九)

1. D [由 $\{a_n\}$ 是等比数列可知 $a_2 a_6 = a_4^2$, 且各项均不为 0,

$$\text{又 } a_6 = 3a_4^2, \text{ 可得 } \frac{1}{3}a_6 = a_4^2,$$

$$\text{所以 } a_2 = \frac{1}{3}.$$

故选 D.]

2. A [因为数列 $1, -1, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{16}, \cdots$,

$$\text{所以该数列的通项公式为 } a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{2^{n-1}},$$

所以该数列的第 100 项为

$$a_{100} = (-1)^{100+1} \frac{100}{2^{99}} = -\frac{25}{2^{97}}.$$

故选 A.]

3. A [因为 $S_4 - S_1 = 9$, 所以 $a_2 + a_3 + a_4 = 3a_3 = 9$, 解得

$$a_3 = 3,$$

$$\text{又 } a_1 + a_4 = a_2 + a_3 = 5, \text{ 所以 } a_2 = 2,$$

$$\text{所以公差为 } a_3 - a_2 = 1.$$

故选 A.]

4. A [由题意 $S_{20} = \frac{a_1(1-q^{20})}{1-q} = 21$,

$$S_{30} = \frac{a_1(1-q^{30})}{1-q} = 49,$$

$$\therefore q^{10} = 2, \frac{a_1}{1-q} = -7,$$

$$\therefore S_{10} = \frac{a_1}{1-q}(1-q^{10}) = 7.$$

故选 A.]

5. C [因为 $a_{n+1} = 2S_n + 2$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $a_n = 2S_{n-1} + 2$, 两式相减得 $a_{n+1} - a_n = 2a_n$, 即 $a_{n+1} = 3a_n (n \geq 2)$, 又 $a_2 = 2 \times$

$$2 + 2 = 6, a_2 = 3a_1, \text{ 所以数列 } \{a_n\} \text{ 是公比 } q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 \text{ 的等比}$$

数列. 因为 $a_1 = 2$, 所以 $a_4 = a_1 q^3 = 2 \times 3^3 = 54$. 故选 C.]

6. D [等差数列 $\{a_n\}$ 中, 由 $S_1 = 1, S_2 = 3$, 得 $a_1 = 1, a_2 = 2$,

$$\text{故 } a_n = 1 + (n-1)(a_2 - a_1) = n,$$

$$\text{等比数列 } \{b_n\} \text{ 中, 由 } T_1 = a_2, T_2 = a_6, \text{ 得 } b_1 = 2, b_2 = T_2 - T_1 = a_6 - 2 = 6 - 2 = 4,$$

所以公比 $q = 2$,

$$\text{故 } b_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n,$$

$$\text{故 } T_6 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126.$$

故选 D.]

7. ABD [由 $S_3 = 9$, a_3 是 a_1 与 a_4 的等比中项,

$$\text{得 } \begin{cases} 3a_2 = 9, \\ a_3^2 = a_1 \cdot a_4, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} a_2=3, \\ (a_2+d)^2=(a_2-d) \cdot (a_2+2d), \end{cases}$
解得 $d=-1$ 或 $d=0$ (舍去), 故 AB 正确;
则 $a_n=a_2+(n-2)d=-n+5, a_1=4,$
 $S_n=\frac{n(4-n+5)}{2}=\frac{n(9-n)}{2},$
所以 $\frac{S_n}{n}=\frac{9-n}{2}$, 又 $\frac{9-n}{2}$ 随 n 的增大而减小,

所以数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是递减数列, 故 C 错误;

当 $S_n=\frac{n(9-n)}{2}>0$ 时, $0<n<9$, 因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 n 的最大值为 8, 故 D 正确.

故选 ABD.]

8. ABD [数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1=1, a_{n+1}=2S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, ①

所以当 $n \geq 2$ 时, $a_n=2S_{n-1}$, ②

①-②得 $a_{n+1}-a_n=2a_n$,

所以 $a_{n+1}=3a_n$, 即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$,

又 $a_2=2$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 3 为公比的等比数列.

所以 $a_n=2 \times 3^{n-2}$, 又 $a_1=1$, 不符合 $a_n=2 \times 3^{n-2}$,

故 $a_n=\begin{cases} 1, n=1, \\ 2 \times 3^{n-2}, n \geq 2. \end{cases}$

故 C 错误, D 正确.

对于选项 B, $a_{n+1}=2S_n$,

所以 $S_{n+1}-S_n=2S_n$, 所以 $S_{n+1}=3S_n$,

即 $\frac{S_{n+1}}{S_n}=3$,

所以数列 $\{S_n\}$ 是以 $S_1=1$ 为首项, 3 为公比的等比数列, 故 B 正确.

所以 $S_n=1 \times 3^{n-1}=3^{n-1}$, 故 A 正确.

故选 ABD.]

9. 12 [根据等差数列的求和公式, $S_6=6a_1+\frac{6 \times 5}{2}d=12$.]

10. 48 384 [法一: 设前 3 项的公差为 d , 后 7 项的公比为 q ,

且 $q>0$, 则 $q^4=\frac{a_9}{a_5}=\frac{192}{12}=16$, 可得 $q=2$, 则 $a_3=1+2d=$

$\frac{a_5}{q^2}$, 即 $1+2d=3$, 可得 $d=1$,

所以 $a_3=3, a_7=a_3q^4=48$.

$a_1+a_2+\cdots+a_9=1+2+3+3 \times 2+\cdots+3 \times 2^6=3+\frac{3(1-2^7)}{1-2}=384$.

法二: 因为 $\{a_n\} (3 \leq n \leq 9)$ 为等比数列, 则 $a_7^2=a_5a_9=12 \times 192=48^2$,

且 $a_n>0$, 所以 $a_7=48$. 又因为 $a_5^2=a_3a_7$, 则 $a_3=\frac{a_5^2}{a_7}=3$.

设后 7 项的公比为 q , 且 $q>0$, 则 $q^2=\frac{a_5}{a_3}=4$, 解得 $q=2$, 可

得 $a_1+a_2+a_3=\frac{3(a_1+a_3)}{2}=6, a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+$

$a_8+a_9=\frac{a_3-a_9q}{1-q}=\frac{3-192 \times 2}{1-2}=381$,

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_9=6+381-a_3=384$.]

11. 解: (1) 由 $S_n=2a_n-3n$, ①

令 $n=1$, 得 $S_1=a_1=2a_1-3$,

得 $a_1=3$,

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1}=2a_{n-1}-3(n-1)$, ②

①-②得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}-3$,

即 $a_n-2a_{n-1}=3 (n \geq 2)$,

故 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1=3$, 递推关系为 $a_n-2a_{n-1}=3 (n \geq 2)$.

(2) 由题知 $b_{n+1}=Ab_n+B, A \neq 1, B \neq 0, b_1 \neq \frac{B}{1-A}$, 则 $b_{n+1}-$

$\frac{B}{1-A}=Ab_n+B-\frac{B}{1-A}$, 即 $b_{n+1}-\frac{B}{1-A}=A(b_n-\frac{B}{1-A})$,

整理得 $b_{n+1}-\frac{B}{1-A}=A(b_n-\frac{B}{1-A})$,

$A \neq 1, B \neq 0, b_1 \neq \frac{B}{1-A}$,

故数列 $\left\{b_n-\frac{B}{1-A}\right\}$ 是以 A 为公比的等比数列.

由 (1) 知 $a_n-2a_{n-1}=3 (n \geq 2)$,

$\therefore a_n=2a_{n-1}+3, a_n+3=2a_{n-1}+6$, 即 $\frac{a_n+3}{a_{n-1}+3}=2 (n \geq 2)$,

又 $a_1=3, a_1+3=6$,

则 $\{a_n+3\}$ 是以 6 为首项, 2 为公比的等比数列,

$\therefore a_n+3=6 \times 2^{n-1}$,

$\therefore a_n=6 \times 2^{n-1}-3$.

12. 解: (1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\{b_n\}$ 的公比为 q ,

$\because \{b_n\}$ 是等比数列, $\therefore \frac{b_3}{b_2}=q=3$,

$\therefore b_1=1, b_4=27$,

$\therefore b_n=3^{n-1}, a_1=1, a_{14}=a_1+13d=27$,

$\therefore d=2$,

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=1+2(n-1)=2n-1$, 即 $a_n=2n-1$.

(2) 由 (1) 知 $c_n=(2n-1) \times 3^{n-1}$,

设 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,

则 $S_n=c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}+c_n$,

即 $S_n=1 \times 3^0+3 \times 3^1+\cdots+(2n-3) \times 3^{n-2}+(2n-1) \times 3^{n-1}$, ①

$3S_n=1 \times 3^1+3 \times 3^2+\cdots+(2n-5) \times 3^{n-2}+(2n-3) \times 3^{n-1}+(2n-1) \times 3^n$, ②

①-②得 $-2S_n=1+2 \times 3^1+\cdots+2 \times 3^{n-1}-(2n-1) \times 3^n$,

即 $-2S_n=1+2 \times \frac{3 \times (1-3^{n-1})}{1-3}-(2n-1) \times 3^n$,

$\therefore S_n=3^n(n-1)+1$.

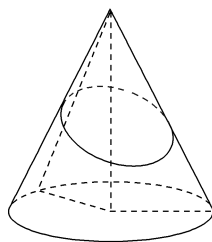
课时作业(四十八)

1. C [对于 A: 当球面上两点与球心在一条直线上时, 这样的平面有无数个, 故 A 错误;

对于 B: 若平面与圆锥底面不平行, 则此时截出来的不是圆台, 如图所示, 故 B 错误;

对于 C: 由正棱锥的定义与性质知, 正棱锥的所有侧棱均相等, 底面是正多边形, 所以侧面是全等的等腰三角形, 故 C 正确;

对于 D: 棱台要求侧棱的延长线交于一点, 故 D 错误. 故选 C.]



2. B [设圆柱的底面半径为 r , 则圆锥的母线长为 $\sqrt{r^2+3}$, 而它们的侧面积相等, 所以 $2\pi r \times \sqrt{3} = \pi r \times \sqrt{3+r^2}$, 即 $2\sqrt{3} = \sqrt{3+r^2}$, 解得 $r=3$,

故圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi \times 9 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}\pi$. 故选 B.]

3. B [将长方体的部分表面展开, 则从 A 点出发到 C_1 点, 有 3 条直线路线, 如图 1, 2, 3 所示.

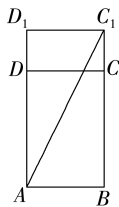


图1

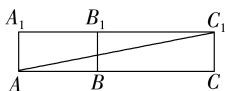


图2

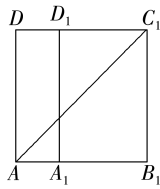


图3

图 1 中, $AB=2, BC_1=4$,

所以 $AC_1 = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$;

图 2 中, $AC=5, CC_1=1$,

所以 $AC_1 = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$;

图 3 中, $C_1B_1=3, AB_1=3$,

所以 $AC_1 = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$.

而 $\sqrt{26} > 2\sqrt{5} > 3\sqrt{2}$, 所以小蚂蚁从 A 点出发, 沿长方体的表面到奶奶家 C_1 的最短距离是 $3\sqrt{2}$.]

4. D [将平行六面体截去三棱锥后, 剩余部分几何体的体积等于平行六面体的体积减去三棱锥的体积, 记平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $V=1$,

则三棱锥 $A-A_1B_1D_1$ 的体积 $V_1 =$

$$\frac{1}{3} \cdot S_{\triangle A_1B_1D_1} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot$$

$$S_{\text{四边形}A_1B_1C_1D_1} \cdot h = \frac{1}{6}V = \frac{1}{6},$$

$$\text{所以剩余部分几何体的体积为 } V-V_1 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

故选 D.]

5. D [由题意知该棱台的高 $h=\sqrt{3}$, 上、下底面的面积分别为

$$S_1 = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = 2\sqrt{3}, S_2 = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2 = \frac{9\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以该棱台}$$

$$\text{的体积 } V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)h = \frac{1}{3} \times (2\sqrt{3} +$$

$$\sqrt{2\sqrt{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{2}} + \frac{9\sqrt{3}}{2}) \times \sqrt{3} = \frac{19}{2}. \text{ 故选 D.}]$$

6. D [由球的半径为 R , 得圆柱体的高为 R ,

$$\text{此鼎主体部分的容积约为 } \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi R^3 + \pi R^2 \times R = \frac{5}{3}\pi R^3,$$

$$\text{此鼎主体部分外表面积约为 } \frac{1}{2} \times 4\pi R^2 + 2\pi R \times R = 4\pi R^2,$$

$$\text{所以此鼎主体部分的容积与外表面积之比约为: } \frac{\frac{5}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{5}{12}$$

R . 故选 D.]

7. BD [如图所示, 在直观图 $\triangle A'B'C'$

中, 过 C' 作 $C'D' \perp A'B'$ 于 D' ,

$\because A'B'=2, A'C'=B'C'=\sqrt{5}$,

$\therefore A'D'=1$,

$$C'D' = \sqrt{A'C'^2 - A'D'^2} = 2.$$

又 $\angle C'O'D' = 45^\circ$,

$$\therefore O'D'=2, O'A'=1, O'C'=2\sqrt{2},$$

所以利用斜二测画法将直观图

$\triangle A'B'C'$ 还原为原平面图形

$\triangle ABC$, 如图,

则 $OC=4\sqrt{2}, OA=1, AB=2$, 故选项

B 正确;

又因为 $AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{33}$,

$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{41}$, 故选项 A, C 错误;

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times OC = \frac{1}{2} \times 2 \times 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}, \text{ 故选项 D 正确.}$$

故选 BD.]

8. BCD [对于 A, 因为圆台 O_1O_2 , 在其轴截面 $ABCD$ 中,

$$AB=BC=AD=\frac{1}{2}CD, CD=4,$$

所以该圆台的高为 $O_1O_2 =$

$$\sqrt{AD^2 - \left(\frac{CD-AB}{2}\right)^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{4-2}{2}\right)^2} = \sqrt{3}, \text{ 所以 A 选项}$$

错误;

对于 B, 因为该圆台轴截面面积为 $S = \frac{1}{2}(AB+CD) \cdot$

$$O_1O_2 = \frac{1}{2}(2+4) \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}, \text{ 所以 B 选项正确;}$$

对于 C, 因为该圆台的体积为 $V = \frac{1}{3}(4\pi + \pi + \sqrt{4\pi \cdot \pi}) \times$

$$\sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}\pi}{3}, \text{ 所以 C 选项正确;}$$

对于 D, 将圆台侧面沿直线 BC

处剪开, 其侧面展开图如图所示.

易知圆弧 $\widehat{BB'}$, $\widehat{CC'}$ 的长度分别

为 $2\pi, 4\pi$, 设扇形圆心为 O , 圆心

角为 θ , $OB=r$,

由弧长公式可知 $\theta r = 2\pi, \theta(r+2) = 4\pi$, 解得 $\theta = \pi, r = 2$,

所以可得 $\angle AOB = 90^\circ$,

设 E 为 AD 的中点, 连接 EC , 当小虫从点 C 沿着 EC 爬行到

AD 的中点, 所经过路程最短,

易知 $OE=3, OC=4$, 且 $OE \perp OC$,

由勾股定理可知, $EC = \sqrt{OE^2 + OC^2} = 5$, 所以 D 选项正确.

故选 BCD.]

9. ACD [对于 A, $V_{\text{三棱锥}A-BCC_1} = V_{\text{三棱锥}C_1-ABC} = \frac{1}{3} \times CC_1 \times$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times 4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 4, \text{ 故 A 正确;}$$

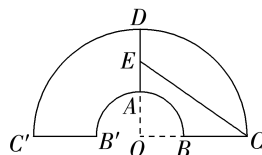
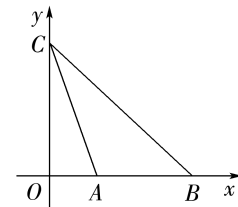
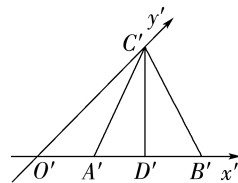
对于 B, $V_{\text{三棱锥}C-APC_1} = V_{\text{三棱锥}A-PCC_1}$,

而三棱锥 $A-BCC_1$ 与三棱锥 $A-PCC_1$ 有共同的高,

$\therefore P$ 为 BC_1 的中点,

$$\therefore S_{\triangle PCC_1} = \frac{1}{2} S_{\triangle BCC_1},$$

$$\therefore V_{\text{三棱锥}A-PCC_1} = \frac{1}{2} V_{\text{三棱锥}A-BCC_1} = \frac{1}{2} \times 4 = 2, \text{ 故 B 错误;}$$



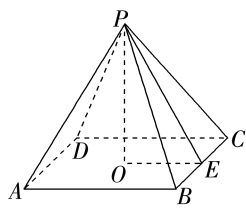
对于 C, $V_{\text{四棱锥 } C_1-ABB_1A_1} = V_{\text{三棱柱 } ABC-A_1B_1C_1} - V_{\text{三棱锥 } C_1-ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times 4 - 4 = 8$, 故 C 正确;
 对于 D, 由题可知, $AC = \sqrt{13}$, $AC_1 = \sqrt{29}$, $BC_1 = 5$,
 $\therefore AB^2 + BC_1^2 = AC_1^2$,
 $\therefore \triangle ABC_1$ 是直角三角形, $AB \perp BC_1$,
 $\therefore$ 三棱锥 C_1-ABC 的表面积为 $S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCC_1} + S_{\triangle ACC_1} + S_{\triangle ABC_1}$
 $= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 + \frac{1}{2} \times 3 \times 4 + \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 \times 5 = 14 + 2\sqrt{13}$, 故 D 正确. 故选 ACD.]

10. 12 [设 $\triangle ABC$ 的面积为 a , 底面 ABC 水平放置时, 液面高为 h , 侧面 AA_1B_1B 水平放置时, 水的体积为 $V = \frac{3}{4} S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \frac{3}{4} a \cdot 16 = 12a$,

当底面 ABC 水平放置时, 水的体积为 $V = S_{\triangle ABC} h = ah$, 于是 $ah = 12a$, 解得 $h = 12$,
 所以当底面 ABC 水平放置时, 液面高为 12.]

11. $\frac{7\sqrt{3}\pi}{3}$ 11π [因为在圆台 O_1O_2 中, $\triangle ABO_2$ 为等边三角形, 三角形边长为 2, 且 $O_1B \parallel O_2A$,
 所以 $O_1B = 1$, 圆台的高 $h = \sqrt{3}$,
 因此圆台的体积为 $V = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{7\sqrt{3}\pi}{3}$,
 表面积 $S = \pi(r_1^2 + r_1 l + r_2 l + r_2^2) = 11\pi$.]

12. $36\sqrt{3}$ [如图, 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, PO 为四棱锥的高, PE 为侧面的高, 因为正四棱锥的底面边长为 6, 且其侧面积是底面积的 2 倍,



所以 $S_{\text{侧}} = 4 \times \frac{1}{2} \times 6PE = 2S_{\text{底}} = 72$, 解得 $PE = 6$,

$PO = \sqrt{PE^2 - OE^2} = 3\sqrt{3}$,

所以 $V_{\text{四棱锥 } P-ABCD} = \frac{1}{3} S_{\text{底}} \cdot PO = \frac{1}{3} \times 36 \times 3\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$.]

课时作业(四十九)

1. C [由题意可知该球为圆柱的外接球, 所以球心为圆柱的中心, 设球半径为 r ,

则 $r = \sqrt{1^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$, 故该球的表面积为 $4\pi r^2 = 8\pi$.]

2. B [设正方体的棱长为 a , 则正方体内切球的半径为 $\frac{a}{2}$, 内切球的体积等于 $\frac{4}{3} \pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^3 = 4\sqrt{3}\pi$, 解得 $a = 2\sqrt{3}$,

所以正方体的体对角线长等于 $\sqrt{3}a = 6$,

所以正方体外接球的半径等于 $\frac{1}{2} \times \sqrt{3}a = 3$,

则外接球的表面积等于 $4\pi \times 3^2 = 36\pi$, 故选 B.]

3. A [设圆锥的母线长为 l , 则 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3}\pi \cdot l = 6\pi$, 解得 $l = 2\sqrt{3}$, 故其高 $h = \sqrt{l^2 - 3} = 3$,

设该圆锥的外接球的半径为 R , 则 $(3-R)^2 + 3 = R^2$, 解得

$R = 2$, 故其体积 $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{32\pi}{3}$. 故选 A.]

4. B [由题意得 $O'D' \parallel B'C'$, 且 $O'D' = \frac{1}{2} B'C'$,

根据斜二测画法得, 在原图 $\triangle ABC$ 中,

$\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $AB = A'B' = 4$, $BC = 2B'C' = 4O'D' = 8$,

三棱锥 $P-ABC$ 的高为 $PB = 6$,

所以外接球的半径为 $R = \frac{1}{2} \times \sqrt{AB^2 + BC^2 + PB^2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{4^2 + 8^2 + 6^2} = \sqrt{29}$,

所以外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 29 = 116\pi$, 故选 B.]

5. A [由题意, 得正三棱台上、下底面的外接圆的半径分别为

$\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3\sqrt{3} = 3$, $\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4\sqrt{3} = 4$. 设该棱台上、下底面的

外接圆的圆心分别为 O_1, O_2 , 连接 O_1O_2 (图略), 则 $O_1O_2 = 1$, 其外接球的球心 O 在直线 O_1O_2 上. 设球 O 的半径为 R ,

当球心 O 在线段 O_1O_2 上时, $R^2 = 3^2 + OO_1^2 = 4^2 + (1 - OO_1)^2$, 解得 $OO_1 = 4$ (舍去); 当球心 O 不在线段 O_1O_2 上时, $R^2 = 4^2 + OO_2^2 = 3^2 + (1 + OO_2)^2$, 解得 $OO_2 = 3$, 所以 $R^2 = 25$, 所以该球的表面积为 $4\pi R^2 = 100\pi$, 故选 A.]

6. AD [由题图知 $R = 3r$, 故 A 正确, B 错误; 易知包装盒的高

为 $2r$, 故 $V_2 = \pi R^2 \times 2r = 18\pi r^3$, 又 $V_1 = \frac{4}{3} \pi r^3$, 所以 $2V_2 = 27V_1$, 故 C 错误, D 正确. 故选 AD.]

7. $\frac{21}{8}$ [如图, 为该几何体的轴截面,

其中圆 O 是等腰梯形 $ABCD$ 的内切圆, 设圆 O 与梯形的腰相切于点 E , 与上、下底面分别切于点 O_1, O_2 ,

设球的半径为 r , 圆台上、下底面的半径为 $r_1 = 1, r_2 = 4$. 注意到 OD 与 OA 均为角平分线, 因此 $\angle DOA = 90^\circ$, 从而 $\triangle AO_2O \sim \triangle OO_1D$, 故 $r^2 = r_1 r_2 = 4$. 设圆台的体积为 V_1 , 球的体积为 V_2 ,

则 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \times 2r \times (\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi r_1 r_2)}{\frac{4}{3} \pi r^3}$

$= \frac{r_1^2 + r_2^2 + r^2}{2r^2} = \frac{1+16+4}{8} = \frac{21}{8}$.]

8. 2 [法一: 如图, 设 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O_1 , 连接 O_1A , 因为 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形, 所以其外接圆半径 $r = O_1A = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \sqrt{3}$.

将三棱锥 $S-ABC$ 补形为正三棱柱 SB_1C_1-ABC , 由题意知 SA 为侧棱, 设球心为 O , 连接 OO_1, OA , 则 $OO_1 \perp$ 平面 ABC , 且 $OO_1 = \frac{1}{2} SA$.

又球的半径 $R = OA = 2$, $OA^2 = OO_1^2 + O_1A^2$,

所以 $4 = \frac{1}{4} SA^2 + 3$, 得 $SA = 2$.

8. 2 [法二: 如图, 设 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O_1 , 连接 O_1A , 因为 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形, 所以其外接圆半径 $r = O_1A = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \sqrt{3}$.

将三棱锥 $S-ABC$ 补形为正三棱柱 SB_1C_1-ABC , 由题意知 SA 为侧棱, 设球心为 O , 连接 OO_1, OA , 则 $OO_1 \perp$ 平面 ABC , 且 $OO_1 = \frac{1}{2} SA$.

又球的半径 $R = OA = 2$, $OA^2 = OO_1^2 + O_1A^2$,

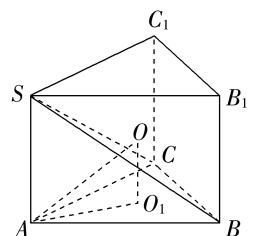
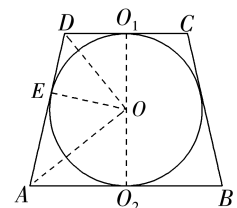
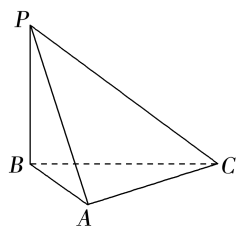
所以 $4 = \frac{1}{4} SA^2 + 3$, 得 $SA = 2$.

8. 2 [法三: 如图, 设 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O_1 , 连接 O_1A , 因为 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形, 所以其外接圆半径 $r = O_1A = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \sqrt{3}$.

将三棱锥 $S-ABC$ 补形为正三棱柱 SB_1C_1-ABC , 由题意知 SA 为侧棱, 设球心为 O , 连接 OO_1, OA , 则 $OO_1 \perp$ 平面 ABC , 且 $OO_1 = \frac{1}{2} SA$.

又球的半径 $R = OA = 2$, $OA^2 = OO_1^2 + O_1A^2$,

所以 $4 = \frac{1}{4} SA^2 + 3$, 得 $SA = 2$.



法二:如图,设 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O_1 ,连接 O_1A ,因为 $\triangle ABC$ 是边长为3的等边三角形,所以其外接圆半

$$径 r = O_1A = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \sqrt{3}.$$

设三棱锥 $S-ABC$ 的外接球球心为 O ,连接 OO_1 ,则 $OO_1 \perp$ 平面 ABC .又 $SA \perp$ 平面 ABC ,所以 $OO_1 \parallel SA$,连接 OS, OA ,由题意知 $OS=OA=2$.过 O 作 SA 的垂线,设垂足为 H ,则四边形 AO_1OH 为矩形,所以 $OO_1=AH$,由 $OS=OA$ 可知 H 为 SA 的中点,则 $OO_1=AH=\frac{1}{2}SA$.

所以在 $Rt\triangle OO_1A$ 中,由勾股定理可得 $OA^2=OO_1^2+O_1A^2$,即 $4=\frac{1}{4}SA^2+3$,得 $SA=2$.]

9.2.5 [设铁球半径为 r cm,若两个铁球的球心在竖直方向上,且分别与两个底面相切,则铁球球心与圆柱上、下底面的距离均为 r ,此时铁球的半径为 $\frac{9}{4}$ cm.

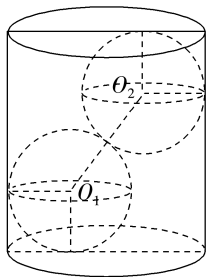


图1

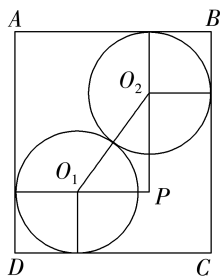


图2

当两球球心不在竖直方向上时,设两个铁球的球心分别为 O_1, O_2 ,此种情况下,当铁球半径最大时,如图1所示,圆柱与两铁球的轴截面如图2所示,其中 $ABCD$ 为圆柱的轴截面, $O_2P \perp AB, O_1P \perp AD$,则有 $O_2P=9-2r, O_1P=8-2r, O_1O_2=2r$,则有 $(2r)^2=(8-2r)^2+(9-2r)^2$,即 $4r^2-68r+145=0$,

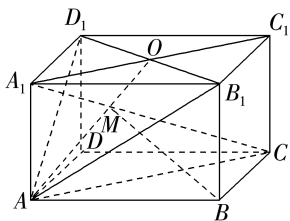
即 $(2r-29)(2r-5)=0$,解得 $r_1=14.5$ (舍去)或 $r_2=2.5$.

因为 $2.5 > \frac{9}{4} = 2.25$,所以铁球半径的最大值为2.5 cm.]

课时作业(五十)

1. B [∵ $AB \parallel PQ, BC \parallel QR$,且 $\angle ABC=60^\circ$,
∴ $\angle PQR=60^\circ$ 或 120° .
故选 B.]

2. A [如图,根据题意,连接 AO, AC ,
则 $A_1C_1 \parallel AC$,



所以 A_1, C_1, C, A 四点共面,

所以 $A_1C \subset$ 平面 ACC_1A_1 ,

又 $M \in A_1C$,所以 $M \in$ 平面 ACC_1A_1 ,

又 $M \in$ 平面 AB_1D_1 ,

所以点 M 在平面 ACC_1A_1 与平面 AB_1D_1 的交线上,

同理可得点 O 在平面 ACC_1A_1 与平面 AB_1D_1 的交线上,

所以 A, M, O 三点共线,

故A正确,B错误;

由上面分析知 $OM \subset$ 平面 AB_1D_1 ,又 $DD_1 \not\subset$ 平面 AB_1D_1 ,
 $DD_1 \cap$ 平面 $AB_1D_1=D_1$,

所以 OM 与 DD_1 为异面直线,故C错误;

连接 BM ,易知 AB_1 与 BM 为异面直线,故D错误.

故选 A.]

3. B [取 CC_1 的中点 F ,连接 BF, D_1F, EF (图略),设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 a ,因为 $AB=CD=EF, AB \parallel CD \parallel EF$,

所以四边形 $ABFE$ 为平行四边形,

所以 $BF \parallel AE$,

则 $\angle D_1BF$ (或其补角)为异面直线 AE 与 BD_1 所成的角,

$$BD_1 = \sqrt{3}a, D_1F = BF = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

在 $\triangle BD_1F$ 中,由余弦定理的推论得

$$\begin{aligned} \cos \angle D_1BF &= \frac{D_1B^2 + BF^2 - D_1F^2}{2D_1B \cdot BF} \\ &= \frac{3a^2 + \frac{5}{4}a^2 - \frac{5}{4}a^2}{2\sqrt{3}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{\sqrt{15}}{5}. \end{aligned}$$

故选 B.]

4. A [如图,连接 DM ,取 DM 的中点 P ,连接 PN, PC ,

因为 M, N 分别是 BC 与 AD 的中点,所以 $NP \parallel AM$,

则 $\angle CNP$ (或其补角)为异面直线 AM 与 CN 所成的角,

$$\text{又 } AM = CN = \frac{\sqrt{3}}{2}, DM \perp BC,$$

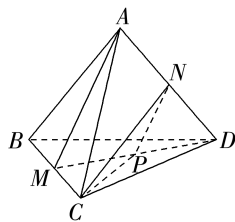
$$\text{所以 } PM = PN = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}, PC = \sqrt{PM^2 + CM^2} = \frac{\sqrt{7}}{4},$$

在 $\triangle CPN$ 中,由余弦定理的推论,得

$$\begin{aligned} \cos \angle CNP &= \frac{NP^2 + CN^2 - CP^2}{2NP \cdot CN} \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

故选 A.]

5. BC [



选项	正误	原因
A	×	若 $\alpha \parallel \beta, a \subset \alpha, b \subset \beta$,则 a 与 b 平行或异面
B	√	若 $a \parallel b, b \subset \alpha$,则平面 α 内所有与 b 平行的直线都与 a 平行
C	√	若 $\alpha \parallel \beta$,则平面 α 内所有直线都与 β 平行,因为 $a \subset \alpha$,所以 $a \parallel \beta$
D	×	若 $\alpha \cap \beta = b, a \subset \alpha$,则当 $a \parallel b$ 时, $a \parallel \beta$

故选 BC.]

6. BCD [对于A,如图1,连接 AB_1, C_1D, BD ,

当P为 BC_1 的中点时, $OP \parallel DC_1 \parallel AB_1$,故A不正确;

对于B,如图2,连接 A_1C, A_1C_1, AC ,

因为 $A_1C \subset$ 平面 $AA_1C_1C, O \in$ 平面 $AA_1C_1C, O \notin A_1C, P \notin$ 平面 AA_1C_1C ,

所以直线 A_1C 与直线 OP 一定是异面直线,故B正确;

对于C,如图2,因为 $A_1A \subset$ 平面 $AA_1C_1C, O \in$ 平面 $AA_1C_1C, O \notin A_1A, P \notin$ 平面 AA_1C_1C ,

所以直线 A_1A 与直线 OP 一定是异面直线,故C正确;

对于D,如图3,连接 AD_1, D_1C, AC ,

因为 $AD_1 \subset$ 平面 $AD_1C, O \in$ 平面 $AD_1C, O \notin AD_1, P \notin$ 平面 AD_1C ,

所以直线 AD_1 与直线 OP 一定是异面直线,故D正确.

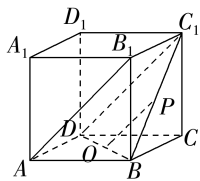


图1

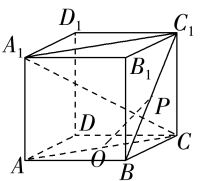


图2

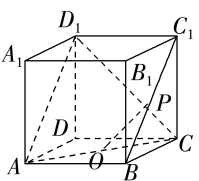


图3

7. $\frac{7}{10}$ [如图,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,连接 BC_1 交 B_1C 于

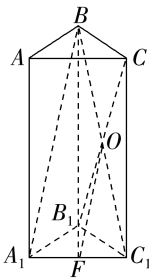
点O,取 A_1C_1 的中点F,连接OF,显然O是 BC_1 的中点,则 $OF \parallel A_1B$,则 $\angle B_1OF$ (或其补角)是 A_1B 与 B_1C 所成的角.在 $\triangle OB_1F$

中, $B_1F = \sqrt{3}, OB_1 = \frac{1}{2}B_1C = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+2^2} =$

$\sqrt{5}, OF = \frac{1}{2}A_1B = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{5},$

则 $\cos \angle B_1OF = \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}} =$

$\frac{7}{10}$,所以直线 A_1B 与直线 B_1C 所成角的余弦值为 $\frac{7}{10}$.]



8. $4\sqrt{3}$ 或4 [取BD的中点E,连接ME,NE.

因为M,N分别是BC,AD的中点,所

以 $ME \parallel CD$ 且 $ME = \frac{1}{2}CD = 4, NE \parallel$

AB 且 $NE = \frac{1}{2}AB = 4,$

可得 $\angle MEN$ (或其补角)即为AB与CD所成的角.

因为异面直线AB与CD所成的角为 60° ,所以 $\angle MEN = 60^\circ$ 或 120° ,

当 $\angle MEN = 120^\circ$ 时,由余弦定理可知

$MN = \sqrt{EN^2 + EM^2 - 2 \times EN \times EM \times \cos 120^\circ} = 4\sqrt{3};$

当 $\angle MEN = 60^\circ$ 时,由余弦定理可知

$MN = \sqrt{EN^2 + EM^2 - 2 \times EN \times EM \times \cos 60^\circ} = 4.]$

9. 证明:(1)连接EF, HG,如图,因为空间四边形ABCD中,

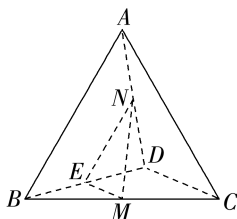
H, G分别是AD, CD的中点,

所以 $HG \parallel AC$,且 $HG = \frac{1}{2}AC$,

又因为 $\frac{CF}{FB} = \frac{AE}{EB} = \frac{1}{3},$

所以 $EF \parallel AC$,且 $EF = \frac{3}{4}AC,$

所以 $HG \parallel EF$,且 $HG \neq EF$,故四边形EFGH为梯形.



(2)由(1)知四边形EFGH

为梯形,且EH, FG是梯形的两腰,

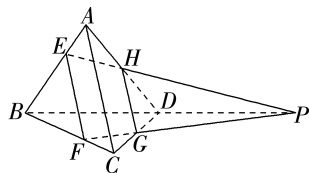
所以EH, FG相交于一点.

设交点为P,

因为 $EH \subset$ 平面ABD,所以 $P \in$ 平面ABD,

同理 $P \in$ 平面BCD,而平面ABD $\cap$ 平面BCD = BD,所以 $P \in$ BD,

故点P是直线EH, BD, FG的公共点,即直线EH, BD, FG相交于一点.



10. 解:(1)如图,设 BB_1 的中点为H,

连接HF, EH, A_1H ,因为F是 CC_1 的中点,

所以 $A_1D_1 \parallel CB \parallel HF$,

$A_1D_1 = CB = HF$,

因此四边形 A_1D_1FH 是平行四边形,

所以 $D_1F \parallel A_1H, D_1F = A_1H$,

因此 $\angle EA_1H$ (或其补角)是异面直线 A_1E 与 D_1F 所成的角.因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2, E是AB的中点,

所以 $A_1E = A_1H = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5},$

$EH = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2},$

由余弦定理的推论,得

$\cos \angle EA_1H = \frac{A_1E^2 + A_1H^2 - EH^2}{2A_1E \cdot A_1H} = \frac{5+5-2}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{5},$

所以异面直线 A_1E 与 D_1F 所成角的余弦值为 $\frac{4}{5}$.

(2)因为 $A_1D_1 \parallel HF, HF \not\subset$ 平面 $A_1D_1E, A_1D_1 \subset$ 平面 A_1D_1E ,所以 $HF \parallel$ 平面 A_1D_1E ,

因此点H, F到平面 A_1D_1E 的距离相等,

即 $V_{\text{三棱锥}A_1-D_1EF} = V_{\text{三棱锥}F-A_1D_1E} = V_{\text{三棱锥}H-A_1D_1E} = V_{\text{三棱锥}D_1-A_1EH},$

$V_{\text{三棱锥}D_1-A_1EH} = \frac{1}{3}D_1A_1 \cdot S_{\triangle A_1EH}$

$= \frac{1}{3} \times 2 \times \left(2^2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \right) = 1,$

所以三棱锥 A_1-D_1EF 的体积为1.

阶段检测(十)

1. D [对于A,如图1,利用两个底面全等的斜棱柱拼接而成的几何体满足A中条件,但该几何体不是棱柱,A错误;

对于B,如图2,利用两个上底面全等,下底面相似的棱台拼接而成的几何体满足B中条件,但该几何体不是棱台,B错误;

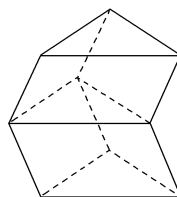


图1

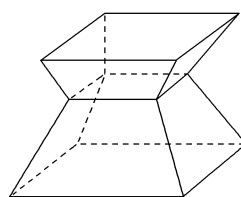


图2

对于C,连接圆柱上、下底面圆周上任意两点,只有连线平行于旋转轴时才是母线,C错误;

对于D,圆台的轴截面是指过圆台轴的平面截取几何体得到的截面,其形状为等腰梯形,这是因为圆台由圆锥被平行于

底面的平面截得,轴截面包含上、下底面的直径和母线,形成对称的等腰梯形,故圆台的轴截面始终是等腰梯形,不可能为直角梯形,D正确.

故选 D.]

2. C [把圆锥侧面沿母线 PA 剪开,展在同一平面内得扇形 APA', 连接 AB, 如图,

设扇形 APA' 圆心角大小为 θ ,

则 $12\theta = 2\pi \times 3$,

解得 $\theta = \frac{\pi}{2}$,

在 $\text{Rt}\triangle PAB$ 中,

$PB = \frac{1}{3}PA' = 4$,

则 $AB = \sqrt{PB^2 + PA'^2} = \sqrt{4^2 + 12^2} = 4\sqrt{10}$,

所以一只蚂蚁从 A 点出发,沿圆锥侧面绕行一周,到达 B 点,

最短路线长度为 $4\sqrt{10}$.

故选 C.]

3. C [根据题意,设原图梯形 ABCD 的高为 h,

直观图梯形 A'B'C'D' 的面积为 30,

则原图的面积 $S = 2\sqrt{2} \times 30 = 60\sqrt{2}$,

原图中, $AB \parallel CD$, 且 $AB = 8, CD = 4$,

则有 $\frac{(8+4)h}{2} = 60\sqrt{2}$, 则 $h = 10\sqrt{2}$.

故选 C.]

4. B [设 $BC = a$, 由“阳马”的定义及 $AC \perp BC$ 可知,

四边形 A_1ACC_1 是矩形, $BC \perp$ 平面 A_1ACC_1 ,

所以“阳马” $B-A_1ACC_1$ 的体积为

$V_1 = \frac{1}{3} \times AC \times CC_1 \times BC = \frac{1}{3} \times 2 \times 3 \times a = 2a$,

由“堑堵”的定义可知, $AC \perp BC$, 且 $CC_1 \perp$ 平面 ABC ,

所以“堑堵” $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为

$V_2 = S_{\triangle ABC} \cdot CC_1 = \frac{1}{2} \times AC \times BC \times CC_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times a \times 3 = 3a$,

所以“阳马” $B-A_1ACC_1$ 与“堑堵” $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积之比

为 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}$.

故选 B.]

5. C [取 CC_1 的中点 E, 连接 AE,

DE, A_1D ,

因为在 $\triangle B_1CC_1$ 中, DE 是中位线, 所以 $DE \parallel B_1C$, 且 $B_1C = 2DE$,

所以 $\angle ADE$ (或其补角) 就是异面直线 AD 与 B_1C 所成的角,

在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中,

$A_1B_1 = A_1C_1 = 2$,

$\angle B_1A_1C_1 = 120^\circ$,

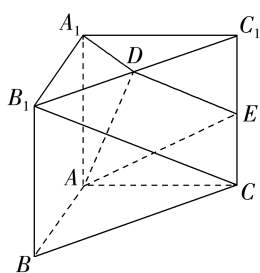
所以 $A_1D \perp B_1C_1$, $A_1D = A_1B_1 \cos 60^\circ = 1$, 可得 $AD = \sqrt{AA_1^2 + A_1D^2} = \sqrt{5}$,

在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中, $CE = \frac{1}{2}CC_1 = 1$, 所以 $AE =$

$\sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{5}$,

在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中, 由余弦定理, 得

$B_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^2 + A_1C_1^2 - 2A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cos 120^\circ} = 2\sqrt{3}$,



所以 $B_1C = \sqrt{BB_1^2 + BC^2} = 4$,

可得 $DE = \frac{1}{2}B_1C = 2$,

在 $\triangle ADE$ 中, $\cos \angle ADE =$

$\frac{AD^2 + DE^2 - AE^2}{2AD \cdot DE} = \frac{5 + 4 - 5}{2 \times \sqrt{5} \times 2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以异面直线 AD 与 B_1C 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故选 C.]

6. A [设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 r, 三棱锥 P-ABC 的外接球的半径为 R,

如图, 经补形可知球心在直三棱柱 ABC-

PDE 高的中点处 O, O' 为 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心, 外接球的半径

$R = OA = \sqrt{OO'^2 + O'A^2}$,

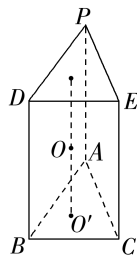
$2O'A = \frac{BC}{\sin A} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = 2r = 4$,

$\therefore r = O'A = 2, OO' = \sqrt{3}$,

$R = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$,

$\therefore$ 三棱锥 P-ABC 的外接球的表面积为 $4\pi R^2 = 28\pi$.

故选 A.]



7. ABC [由已知, 直角三角形斜边长为 $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ (cm),

若以 $\sqrt{5}$ cm 斜边为轴, 则斜边上的高为 $\frac{1 \times 2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ (cm), 所

求体积为 $\frac{1}{3} \times \sqrt{5} \times \pi \times \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{4\sqrt{5}}{15} \pi$ (cm³),

若以 1 cm 直角边为轴, 则所求体积为 $\frac{1}{3} \times 1 \times \pi \times 2^2 = \frac{4}{3} \pi$ (cm³),

若以 2 cm 直角边为轴, 则所求体积为 $\frac{1}{3} \times 2 \times \pi \times 1^2 = \frac{2}{3} \pi$ (cm³).

故选 ABC.]

8. AC [对于 A 选项, 如图, 连接 A_1C_1 ,

因为 O 为 AC, BD 的交点, 直线

A_1C 交平面 C_1BD 于点 M,

所以点 C_1, M, O 在平面 C_1BD 与平面 ACC_1A_1 的交线上, 即

C_1, M, O 三点共线,

则点 C_1, O, A, M 四点共面, 故选项 A 正确;

对于 B 选项, 由选项 A 的分析可知 C_1, M, O 三点共线, 所以直线 C_1O 与直线 A_1C 相交, 故选项 B 错误;

对于 C 选项, 因为 O 为 AC 的中点, 点 M 为直线 A_1C 与平面 C_1BD 的交点, 所以 M 不是 A_1C 的中点,

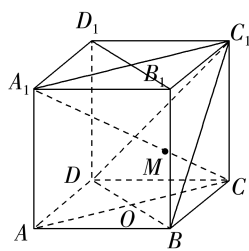
又因为 $A_1A, OM \subset$ 平面 A_1AC , 且 A_1A 与 OM 不平行, 所以直线 A_1A 与直线 OM 相交, 故选项 C 正确;

对于 D 选项, 连接 D_1B_1 , 因为点 D_1, D, O 均在平面 D_1DBB_1 内, 点 M 不在平面 D_1DBB_1 内,

且直线 OM 与直线 DD_1 没有交点, 所以直线 OM 与直线 DD_1 异面,

则点 D_1, D, O, M 四点不共面, 故选项 D 错误,

故选 AC.]



9. $52\pi - 80\pi$ [由圆锥的高为 3 m, 圆柱的高为 4 m, 底面直径为 8 m,

可得 $AE=3, ED=4, AD=\sqrt{3^2+4^2}=5$, 又 $DC=4$, 所以该蒙古包的表面积为 $\pi \cdot ED \cdot AD + 2\pi \cdot ED \cdot DC = 20\pi + 32\pi = 52\pi(\text{m}^2)$;

蒙古包的体积为 $\frac{1}{3}\pi \cdot ED^2 \cdot AE + \pi \cdot ED^2 \cdot BE = 16\pi + 64\pi = 80\pi(\text{m}^3)$.]

10. $5 + 3\sqrt{7} - \frac{7\sqrt{6}}{6}$ [作出示意图如图,

过 A_1 作 $A_1M \perp AC$ 于 M ,

连接 AC, BD, A_1C_1, B_1D_1 ,

因为 $AB=2, A_1B_1=1$,

$AA_1=\sqrt{2}$,

所以上底面面积为 $1^2=1$, 下

底面面积为 $2^2=4$,

所以棱台的侧高为

$$\sqrt{AA_1^2 - \left(\frac{AB-A_1B_1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

所以侧面积为 $4 \times \frac{1}{2} \times (1+2) \times \frac{\sqrt{7}}{2} = 3\sqrt{7}$,

所以该棱台的表面积为 $1+4+3\sqrt{7}=5+3\sqrt{7}$.

因为 $A_1O_1 = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}A_1B_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AO = \frac{1}{2}AC =$

$\frac{1}{2} \times \sqrt{2}AB = \sqrt{2}$,

所以 $AM = \frac{1}{2}(AC - A_1C_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

则 $A_1M = \sqrt{A_1A^2 - AM^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以该棱台的体积为 $\frac{1}{3} \times (1+4+2) \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{7\sqrt{6}}{6}$.]

11. 解: (1) 因为 $AD \parallel BC$,

所以 $\angle A_1AD$ 即为直线 AA_1 与 BC 所成的角.

因为 $\angle A_1AD = 90^\circ$,

所以直线 AA_1 与 BC 所成的角为 90° .

(2) 连接 A_1C_1, A_1B .

因为 $AA_1 \perp CC_1$, 所以四边形 ACC_1A_1 为平行四边形,

所以 $AC \parallel A_1C_1$.

因此 $\angle A_1C_1B$ 就是直线 BC_1 与 AC 所成的角.

因为 $A_1B = \sqrt{2}a, BC_1 = \sqrt{2}a, A_1C_1 = \sqrt{2}a$.

所以 $\triangle A_1BC_1$ 是等边三角形.

因此, $\angle A_1C_1B = 60^\circ$,

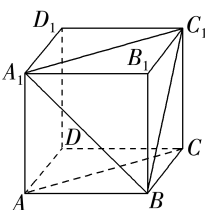
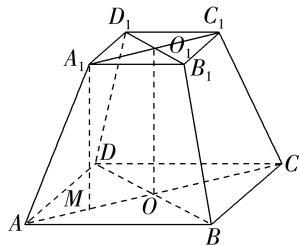
从而直线 BC_1 与 AC 所成的角为 60° .

12. 解: (1) 在梯形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 90^\circ, AD \parallel BC$, 且 $AD = a, BC = 2a, \angle DCB = 60^\circ$,

$$\therefore CD = \frac{BC-AD}{\cos 60^\circ} = 2a, AB = CD \sin 60^\circ = \sqrt{3}a,$$

$$\therefore DD' = AA' - 2AD = 2BC - 2AD = 2a,$$

$$\therefore DO = \frac{1}{2}DD' = a,$$



$\therefore$ 以 l 为轴将梯形 $ABCD$ 旋转一周后, 形成的几何体为圆柱中挖去一个倒放的与圆柱等高的圆锥,

且圆柱高为 $\sqrt{3}a$, 底面半径为 $2a$, 圆锥的母线长为 $2a$, 底面半径为 a ,

$$\therefore \text{圆柱的侧面积 } S_1 = 2\pi \cdot 2a \cdot \sqrt{3}a = 4\sqrt{3}\pi a^2,$$

$$\text{圆锥的侧面积 } S_2 = \pi \cdot a \cdot 2a = 2\pi a^2,$$

$$\text{圆柱的底面积 } S_3 = \pi(2a)^2 = 4\pi a^2,$$

$$\text{圆锥的底面积 } S_4 = \pi a^2,$$

$$\therefore \text{组合体上底面的面积 } S_5 = S_3 - S_4 = 3\pi a^2,$$

$$\therefore \text{旋转体的表面积 } S = S_1 + S_2 + S_3 + S_5 = (4\sqrt{3} + 9)\pi a^2.$$

(2) 由题意知, 形成的几何体的体积为一个圆柱的体积减去一个圆锥的体积,

$$\text{圆柱的体积 } V_1 = \pi(2a)^2 \cdot \sqrt{3}a = 4\sqrt{3}\pi a^3,$$

$$\text{圆锥的体积 } V_2 = \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot \sqrt{3}a = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3,$$

$$\therefore \text{旋转体的体积 } V = V_1 - V_2 = 4\sqrt{3}\pi a^3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3 =$$

$$\frac{11\sqrt{3}}{3}\pi a^3.$$

(3) 如图, 作出圆锥的轴截面, 球与圆锥侧面相切, 设球心为 M , 球的半径为 R , N 为切点, 连接 MN ,

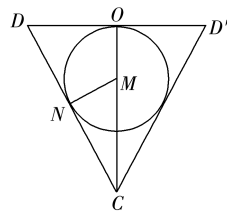
则 $MN \perp CD, MN = MO = R$,

则 $\triangle CMN \sim \triangle CDO$, 可得 $\frac{MN}{OD}$

$$= \frac{MC}{CD},$$

$$\text{即 } \frac{R}{a} = \frac{\sqrt{3}a - R}{2a}, \text{ 解得 } R = \frac{\sqrt{3}}{3}a,$$

$$\therefore \text{球的体积 } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 a^3 = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3.$$



课时作业(五十一)

1. B [由线面平行的性质定理可知 $EF \parallel PB$.]

2. B [由 $\alpha \cap \gamma = l, \beta \cap \gamma = m, l \parallel m$, 则 α, β 可能相交,

故“ $l \parallel m$ ”推不出“ $\alpha \parallel \beta$ ”,

由 $\alpha \cap \gamma = l, \beta \cap \gamma = m, \alpha \parallel \beta$, 由面面平行的性质定理知 $l \parallel m$,

故“ $\alpha \parallel \beta$ ”能推出“ $l \parallel m$ ”,

故“ $l \parallel m$ ”是“ $\alpha \parallel \beta$ ”的必要不充分条件.

故选 B.]

3. C [如图, 连接 CD , 交 PE 于点 G ,

连接 FG , 因为 $AD \parallel$ 平面 PEF , $AD \subset$ 平面 ADC , 平面 $ADC \cap$ 平面

$PEF = FG$, 所以 $AD \parallel FG$.

因为 D, E 分别为棱 PB, BC 的中点,

所以 G 是 $\triangle PBC$ 的重心,

$$\text{所以 } \frac{AF}{FC} = \frac{DG}{GC} = \frac{1}{2}.$$

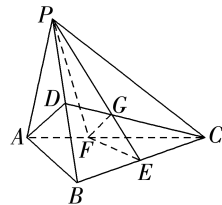
$$\text{故选 C.}]$$

4. D [连接 BF (图略), 由于 B, E, F 三点共面, $F \in$ 平面

BEF ,

$M \notin$ 平面 BEF , EB 不过点 F , 故 MF, EB 为异面直线, 故 A 错误;

连接 B_1E (图略), 由于 B_1, N, E 三点共面, $B_1 \in$ 平面



$B_1NE, A_1 \notin \text{平面 } B_1NE, NE$ 不过点 B_1 , 故 A_1B_1, NE 为异面直线, 故 B 错误;

$\because$ 在平行四边形 AA_1B_1B 中, $AM=2MA_1$,

$BN=2NB_1, \therefore AM \parallel BN, AM=BN$,

故四边形 $AMNB$ 为平行四边形,

$\therefore MN \parallel AB$ 且 $MN=AB$.

又 $MN \not\subset \text{平面 } ABC, AB \subset \text{平面 } ABC$,

$\therefore MN \parallel \text{平面 } ABC$.

又 $MN \subset \text{平面 } MNEF, \text{平面 } MNEF \cap \text{平面 } ABC = EF$,

$\therefore MN \parallel EF$,

显然在 $\triangle ABC$ 中, $EF \neq AB, \therefore EF \neq MN$,

$\therefore$ 四边形 $MNEF$ 为梯形, 故 C 错误, D 正确. 故选 D.]

5. **BC** [若 $a \parallel b$ 且 $b \subset \alpha$, 则 $a \parallel \alpha$ 或 $a \subset \alpha$, 故 A 错误; 若 $a \parallel \alpha$ 且 $b \subset \alpha$, 则 $a \parallel b$ 或 a, b 为异面直线, 故 B 正确; 若 $a \parallel b$ 且 $a \parallel \alpha$, 则 $b \parallel \alpha$ 或 $b \subset \alpha$, 故 C 正确; 若 $a \parallel \alpha$ 且 $b \parallel \alpha$, 则 $a \parallel b$ 或 a, b 相交或异面, 故 D 错误.]

6. **ABD** [连接 OQ , 因为 O 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点, 所以 O 为 AC 的中点, 又 Q 为 PA 的中点, 所以 $OQ \parallel PC$, 又 $PC \subset \text{平面 } PCD, OQ \not\subset \text{平面 } PCD$,

所以 $OQ \parallel \text{平面 } PCD$, 故 A 正确;

同理 $OQ \subset \text{平面 } BDQ, PC \not\subset \text{平面 } BDQ$, 所以 $PC \parallel \text{平面 } BDQ$, 故 B 正确;

由四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

所以 $AB \parallel CD, AB \subset \text{平面 } PAB, CD \not\subset \text{平面 } PAB$,

故 $CD \parallel \text{平面 } PAB$, 故 D 正确;

又 AQ 与平面 PCD 相交于点 P , 故 C 错误.

故选 ABD.]

7. $\frac{5}{2}$ [$\because \alpha \parallel \beta, \triangle PAB$ 所在的平面与 α, β 分别交于 CD, AB ,

$\therefore CD \parallel AB$, 则 $\frac{PC}{PA} = \frac{CD}{AB}$,

$\therefore AB = \frac{PA \times CD}{PC} = \frac{5 \times 1}{2} = \frac{5}{2}$.]

8. 点 M 与点 H 重合(点 M 在线段 FH 上即可)

[连接 HN, FH, FN (图略),

则 $FH \parallel DD_1, HN \parallel BD$, 易知 $FH \parallel \text{平面 } B_1BDD_1, HN \parallel \text{平面 } B_1BDD_1$,

$\therefore FH \cap HN = H, FH, HN \subset \text{平面 } FHN$,

$\therefore \text{平面 } FHN \parallel \text{平面 } B_1BDD_1$, 只需 $M \in FH$,

则 $MN \subset \text{平面 } FHN$,

$\therefore MN \parallel \text{平面 } B_1BDD_1$.]

9. 证明: (1) 取 B_1D_1 的中点 O_1 , 连接 CO_1, A_1O_1 ,

$\because ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是直四棱柱, $\therefore A_1O_1 \parallel OC$ 且 $A_1O_1 = OC$,

$\therefore$ 四边形 A_1OCO_1 为平行四边形,

$\therefore A_1O \parallel O_1C$, 又 $O_1C \subset \text{平面 } B_1CD_1$,

$A_1O \not\subset \text{平面 } B_1CD_1, \therefore A_1O \parallel \text{平面 } B_1CD_1$.

(2) $\because BB_1 \parallel AA_1$ 且 $BB_1 = AA_1, AA_1 \parallel DD_1$ 且 $AA_1 = DD_1$,

$\therefore BB_1 \parallel DD_1$ 且 $BB_1 = DD_1$,

$\therefore$ 四边形 BB_1D_1D 是平行四边形,

$\therefore BD \parallel B_1D_1$,

$\therefore BD \not\subset \text{平面 } B_1CD_1, B_1D_1 \subset \text{平面 } B_1CD_1$,

$\therefore BD \parallel \text{平面 } B_1CD_1$,

由(1)得 $A_1O \parallel \text{平面 } B_1CD_1$,

$\therefore BD \cap A_1O = O, BD, A_1O \subset \text{平面 } A_1BD$,

$\therefore \text{平面 } A_1BD \parallel \text{平面 } B_1CD_1$.

(3) 由(2)得 $BD \parallel B_1D_1$,

$\therefore B_1D_1 \not\subset \text{平面 } ABCD, BD \subset \text{平面 } ABCD$,

$\therefore B_1D_1 \parallel \text{平面 } ABCD$,

$\therefore B_1D_1 \subset \text{平面 } B_1CD_1, \text{平面 } B_1CD_1 \cap \text{平面 } ABCD = l$,

$\therefore B_1D_1 \parallel l$.

10. (1) 解: 直线 AG 与直线 EF 是异面直线, 直线 CG 与平面 ABB_1A_1 相交.

(2) 证明: 取 AC 的中点为 H , 连接 GH, EH , 如图,

$\because E, H, G$ 分别是棱 AB, AC, B_1C_1 的中点,

$\therefore EH \parallel BC$ 且 $EH = \frac{1}{2}BC, B_1G \parallel$

BC 且 $B_1G = \frac{1}{2}BC$,

$\therefore EH \parallel B_1G$ 且 $EH = B_1G$,

$\therefore$ 四边形 $EHGB_1$ 是平行四边形,

$\therefore EB_1 \parallel GH$,

$\therefore GH \subset \text{平面 } ACG, B_1E \not\subset \text{平面 } ACG$,

$\therefore B_1E \parallel \text{平面 } ACG$.

(3) 当点 N 为棱 CC_1 的中点时, 平面 $NEF \parallel \text{平面 } A_1BC_1$.

证明: 连接 NF, EN , 如图,

$\because E, F$ 分别是棱 AB, BC 的中点,

$\therefore EF \parallel AC$,

$\therefore AC \parallel A_1C_1$,

$\therefore EF \parallel A_1C_1$,

$\therefore EF \not\subset \text{平面 } A_1BC_1, A_1C_1 \subset \text{平面 } A_1BC_1$,

$\therefore EF \parallel \text{平面 } A_1BC_1$,

$\because N, F$ 分别是棱 CC_1, BC 的中点,

$\therefore NF \parallel BC_1$,

$\therefore NF \not\subset \text{平面 } A_1BC_1, BC_1 \subset \text{平面 } A_1BC_1$,

$\therefore NF \parallel \text{平面 } A_1BC_1$,

$\therefore EF \cap NF = F, EF, NF \subset \text{平面 } NEF$,

$\therefore \text{平面 } NEF \parallel \text{平面 } A_1BC_1$.

课时作业(五十二)

1. **D** [当点在交线上时, 若 $\alpha \perp \beta$, 则 l 与 β 的位置关系可能是 l 与 β 相交或 $l \subset \beta$, 故充分性不成立;

当点在交线上时, 若 $l \perp \beta$, 此时 $l \subset \alpha$ 或 $l \not\subset \alpha$, 所以 α, β 不一定垂直, 故必要性不成立.

所以“ $\alpha \perp \beta$ ”是“ $l \perp \beta$ ”的既不充分也不必要条件.

故选 D.]

2. **C** [对于 A, 由 $\alpha \perp \beta, \alpha \subset \alpha$, 设 $\alpha \cap \beta = l$,

当 $a \parallel l$ 时, 可得 $a \parallel \beta$, 故 A 错误; 对于 B,

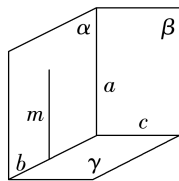
由 $a \perp \beta, \alpha \perp \beta$ 可得 $a \parallel \alpha$ 或 $a \subset \alpha$, 故 B 错误; 对于 C, 如图, 设 $\alpha \cap \gamma = b, \beta \cap \gamma = c$,

在平面 α 内作不与 a 重合的直线 m ,

使 $m \perp b$, 因为 $\alpha \perp \gamma$, 则 $m \perp \gamma$, 因为 $\beta \perp$

$\gamma, m \not\subset \beta$, 则 $m \parallel \beta$, 因为 $\alpha \cap \beta = a$, 则 $m \parallel a$, 于是 $a \perp \gamma$, 故 C 正确; 对于 D, 当 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = a, b \perp a$ 时, 若 $b \not\subset \alpha$, 且 $b \not\subset \beta$, 则 b

可以和平面 α, β 成任意角度, 故 D 错误.]



3. D [对于 A 选项, 若 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$, 则 α, β 平行或相交, 与 A 选项不符合, 所以 A 不正确;

对于 B 选项, 若 $m \perp n, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 α, β 平行或相交, 与 B 选项不符合, 所以 B 不正确;

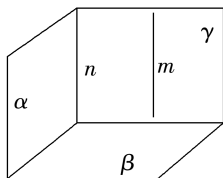
对于 C 选项, 若 $m \perp n, \alpha \cap \beta = m, n \subset \beta$, 则 α, β 斜交或垂直, 与 C 选项不符合, 所以 C 不正确;

对于 D 选项, 如图所示,

因为 $m \parallel \alpha$, 过直线 m 作平面 γ , 使得 $\alpha \cap \gamma = n$,

由线面平行的性质定理可得 $m \parallel n$,

因为 $m \perp \beta$, 则 $n \perp \beta$, 因为 $n \subset \alpha$, 故 $\alpha \perp \beta$, 而反过来不成立, D 满足要求. 故选 D.]



4. D [对于 B, 如图,

因为 $AD \parallel BC, AD = AB$, $\angle BAD = 90^\circ$,

所以 $\angle ABD = \angle ADB = 45^\circ$,

又因为 $\angle BCD = 45^\circ, AD \parallel BC$,

所以 $\angle ADC = 135^\circ$,

所以 $\angle BDC = \angle ADC - \angle ADB = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$,

所以 $CD \perp BD$, 所以 B 正确;

对于 A, 由 B 选项知 $CD \perp BD$,

又因为平面 $ABD \perp$ 平面 $BCD, CD \subset$ 平面 BCD , 平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$,

所以 $CD \perp$ 平面 ABD ,

因为 $AB \subset$ 平面 ABD ,

所以 $CD \perp AB$, 所以 A 正确;

对于 C, 由选项 A 知, $CD \perp$ 平面 ABD ,

因为 $CD \subset$ 平面 ADC ,

所以平面 $ADC \perp$ 平面 ABD , 所以 C 正确;

对于 D, 如图, 过点 A 作 $AE \perp BD$, 垂足为 E,

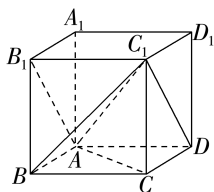
因为平面 $ABD \perp$ 平面 $BCD, AE \subset$ 平面 ABD , 平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$,

所以 $AE \perp$ 平面 BCD ,

显然 $AE \not\subset$ 平面 ABC , 所以平面 ABC 与平面 BDC 不垂直, 所以 D 错误.

故选 D.]

5. ACD [如图所示,



对于 A, 因为 $CD \parallel AB$, 则 AB_1 与 CD 所成的角为 $\angle BAB_1 = 45^\circ$, A 正确;

对于 B, 因为 $AB \parallel A_1B_1$,

所以 AC_1 与 A_1B_1 所成的角为 $\angle BAC_1$ 或其补角,

因为 $AB = 2, BC_1 = \sqrt{2} BC = 2\sqrt{2}, AC_1 = \sqrt{3} AB = 2\sqrt{3}$, 所以 $AB^2 + BC_1^2 = AC_1^2$,

则 $AB \perp BC_1$, 所以 $\tan \angle BAC_1 = \frac{BC_1}{AB} = \sqrt{2}$, 故 $\angle BAC_1 \neq 45^\circ$,

B 错误;

对于 C, 因为 $B_1C_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 故直线 AC_1 与平面 ABB_1A_1 所成的角为 $\angle B_1AC_1$,

因为 $AB_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 则 $B_1C_1 \perp AB_1$,

所以 $\sin \angle B_1AC_1 = \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

因此直线 AC_1 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, C 正确;

对于 D, 因为 $AD \perp$ 平面 CC_1D_1D , $CD, C_1D \subset$ 平面 CC_1D_1D , 则 $AD \perp CD, AD \perp C_1D$,

所以二面角 C_1-AD-B 的平面角为 $\angle CDC_1 = 45^\circ$, D 正确. 故选 ACD.]

6. BCD [对于 A, 假设 $PB \perp AC$,

$\therefore BC \perp AC, PB \cap BC = B, PB, BC \subset$ 平面 PBC ,

$\therefore AC \perp$ 平面 PBC ,

$\therefore PC \subset$ 平面 $PBC, \therefore AC \perp PC$,

$\therefore PA \perp$ 平面 $ABC, AC \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore AC \perp PA$,

在 $\triangle PCA$ 中, $PA \perp AC, PC \perp AC$, 不能同时成立, 故 A 错误;

对于 B, $\therefore PA \perp$ 平面 $ABC, BC \subset$ 平面 $ABC, \therefore BC \perp PA$,

$\therefore BC \perp AC, PA \cap AC = A, PA, AC \subset$ 平面 PAC ,

$\therefore BC \perp$ 平面 PAC , 又 $PC \subset$ 平面 PAC ,

$\therefore PC \perp BC$, 故 B 正确;

对于 C, $\therefore PA \perp$ 平面 $ABC, PA \subset$ 平面 $PAC, \therefore$ 平面 $ABC \perp$ 平面 PAC , 故 C 正确;

对于 D, 由选项 B 可知 $BC \perp$ 平面 PAC ,

$\therefore BC \subset$ 平面 $PBC, \therefore$ 平面 $PBC \perp$ 平面 PAC , 故 D 正确.

故选 BCD.]

7. $\frac{1}{3}$ [连接 A_1C_1, AC (图略), 由题意知 $\angle AC_1A_1$ 为 AC_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角.

因为 $AB = BC = 2$, 所以 $A_1C_1 = AC = 2\sqrt{2}$,

又 $AA_1 = 1$, 所以 $AC_1 = 3$,

所以 $\sin \angle AC_1A_1 = \frac{AA_1}{AC_1} = \frac{1}{3}$.]

8. 2 [如图, 取 AB 的中点 E , 连接

DE, CE ,

$\therefore BC = AC$,

$\therefore CE \perp AB$,

又平面 $ADB \perp$ 平面 ABC , 且平面

$ADB \cap$ 平面 $ABC = AB, CE \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore CE \perp$ 平面 ADB , 又 $DE \subset$ 平面 ADB ,

$\therefore CE \perp DE$,

$\therefore AB = 2, AC = BC = \sqrt{2}, \therefore AC^2 + BC^2 = AB^2$, 则 $AC \perp BC$, 可得 $CE = 1$,

在等边三角形 ADB 中, 由 $AB = 2$, 求得 $DE = \sqrt{3}$,

在 $Rt\triangle DEC$ 中, 有 $DC = \sqrt{DE^2 + EC^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$.]

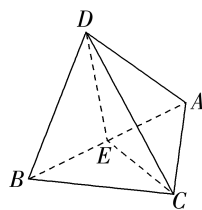
9. 证明: 因为 $PA \perp$ 平面 ABC , 且 $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $PA \perp BC$.

因为 AB 是圆 O 的直径, 所以 $BC \perp AC$.

又 $PA \cap AC = A, PA, AC \subset$ 平面 PAC ,

所以 $BC \perp$ 平面 PAC .

因为 $AE \subset$ 平面 PAC , 所以 $BC \perp AE$.



又 $PC \perp AE$, 且 $PC \cap BC = C$, $PC, BC \subset$ 平面 PBC , 所以 $AE \perp$ 平面 PBC .

10. (1) 证明: 如图, 取 AP 的中点 M , 连接 MD, ME .

因为 E, M, F 分别是 PB, PA, CD 的中点, 四边形 $ABCD$ 是矩形,

所以 $ME \parallel AB, ME = \frac{1}{2}AB$, 且

$DF \parallel AB, DF = \frac{1}{2}AB$, 所以 $ME \parallel DF, ME = DF$,

所以四边形 $EFDM$ 为平行四边形, 所以 $EF \parallel MD$.

又 $MD \subset$ 平面 $PAD, EF \not\subset$ 平面 PAD , 所以 $EF \parallel$ 平面 PAD .

(2) 证明: 因为 $PD = AD = 1, M$ 为 AP 的中点, 所以 $DM \perp AP$,

因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD, AB \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PD \perp AB$, 因为四边形 $ABCD$ 是矩形, 所以 $AD \perp AB$,

又 $PD \cap AD = D, PD, AD \subset$ 平面 PAD , 所以 $AB \perp$ 平面 PAD ,

又因为 $DM \subset$ 平面 PAD ,

所以 $AB \perp DM$,

又因为 $AB \cap AP = A, AB, AP \subset$ 平面 ABP ,

所以 $DM \perp$ 平面 ABP ,

由(1)知 $EF \parallel MD$, 所以 $EF \perp$ 平面 PAB .

(3) 解: 因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD, AB, AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PD \perp AB, PD \perp AD$,

又 $PD = AD = 1$, 所以 $PA = \sqrt{2}$,

因为 $PB \perp$ 平面 $AEF, AE \subset$ 平面 AEF , 所以 $PB \perp AE$,

又 E 是 PB 的中点, 所以 $AB = PA = \sqrt{2}, CF = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以直角梯形 $ABCF$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \right) \times 1 = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

因为点 E 到平面 $ABCF$ 的距离 $d = \frac{1}{2}PD = \frac{1}{2}$,

所以 $V_{\text{四棱锥}E-ABCF} = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

阶段检测(十一)

1. D [因为 $AD \perp BC, AD \perp BD, BC \cap BD = B, BC, BD \subset$ 平面 BDC , 所以 $AD \perp$ 平面 BDC . 又 $AD \subset$ 平面 ADC , 所以平面 $ADC \perp$ 平面 DBC . 故选 D.]

2. B [根据题意, 分两步来判断:]

①由线面垂直的判定, 当 $a \subset \alpha, l \perp a$ 时, 不足以判断 $l \perp \alpha$, 故由“ $l \perp a$ ”推不出“ $l \perp \alpha$ ”;

② $a \subset \alpha$, 若 $l \perp \alpha$, 由线面垂直的定义可得, $l \perp a$, 即“ $l \perp \alpha$ ”是“ $l \perp a$ ”的必要条件,

则“ $l \perp a$ ”是“ $l \perp \alpha$ ”的必要不充分条件,

故选 B.]

3. C [对于 A, B, 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$, 则 m, n 可能平行、相交或异面, 故 A, B 错误.

对于 C, D, 若 $m \parallel \alpha, n \perp \alpha$, 则 $m \perp n$, 且 m 与 n 相交或异面, 故 D 错误.

故选 C.]

4. C [取 AB 的中点 M , 连接 OM, CM ,

因为 $OA = OB$, 所以 $AB \perp OM$,

因为 $OA \perp OC, OB \perp OC, OB \cap$

$OA = O, OA, OB \subset$ 平面 OAB ,

所以 $OC \perp$ 平面 OAB ,

又 $AB \subset$ 平面 OAB ,

所以 $OC \perp AB$,

因为 $OM \cap CO = O$,

$OM, CO \subset$ 平面 OMC ,

所以 $AB \perp$ 平面 OMC ,

要使 $CD \perp AB$, 其中 $C \in$ 平面 OMC , 故需 $D \in$ 平面 OMC , 连接 DM , 则 $DM \subset$ 平面 OMC ,

故只需 $AB \perp DM$,

又 M 为 AB 的中点, 故 $DA = DB$ 时, 满足要求. 故选 C.]

5. A [如图, 取 BE 的中点 M , 连接 DM, AM ,

由 $PD = BD$, 可得 D 为 PB 的中点,

又因为 M 为 BE 的中点,

可得 $MD \parallel PE$,

又因为 $MD \not\subset$ 平面 $PEF, PE \subset$ 平面 PEF , 可得 $MD \parallel$ 平面 PEF ,

又由于 $AD \parallel$ 平面 PEF , 且 $AD \cap MD = D, AD, MD \subset$ 平面 ADM ,

可得平面 $PEF \parallel$ 平面 ADM , 由 $AM \subset$ 平面 ADM ,

可得 $AM \parallel$ 平面 PEF ,

又由于 $AM \subset$ 平面 ABC , 平面 $ABC \cap$ 平面 $PEF = EF$, 可得 $AM \parallel EF$,

又因为 $AF = \frac{1}{2}FC$,

可得 $ME = \frac{1}{2}EC$, 可得 $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,

故 $\lambda = \frac{1}{2}$.

故选 A.]

6. D [由题意知 $\triangle PAB$ 为正三角形, 因为 $PC^2 + PD^2 = CD^2$, 所以 $PC \perp PD$. 如图, 分别取

AB, CD 的中点 E, F , 连接 PE ,

EF, PF , 则 $PE = 2\sqrt{3}, PF = 2$,

$EF = 4$, 于是 $PE^2 + PF^2 = EF^2$,

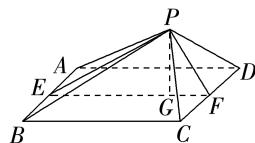
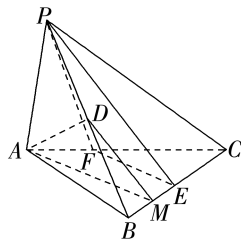
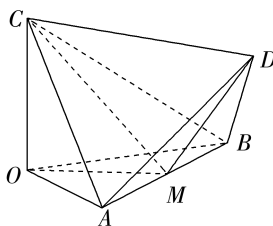
所以 $PE \perp PF$. 过点 P 作 $PG \perp EF$, 垂足为 G . 易知 $CD \perp PF, CD \perp EF, EF, PF \subset$ 平面 PEF , 且 $EF \cap PF = F$, 所以 $CD \perp$ 平面 PEF . 又 $PG \subset$ 平面 PEF , 所以 $CD \perp PG$. 又 $PG \perp EF, CD, EF \subset$ 平面 $ABCD, CD \cap EF = F$, 所以 $PG \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 PG 为四棱锥 $P-ABCD$ 的高. 由 $\frac{1}{2}PE \cdot PF =$

$\frac{1}{2}EF \cdot PG$, 得 $PG = \frac{PE \cdot PF}{EF} = \frac{2\sqrt{3} \times 2}{4} = \sqrt{3}$. 故选 D.]

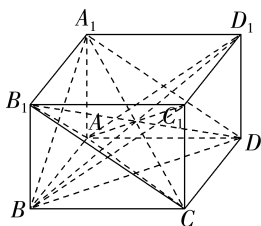
7. BC [由题意, 底面 $ABCD$ 是长方形, 故 $AC \perp BD$ 不成立, 由于 $AC \subset$ 平面 ACC_1 , 由线面垂直的性质可知 BD 与平面 ACC_1 不垂直,

因为 $CC_1 \perp$ 平面 $ABCD, BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $CC_1 \perp BD$, 若 $AC_1 \perp BD$,

由于 $CC_1 \cap AC_1 = C_1, CC_1, AC_1 \subset$ 平面 ACC_1 , 所以 $AC_1 \perp BD$ 不成立, 故 A 错误;

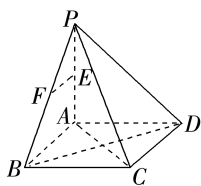


由于 $B_1C = \sqrt{BC^2 + B_1B^2} = \sqrt{2} = A_1B_1$,
在长方体中,有 $B_1C = A_1B_1 = CD = A_1D$,
由于 $CD \perp$ 平面 A_1D_1DA , $A_1D \subset$ 平面 A_1D_1DA , 所以 $CD \perp A_1D$,
由于 $A_1B_1 \parallel CD$, 所以四边形 A_1B_1CD 是正方形,
所以 $A_1C \perp B_1D$, 故 B 正确;
由于 $AB \parallel CD$, 所以 $AB \perp A_1D$,
由于四边形 A_1D_1DA 是正方形, 所以 $AD_1 \perp A_1D$,
由于 $AB \cap AD_1 = A$, 且 $AB, AD_1 \subset$ 平面 ABD_1 ,
所以 $A_1D \perp$ 平面 ABD_1 , 故 C 正确;
由于四边形 A_1B_1BA 是长方形, 所以 $AB_1 \perp A_1B$ 不成立,
由线面垂直的性质可知, $AB_1 \perp$ 平面 A_1BD 不成立, 故 D 错误.



故选 BC.]

8. AD [如图所示, 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp CD$, 又因为底面 $ABCD$ 是矩形, 所以 $CD \perp AD$, 又 $PA \cap AD = A$, 所以 $CD \perp$ 平面 PAD , 所以 $CD \perp PD$, 故 A 正确; 因为 $CD \parallel AB$, $CD \perp$ 平面 PAD , 所以 $AB \perp$ 平面 PAD , 又 $PC \cap$ 平面 $PAD = P$, 所以 AB 与 PC 不垂直, 故 B 错误; 因为底面 $ABCD$ 是矩形, 所以 BD 与 AC 不一定垂直, 则 BD 与平面 PAC 不一定垂直, 所以平面 PBD 与平面 PAC 不一定垂直, 故 C 错误; 因为 E, F 分别是棱 PA, PB 的中点, 所以 $EF \parallel AB$, 又 $AB \parallel CD$, 所以 $EF \parallel CD$, 所以 E, F, C, D 四点共面, 故 D 正确.]



9. $\frac{\sqrt{21}}{7}$ [如图, 取 VD 的中点 E , 连

接 AE, BE , 则 $AE \perp VD$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AB \perp AD$.

又平面 $VAD \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$, 平面 $VAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

$\therefore AB \perp$ 平面 VAD , 则 $AB \perp AV$,

$\therefore \angle VAB = 90^\circ$.

$\because \triangle VAD$ 是正三角形, 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore$ 由勾股定理, 可知 $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$

$= \sqrt{AB^2 + VA^2} = VB$, $\therefore BE \perp VD$,

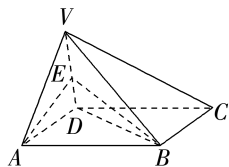
$\therefore \angle AEB$ 就是所求二面角的平面角.

在 $Rt\triangle BAE$ 中, $\angle BAE = 90^\circ$,

$AE = \frac{\sqrt{3}}{2}AD = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$, $BE = \frac{\sqrt{7}}{2}AB$,

$\therefore \cos \angle AEB = \frac{AE}{BE} = \frac{\sqrt{21}}{7}$,

即所求二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.]



10. 2 或 34 [$\because$ 平面 $\alpha \parallel$ 平面 β , $A, C \in \alpha$, $B, D \in \beta$, 直线 AB 与 CD 交于点 P , $\therefore AB, CD$ 共面, 且 $AC \parallel BD$,

① 若点 P 在平面 α, β 的外部, $\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{CP}{PD}$,

$\because AP = 8, BP = 9, CP = 16$,

$\therefore \frac{8}{9} = \frac{16}{PD}$, 解得 $PD = 18$,

$\therefore CD = PD - PC = 18 - 16 = 2$.

② 若点 P 在平面 α, β 之间,

则 $\frac{AP}{BP} = \frac{CP}{PD}$, 即 $\frac{8}{9} = \frac{16}{PD}$, 解得 $PD = 18$,

则 $CD = CP + PD = 18 + 16 = 34$.]

11. 证明: (1) 连接 EC , 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD \perp$

DC , $BC = CD = \frac{1}{2}AD = 1$, E 为棱 AD 的中点, $PA \perp$ 平面

$ABCD$.

$\therefore BC = AE$,

又 $\because AD \parallel BC$, $\therefore$ 四边形 $AECB$ 为平行四边形, $\therefore AB \parallel CE$,

又 $\because CE \subset$ 平面 PCE , $AB \not\subset$ 平面 PCE ,

$\therefore AB \parallel$ 平面 PCE .

(2) $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面

$ABCD$, $\therefore PA \perp BD$,

连接 BE , 由题意知 $AD \parallel BC$, E 为棱

AD 的中点, $BC = \frac{1}{2}AD = 1$,

知 $BC \parallel DE$, 且 $BC = DE$, 则四边形 $BCDE$ 为平行四边形,

$\because AD \perp DC$, $\therefore DE \perp CD$, 又 $BC = CD = 1$,

所以平行四边形 $BCDE$ 为正方形,

$\therefore BD \perp EC$,

又 $AB \parallel EC$, $\therefore BD \perp AB$, 又 $PA \cap AB = A$, $PA, AB \subset$ 平面 PAB ,

$\therefore BD \perp$ 平面 PAB , 又 $BD \subset$ 平面 PBD ,

$\therefore$ 平面 $PAB \perp$ 平面 PBD .

12. (1) 证明: 由题意得, $EF \parallel MC$, 且 $EF = MC$, 所以四边形 $EFCM$ 是平行四边形, 所以 $EM \parallel FC$.

又 $FC \subset$ 平面 BCF , $EM \not\subset$ 平面 BCF , 所以 $EM \parallel$ 平面 BCF .

(2) 解: 取 DM 的中点 O , 连接 OA, OE (图略), 因为 $AB \parallel MC$, 且 $AB = MC$, 所以四边形 $AMCB$ 是平行四边形, 所以 $AM = BC = \sqrt{10}$,

又 $AD = \sqrt{10}$, 故 $\triangle ADM$ 是等腰三角形, 同理 $\triangle EDM$ 是等边三角形, 可得 $OA \perp DM$, $OE \perp DM$, $OA = \sqrt{AD^2 - \left(\frac{DM}{2}\right)^2} = 3$,

$OE = \sqrt{ED^2 - \left(\frac{DM}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$, 又 $AE = 2\sqrt{3}$, 所以 $OA^2 + OE^2 = AE^2$, 故 $OA \perp OE$.

又 $OA \perp DM$, $OE \cap DM = O$, $OE, DM \subset$ 平面 EDM , 所以 $OA \perp$ 平面 EDM .

易知 $S_{\triangle EDM} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

在 $\triangle ADE$ 中, $\cos \angle DEA = \frac{4 + 12 - 10}{2 \times 2 \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$,

所以 $\sin \angle DEA = \frac{\sqrt{13}}{4}$, $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{39}}{2}$.

设点 M 到平面 ADE 的距离为 d , 由 $V_{\text{三棱锥}M-ADE} =$

$V_{\text{三棱锥}A-EDM}$, 得 $\frac{1}{3} S_{\triangle ADE} \cdot d = \frac{1}{3} S_{\triangle EDM} \cdot OA$, 得 $d =$

$\frac{6\sqrt{13}}{13}$, 故点 M 到平面 ADE 的距离为 $\frac{6\sqrt{13}}{13}$.

课时作业(五十三)

1. C [对于 A, 由向量的加法法则可知, $a-b=-(b+c)+(a+c)$, 所以 $\{a-b, b+c, a+c\}$ 不能构成空间的一个基底, 故 A 错误;

对于 B, 三个向量 a, b, c 中任意两个一定共面, 但它们三个却不一定共面, 故 B 错误;

对于 C, 已知 $\{a, b, c\}$ 是空间的一个基底, 则 a, b, c 不共面, 可知 $\{a+b, b+c, c+a\}$ 也不共面, 所以 $\{a+b, b+c, c+a\}$ 也是空间的一个基底, 故 C 正确;

对于 D, 只有当 a, b, c 不共面时, 空间任意一向量 p 才能表示为 $p=xa+yb+zc$, 故 D 错误. 故选 C.]

2. C [因为 P, A, B, C 四点共面, 所以 $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ 共面, 不妨设 $\overrightarrow{PC}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}=(2x-y, x+2y, -3x+3y)=(\lambda, 6, -9)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 2x-y=\lambda, \\ x+2y=6, \\ -3x+3y=-9, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=4, \\ y=1, \\ \lambda=7. \end{cases}$$

故选 C.]

3. A [连接 EC, ED , 如图所示,

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}=$$

$$\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED})=\overrightarrow{AE}+$$

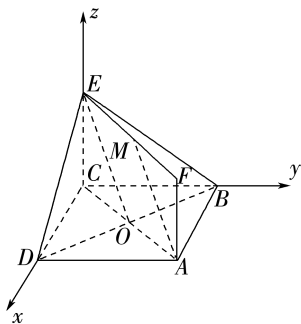
$$\frac{1}{6}(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED})=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{6}(\overrightarrow{AC}-$$

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+$$

$$\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{a}+\frac{1}{6}\overrightarrow{b}+\frac{1}{6}\overrightarrow{c}.$$

故选 A.]

4. C [设 AC, BD 交于点 O , 连接 OE ,



$\because$ 正方形 $ABCD$ 与矩形 $ACEF$ 所在平面互相垂直, $AB=\sqrt{2}, AF=1$,

M 在 EF 上, 且 $AM\parallel$ 平面 BDE ,

$\therefore AM\parallel OE$, 又 $AO\parallel EM$, $\therefore$ 四边形 $OAME$ 是平行四边形,

$\therefore M$ 是 EF 的中点,

$$\therefore E(0,0,1), F(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1),$$

$$\therefore M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \text{ 故选 C.}]$$

5. D [由题意得 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=p+n, |\overrightarrow{OA}|=\sqrt{m^2+n^2}=1$,

$$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{p^2+n^2}=1,$$

$$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3},$$

$$\therefore p+n=1\times\sqrt{3}\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\because p^2+n^2=1, \therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=np=\frac{(p+n)^2-(p^2+n^2)}{2}$$

$$=-\frac{1}{8},$$

则向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 夹角的余弦值为

$$\cos\langle\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\rangle=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=np=-\frac{1}{8}.$$

故选 D.]

6. C [由题意得 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1M}=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B_1}+$

$$\overrightarrow{A_1C_1})=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AM}^2=\overrightarrow{AA_1}^2+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2+\overrightarrow{AA_1}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AM}|=\sqrt{\overrightarrow{AM}^2}$$

$$=\sqrt{\overrightarrow{AA_1}^2+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2+\overrightarrow{AA_1}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})}$$

$$=\sqrt{\overrightarrow{AA_1}^2+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC}}$$

$$=\sqrt{2^2+\frac{1}{4}(2^2+2^2+0)+2\times2\times\frac{1}{2}+2\times2\times\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{10}.$$

故选 C.]

7. BCD [空间向量 $a=(2,2,2), b=(1,-1,1), c=(1,7,1)$,

对于 A, 若 $a\parallel b$, 则存在 $\lambda\in\mathbf{R}$ 使得 $a=\lambda b$, 即 $2=\lambda, 2=-\lambda, 2=\lambda$, 无解, 故 A 错误;

对于 B, $a\cdot b=2-2+2=2$, 故 B 正确;

对于 C, $|a|=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$, 故 C 正确;

对于 D, 由选项 A 可知 a 与 b 不共线, 故若 a, b, c 是共面向量,

则存在 $\lambda, \mu\in\mathbf{R}$ 使得 $c=\lambda a+\mu b=\lambda(2,2,2)+\mu(1,-1,1)=(2\lambda+\mu, 2\lambda-\mu, 2\lambda+\mu)$,

即 $2\lambda+\mu=1, 2\lambda-\mu=7$, 解得 $\lambda=2, \mu=-3$, 故 a, b, c 是共面向量, D 正确.

故选 BCD.]

8. BD [根据题意, 依次分析选项:

$$\text{对于 A, } \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{b}-$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}, \text{ A 错误;}$$

$$\text{对于 B, } \overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}, \text{ B 正确;}$$

$$\text{对于 C, } \overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c},$$

$$\text{则 } |\overrightarrow{AC_1}|^2=(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})^2=\overrightarrow{a}^2+\overrightarrow{b}^2+\overrightarrow{c}^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=6,$$

$$\text{则 } |\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{6}, \text{ C 错误;}$$

$$\text{对于 D, } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}^2+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=2,$$

$$\text{则 } \cos\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC_1}|}=\frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ D 正确.}$$

故选 BD.]

9. $(-10, 1, 16)$ 2 [因为 $a=(-3, 2, 5), b=(1, 5, -1)$, 所以 $3a-b=(-9, 6, 15)-(1, 5, -1)=(-10, 1, 16), a\cdot b=-3+10-5=2.$

10. $\frac{1}{8}$ [$\because P, A, B, C$ 四点共面, $\therefore \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + t = 1, \therefore t = \frac{1}{8}$.]

11. 证明: (1) 以 A 为坐标原点, AB, AD, AP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $PA = AD = a (a > 0), AB = b (b > 0)$, 则有 $A(0, 0, 0), P(0, 0, a), D(0, a, 0), C(b, a, 0), B(b, 0, 0)$.

因为 M, N 分别为 AB, PC 的中点,

所以 $M(\frac{b}{2}, 0, 0), N(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$,

所以 $\overrightarrow{MN} = (0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, 又 $\overrightarrow{AP} = (0, 0, a), \overrightarrow{AD} = (0, a, 0)$,

所以 $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

又 $MN \not\subset$ 平面 PAD , 所以 $MN \parallel$ 平面 PAD .

(2) 结合(1)知, $M(\frac{b}{2}, 0, 0)$,

$\overrightarrow{PC} = (b, a, -a), \overrightarrow{PM} = (\frac{b}{2}, 0, -a)$,

$\overrightarrow{PD} = (0, a, -a)$.

设平面 PMC 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{PM} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} bx_1 + ay_1 - az_1 = 0, \\ \frac{b}{2}x_1 - az_1 = 0, \end{cases}$$

令 $z_1 = b$, 则 $x_1 = 2a, y_1 = -b$,

得 $\mathbf{n}_1 = (2a, -b, b)$ 为平面 PMC 的一个法向量.

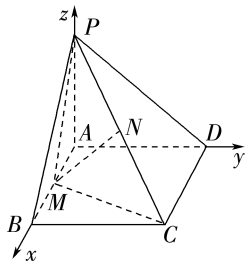
设平面 PDC 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{PD} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} bx_2 + ay_2 - az_2 = 0, \\ ay_2 - az_2 = 0, \end{cases}$$

得 $x_2 = 0$, 令 $z_2 = 1$, 则 $y_2 = 1$, 得 $\mathbf{n}_2 = (0, 1, 1)$ 为平面 PDC 的一个法向量.

因为 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 - b + b = 0$, 所以 $\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2$,

故平面 $PMC \perp$ 平面 PDC .



课时作业(五十四)

1. B [以 D 为坐标原点, DA, DC, DP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示.

设 $PD = 2$, 则 $AB = AD = BC = CD = 1$,

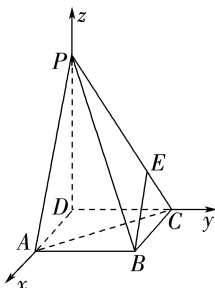
可得 $A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 1, 0), P(0, 0, 2)$, 由 $PC = 4EC$,

得 $E(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{2})$, 所以 $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$,

$\overrightarrow{BE} = (-1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$,

$$\text{可得 } \cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BE} \rangle = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{BE}|}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{4} + 0}{\sqrt{1+1+0} \times \sqrt{1+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{42}}{14},$$



所以异面直线 AC 与 BE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{14}$.

故选 B.]

2. A [以过点 A 作平面 ACC_1A_1 的垂线为 x 轴, 以 AC, AA_1 所在直线分别为 y 轴和 z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示,

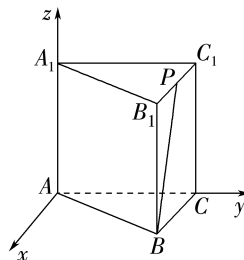
则平面 ACC_1A_1 的一个法向量为

$$\mathbf{n} = (1, 0, 0),$$

在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 设 $AB = AA_1 = 2$,

则 $B(\sqrt{3}, 1, 0), P(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 2)$,

所以 $\overrightarrow{BP} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 2)$,



设直线 BP 与平面 ACC_1A_1 所成的角为 θ .

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{BP} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BP}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{BP}|} = \frac{|\frac{-\sqrt{3}}{2}|}{1 \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{10},$$

所以直线 BP 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{10}$. 故

选 A.]

3. A [设上底面圆心为 O_1 , 下底面圆心为 O , 连接 $OO_1, OC, OB, O_1C_1, O_1B_1$,

以 O 为坐标原点, 分别以 OC, OB, OO_1 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系(图略),

则 $C(1, 0, 0), A(0, 2, 0), B_1(0, 1, 2), D_1(2, 0, 2)$,

则 $\overrightarrow{CD_1} = (1, 0, 2), \overrightarrow{AB_1} = (0, -1, 2)$,

$$\cos \langle \overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AB_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{CD_1} \cdot \overrightarrow{AB_1}}{|\overrightarrow{CD_1}| |\overrightarrow{AB_1}|}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{5},$$

又异面直线所成角的范围为 $(0, \frac{\pi}{2}]$,

故异面直线 AB_1 与 CD_1 所成角的余弦值为 $\frac{4}{5}$.

故选 A.]

4. A [因为 $SA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $SA \perp AD, SA \perp AB$, 又底面 $ABCD$ 是直角梯形, 且 $BC = 2AD = 1, \angle ABC = 90^\circ$, 所以 $\angle BAD = 90^\circ$, 即 $AD \perp AB$.

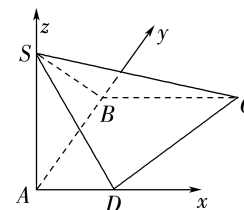
如图, 以 A 为坐标原点, AD, AB, AS 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

由 $SA = AB = BC = 2AD = 1$, 可得 $A(0, 0, 0), S(0, 0, 1), C(1, 1, 0)$,

所以 $\overrightarrow{SC} = (1, 1, -1)$,

因为 $SA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $\overrightarrow{AS} = (0, 0, 1)$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量, 设 SC 与平面 $ABCD$ 所成的角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AS}, \overrightarrow{SC} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{SC}|}{|\overrightarrow{AS}| |\overrightarrow{SC}|} = \frac{1}{1 \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$



即直线 SC 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 SC 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 $\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 故选 A.]

5. **ACD** [$\because P(2,2,0), B(0,4,2)$,

$\therefore |PB| = \sqrt{(2-0)^2 + (2-4)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{3}$, 故 A 正确;

$\because A(4,0,6), B(0,4,2), C(0,0,4)$,

$\therefore \overrightarrow{CA} = (4,0,2), \overrightarrow{CB} = (0,4,-2)$,

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CB}|}$$

$$= \frac{-4}{2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}} = -\frac{1}{5},$$

$\therefore$ 两直线所成角的取值范围为 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$\therefore$ 直线 CA 与直线 CB 夹角的余弦值为 $\frac{1}{5}$, 故 B 错误;

$\because \mathbf{n} = (-1, 1, 2)$, 且 $\overrightarrow{CA} \cdot \mathbf{n} = 4 \times (-1) + 0 \times 1 + 2 \times 2 = 0$,
 $\overrightarrow{CB} \cdot \mathbf{n} = 0 \times (-1) + 4 \times 1 + (-2) \times 2 = 0$,

$\therefore \mathbf{n}$ 是平面 ABC 的一个法向量, 故 C 正确;

$\because P(2,2,0), B(0,4,2), \therefore \overrightarrow{PB} = (-2, 2, 2)$,

$\therefore PB$ 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $|\cos \langle \overrightarrow{PB}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{PB} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{PB}| |\mathbf{n}|} = \frac{\left| \frac{2+2+4}{2\sqrt{3} \times \sqrt{6}} \right|}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 故 D 正确.

故选 ACD.]

6. **BCD** [以 D 为坐标原点, $DA, DC,$

DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z

轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $D_1(0,0,2), B_1(2,2,2),$

$A_1(2,0,2), D(0,0,0)$, 易知

$\overrightarrow{D_1B_1} = (2,2,0), \overrightarrow{EF} = (0,1,0)$, 所

以 $\cos \langle \overrightarrow{D_1B_1}, \overrightarrow{EF} \rangle = \frac{\overrightarrow{D_1B_1} \cdot \overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{D_1B_1}| |\overrightarrow{EF}|} = \frac{2}{2\sqrt{2} \times 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以异面直

线 B_1D_1 与 EF 所成的角的大小为 45° , 故 A 正确, B 错误. 连接 A_1D, B_1C , 由题意可知平面 B_1EF 即为平面 A_1B_1CD , 设

平面 A_1B_1CD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = \mathbf{n} \cdot$

$\overrightarrow{DA_1} = 0$. 又 $\overrightarrow{A_1B_1} = (0, 2, 0), \overrightarrow{DA_1} = (2, 0, 2)$, 所以

$\begin{cases} 2y=0, \\ 2x+2z=0, \end{cases}$ 令 $x=1$, 得 $\mathbf{n} = (1, 0, -1)$ 为平面 A_1B_1CD 的

一个法向量, 所以 $\cos \langle \overrightarrow{D_1B_1}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{D_1B_1} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{D_1B_1}| |\mathbf{n}|} = \frac{2}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, 所以直线

B_1D_1 与平面 A_1B_1CD 所成的角为 30° , 即直线 B_1D_1 与平

面 B_1EF 所成角的大小为 30° , 故 C, D 错误. 故选 BCD.]

7. $\frac{\pi}{6}$ [设直线 l 与平面 α 所成的角为 θ ,

因为直线 l 的方向向量为 $\mathbf{a} = (2, -3, \sqrt{3})$, 向量 $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$

是平面 α 的一个法向量,

所以 $\sin \theta = |\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{a}| |\mathbf{n}|} = \frac{2}{4 \times 1} = \frac{1}{2}$,

因为 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$.]

8. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ [由题意, 以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 所在直线分

别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间

直角坐标系, 如图所示,

则 $D(0,0,0), A(2,0,0), B(2,2,$

$0), E(0,2,1), D_1(0,0,2)$,

所以 $\overrightarrow{DB} = (2,2,0), \overrightarrow{DE} = (0,2,$

$1), \overrightarrow{AD_1} = (-2,0,2)$,

设平面 BDE 的法向量为 $\mathbf{m} = (x,$

$y, z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DE} = 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} 2x+2y=0, \\ 2y+z=0, \end{cases}$ 令 $x=1$, 得 $y=-1, z=2$, 则 $\mathbf{m} = (1, -1, 2)$

为平面 BDE 的一个法向量.

设直线 AD_1 与平面 BDE 所成的角为 θ ,

则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AD_1}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AD_1} \cdot \mathbf{m}|}{|\overrightarrow{AD_1}| |\mathbf{m}|} = \frac{2}{2\sqrt{2} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.]

9. (1) 证明: 设 $AB_1 \cap A_1B = O$, 因为平面 $AA_1B_1B \perp$ 平面 $AB-$

CD , 且平面 $AA_1B_1B \cap$ 平面 $ABCD = AB, AD \perp AB$, 且 AD

$\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $AD \perp$ 平面 AA_1B_1B , 又 $A_1B \subset$ 平面 AA_1B_1B , 则 $AD \perp$

A_1B ,

因为四边形 AA_1B_1B 是菱形, 则 $AB_1 \perp A_1B$,

因为 $AB_1 \cap AD = A, AB_1, AD \subset$ 平面 AB_1D ,

故 $A_1B \perp$ 平面 AB_1D ,

因为 $B_1D \subset$ 平面 AB_1D ,

所以 $A_1B \perp B_1D$.

(2) 解: 设 $CD_1 \cap C_1D = H$, 连接 OH , 分别以 OB, OB_1, OH

所在直线为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示.

因为 $\angle ABB_1 = \frac{\pi}{3}$, 所以

$\triangle ABB_1$ 为正三角形,

故 $A_1O = BO = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \sqrt{3}$,

依题意可得, $A_1(-\sqrt{3}, 0, 0),$

$B(\sqrt{3}, 0, 0), A(0, -1, 0),$

$P(0, 1, \sqrt{3})$,

则 $\overrightarrow{A_1B} = (2\sqrt{3}, 0, 0), \overrightarrow{AB} = (\sqrt{3}, 1, 0),$

$\overrightarrow{AP} = (0, 2, \sqrt{3})$,

设平面 ABP 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \mathbf{n}, \\ \overrightarrow{AP} \perp \mathbf{n}, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n} = \sqrt{3}x + y = 0, \\ \overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n} = 2y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$

故可取 $\mathbf{n} = (1, -\sqrt{3}, 2)$ 为平面 ABP 的一个法向量,

设直线 A_1B 与平面 ABP 所成的角为 θ ,

则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{A_1B}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{A_1B} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{A_1B}| |\mathbf{n}|} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

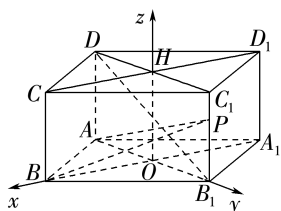
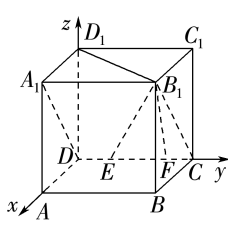
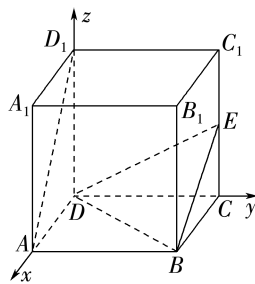
10. 解: (1) 因为四棱锥 $P-ABCD$ 是正四棱锥,

所以底面 $ABCD$ 是正方形, 且 $OP \perp$ 底面 $ABCD$,

因为 $AD = 3\sqrt{2}$,

所以 $AO = OD = OB = OC = 3$,

因为 $AP = 5$,



所以 $PO = \sqrt{AP^2 - AO^2} = 4$,

所以 $\triangle POA$ 绕 OP 旋转一周形成的几何体是底面半径为 3, 高为 4 的圆锥,

所以 $V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi$.

(2) 如图, 建立空间直角坐标系,

因为 $AP = AD$, 由题知四棱锥 $P-ABCD$ 是正四棱锥, 所以该四棱锥各棱长相等,

设 $AB = \sqrt{2}a, a > 0$,

则 $AO = OD = OB = OC = a$,

$PO = \sqrt{AP^2 - AO^2} = a$,

则 $O(0, 0, 0), P(0, 0, a), A(0, -a, 0), B(a, 0, 0), C(0, a, 0),$

$D(-a, 0, 0), E\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}\right)$,

故 $\overrightarrow{BD} = (-2a, 0, 0), \overrightarrow{AC} = (0, 2a, 0), \overrightarrow{AE} = \left(\frac{a}{2}, a, \frac{a}{2}\right)$,

设 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 AEC 的法向量,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} 2a \cdot y_1 = 0, \\ \frac{a}{2} \cdot x_1 + a \cdot y_1 + \frac{a}{2} \cdot z_1 = 0, \end{cases}$ 令 $x_1 = 1$, 则 $y_1 = 0$,

$z_1 = -1$,

所以 $\mathbf{n} = (1, 0, -1)$ 为平面 AEC 的一个法向量,

则 $\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{BD} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{BD}|} = \frac{-2a}{\sqrt{2} \times 2a} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

设直线 BD 与平面 AEC 所成的角为 θ ,

因为 $\sin \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{BD} \rangle| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

所以 $\theta = \frac{\pi}{4}$,

故直线 BD 与平面 AEC 所成角的大小为 $\frac{\pi}{4}$.

课时作业(五十五)

1. (1) 证明: 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 连接 AC 交 BD 于点 O , 连接 OE ,

由四边形 $ABCD$ 为正方形, 得 O 为 AC 的中点, 又 E 是棱 PA 的中点, 则 $OE \parallel PC$,

而 $PC \not\subset$ 平面 $BDE, OE \subset$ 平面 BDE ,

所以 $PC \parallel$ 平面 BDE .

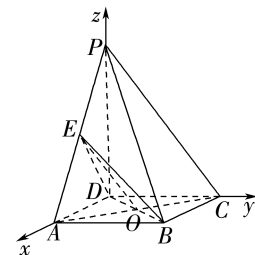
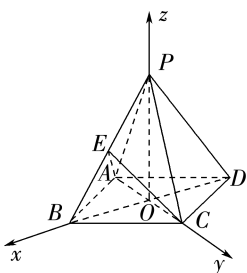
(2) 解: 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$,

因为 $AD, DC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PD \perp AD, PD \perp DC$, 又 $DA \perp DC$, 所以 DA, DC, DP 两两垂直,

以 D 为原点, 直线 DA, DC, DP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

则 $D(0, 0, 0), B(2, 2, 0), E(1, 0, 2),$

$P(0, 0, 4), \overrightarrow{DB} = (2, 2, 0), \overrightarrow{DE} = (1, 0, 2), \overrightarrow{DP} = (0, 0, 4),$



设平面 BDE 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \perp \overrightarrow{DB}, \\ \mathbf{n} \perp \overrightarrow{DE}, \end{cases}$

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 2x + 2y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DE} = x + 2z = 0, \end{cases}$

取 $z = 1$, 则 $x = -2, y = 2$, 得 $\mathbf{n} = (-2, 2, 1)$ 为平面 BDE 的一个法向量.

设平面 BDP 的法向量为 $\mathbf{m} = (a, b, c)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{m} \perp \overrightarrow{DB}, \\ \mathbf{m} \perp \overrightarrow{DP}, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DB} = 2a + 2b = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DP} = 4c = 0, \end{cases}$

解得 $c = 0$, 取 $a = 1$, 则 $b = -1$, 得 $\mathbf{m} = (1, -1, 0)$ 为平面 BDP 的一个法向量,

因此 $|\cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

所以平面 BDE 与平面 BDP 夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2. (1) 证明: $\because CD \parallel BE$ 且 $CD = BE, \therefore$ 四边形 $CDEB$ 为平行四边形, $\therefore DE = 2$,

$\therefore AD = DE = AE = 2$, 由平行四边形性质得 $PA = PD = 2$.

取 AD 的中点 O , 连接 PO, OE , 则 $PO \perp AD$, 且 $PO = \sqrt{3}$,

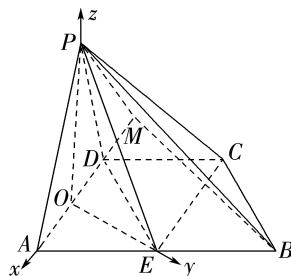
$OE \perp AD$ 且 $OE = \sqrt{3}$,

$\therefore \angle POE$ 为二面角 $P-AD-E$ 的平面角,

又 $\because PO^2 + OE^2 = PE^2, \therefore \angle POE = 90^\circ$,

$\therefore$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 解: 依题意, 以 O 为坐标原点, OA, OE, OP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $B(-1, 2\sqrt{3}, 0), D(-1, 0, 0), P(0, 0, \sqrt{3}), E(0, \sqrt{3}, 0),$

$M(-2, 0, 0), \overrightarrow{DP} = (1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{DE} = (1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{BM} = (-1, -2\sqrt{3}, 0),$

$\overrightarrow{MP} = (2, 0, \sqrt{3}),$

设平面 PDE 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{DP} \perp \mathbf{m}, \\ \overrightarrow{DE} \perp \mathbf{m}, \end{cases}$

则 $\begin{cases} \overrightarrow{DP} \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \overrightarrow{DE} \cdot \mathbf{m} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0, \\ x_1 + \sqrt{3}y_1 = 0, \end{cases}$

令 $z_1 = 1$ 得 $x_1 = -\sqrt{3}, y_1 = 1, \therefore \mathbf{m} = (-\sqrt{3}, 1, 1)$ 为平面 PDE 的一个法向量,

设平面 PBM 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{MP} \perp \mathbf{n}, \\ \overrightarrow{BM} \perp \mathbf{n}, \end{cases}$

则 $\begin{cases} \overrightarrow{MP} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{BM} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x_2 + \sqrt{3}z_2 = 0, \\ -x_2 - 2\sqrt{3}y_2 = 0, \end{cases}$

令 $z_2=4$ 得 $x_2=-2\sqrt{3}, y_2=1$,

$\therefore \mathbf{n}=(-2\sqrt{3}, 1, 4)$ 为平面 PBM 的一个法向量,

设平面 PBM 与平面 PDE 的夹角为 θ ,

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{11}{\sqrt{5} \times \sqrt{29}} = \frac{11\sqrt{145}}{145},$$

$\therefore$ 平面 PBM 与平面 PDE 夹角的余弦值为 $\frac{11\sqrt{145}}{145}$.

课时作业(五十六)

1. D [由已知, 得 $\overrightarrow{PA}=(-1, -1, -1)$, 因为直线 l 的方向向量为 $\mathbf{n}=(1, 0, 2)$, 所以点 $P(1, 2, 2)$ 到直线 l 的距离为

$$\sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right)^2} = \sqrt{3 - \frac{9}{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}. \text{ 故选 D.}]$$

2. C [在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 设点 A 到平面 A_1BC 的距离为 h , 则 $V_{\text{三棱锥}A-A_1BC} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1BC} \cdot h = \frac{2\sqrt{2}}{3} h =$

$$V_{\text{三棱锥}A_1-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot A_1A = \frac{1}{3} V_{\text{三棱柱}ABC-A_1B_1C_1} = \frac{4}{3}, \text{ 解得}$$

$h=\sqrt{2}$, 所以点 A 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$.]

3. ABD [建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $B_1(1, 1, 1), E(0, 0, \frac{1}{2}), F(1, A_1$

$1, \frac{1}{2}), C_1(0, 1, 1), A(1, 0, 0),$

$A_1(1, 0, 1)$.

对于 A, 因为 $\overrightarrow{B_1E}=(-1, -1,$

$$-\frac{1}{2}), \text{ 直线 } B_1E \text{ 的一个单位方向向量 } \mathbf{u}_1 = \frac{\overrightarrow{B_1E}}{|\overrightarrow{B_1E}|} =$$

$$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \overrightarrow{A_1B_1}=(0, 1, 0),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{A_1B_1} \cdot \mathbf{u}_1 = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{所以点 } A_1 \text{ 到直线 } B_1E \text{ 的距离为 } \sqrt{|\overrightarrow{A_1B_1}|^2 - (\overrightarrow{A_1B_1} \cdot \mathbf{u}_1)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \text{ 故 A 正确;}$$

对于 B, 因为 $\overrightarrow{AE}=(-1, 0, \frac{1}{2}),$

$$\overrightarrow{FC_1}=(-1, 0, \frac{1}{2}),$$

所以 $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{FC_1}$, 即 $AE \parallel FC_1$, 所以点 F 到直线 AE 的距离即为直线 FC_1 到直线 AE 的距离,

$$\text{因为直线 } AE \text{ 的一个单位方向向量 } \mathbf{u}_2 = \frac{\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AE}|} =$$

$$\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right), \overrightarrow{AF}=(0, 1, \frac{1}{2}), |\overrightarrow{AF}|^2 = \frac{5}{4}, \overrightarrow{AF} \cdot \mathbf{u}_2$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{10},$$

所以直线 FC_1 到直线 AE 的距离为

$$\sqrt{\frac{5}{4} - \left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{5}, \text{ 故 B 正确;}$$

对于 C, 设平面 AB_1E 的法向量为 $\mathbf{n}=(x, y, z), \overrightarrow{AB_1}=(0, 1,$

$$1), \overrightarrow{AE}=(-1, 0, \frac{1}{2}), \overrightarrow{AA_1}=(0, 0, 1).$$

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \perp \overrightarrow{AB_1}, \\ \mathbf{n} \perp \overrightarrow{AE}, \end{cases} \text{ 由 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = y + z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = -x + \frac{1}{2}z = 0, \end{cases}$$

令 $z=2$, 则 $y=-2, x=1$,

即 $\mathbf{n}=(1, -2, 2)$ 为平面 AB_1E 的一个法向量,

设点 A_1 到平面 AB_1E 的距离为 d ,

$$\text{则 } d = \frac{|\overrightarrow{AA_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{2}{3}, \text{ 即点 } A_1 \text{ 到平面 } AB_1E \text{ 的距离为 } \frac{2}{3},$$

故 C 不正确;

对于 D, 因为 $AE \parallel FC_1$,

所以 $FC_1 \parallel$ 平面 AB_1E ,

所以直线 FC_1 到平面 AB_1E 的距离等于 C_1 到平面 AB_1E 的距离,

又 $\overrightarrow{C_1B_1}=(1, 0, 0),$

由选项 C 得平面 AB_1E 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(1, -2, 2),$

所以 C_1 到平面 AB_1E 的距离为

$$\frac{|\overrightarrow{C_1B_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{3},$$

所以直线 FC_1 到平面 AB_1E 的距离为 $\frac{1}{3}$, 故 D 正确. 故

选 ABD.]

4. ABD [对于 A, 如图 1 所示,

连接 AB_1 交 A_1B 于点 E , 连接 DE ,

所以 $DE \parallel B_1C$,

又 $DE \subset$ 平面 A_1BD , $B_1C \not\subset$ 平面 A_1BD ,

所以 $B_1C \parallel$ 平面 A_1BD , 故 A 正确;

对于 B, 因为 $AB=BC$, D 是 AC 的中点,

所以 $BD \perp AC$,

又平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 ABC , 平面 $A_1ACC_1 \cap$ 平面 $ABC = AC$, $BD \subset$ 平面 ABC ,

所以 $BD \perp$ 平面 A_1ACC_1 ,

又 $BD \subset$ 平面 A_1BD ,

所以平面 $A_1BD \perp$ 平面 AA_1C_1C , 故 B 正确;

对于 C, 因为 $B_1C \parallel$ 平面 A_1BD ,

所以 B_1C 到平面 A_1BD 的距离

等于点 B_1 到平面 A_1BD 的距离,

以 D 点为坐标原点, 建立空间直角坐标系, 如图 2 所示,

则 $D(0, 0, 0), B_1(0, 2\sqrt{2}, 3),$

$B(0, 2\sqrt{2}, 0), A_1(-1, 0, 3),$

所以 $\overrightarrow{DB_1}=(0, 2\sqrt{2}, 3), \overrightarrow{DB}=($

$0, 2\sqrt{2}, 0), \overrightarrow{DA_1}=(-1, 0, 3),$

设平面 A_1BD 的法向量为 $\mathbf{n}=(x, y, z),$

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{DB} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{DA_1} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2\sqrt{2}y = 0, \\ -x + 3z = 0, \end{cases} \text{ 取 } x=3,$$

则 $\mathbf{n}=(3, 0, 1)$ 为平面 A_1BD 的一个法向量,

$$\text{所求距离 } d = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DB_1}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \text{ 故 C 错误;}$$

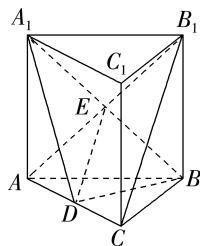
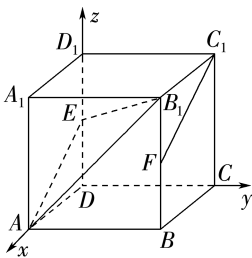


图1

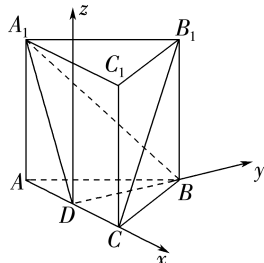


图2

对于 D, 如图 3 所示,

作 $AF \perp BC$, 连接 A_1F , 因为 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 所以 $AA_1 \perp BC$,

又 $AA_1 \cap AF = A$, AA_1 ,

$AF \subset$ 平面 A_1AF ,

所以 $BC \perp$ 平面 A_1AF ,

则 $BC \perp A_1F$,

$$\text{又 } AF = \frac{BD \cdot AC}{BC} = \frac{2\sqrt{2} \times 2}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{所以 } A_1F = \sqrt{A_1A^2 + AF^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{113}}{3}, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 ABD.]

5. $\frac{8}{3}$ [以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $D(0,0,0), E(0,2,4), F(2,4,4), B(4,4,0), A(4,0,0), M(2,0,4), N(4,2,4)$,

所以 $\overrightarrow{EF} = (2,2,0), \overrightarrow{DE} = (0,2,4),$

$\overrightarrow{BA} = (0,-4,0)$.

设平面 $EFBD$ 的法向量为 $\mathbf{a} = (1, m, n)$,

$$\begin{cases} \mathbf{a} \cdot \overrightarrow{EF} = 0, \\ \mathbf{a} \cdot \overrightarrow{DE} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2+2m=0, \\ 2m+4n=0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m=-1, \\ n=\frac{1}{2}, \end{cases} \text{ 所以 } \mathbf{a} = \left(1, -1, \frac{1}{2}\right) \text{ 为平面 } EFBD \text{ 的一个}$$

法向量.

因为 $\overrightarrow{AM} = (-2, 0, 4), \overrightarrow{AN} = (0, 2, 4)$, 所以 $\mathbf{a} \cdot \overrightarrow{AM} = 0, \mathbf{a} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$, 从而 $\mathbf{a} \perp \overrightarrow{AM}, \mathbf{a} \perp \overrightarrow{AN}$, 所以 $\mathbf{a} \perp$ 平面 AMN , 所以平面 $AMN \parallel$ 平面 $EFBD$, 所以平面 AMN 与平面 $EFBD$ 间的距离即为点 A 到平面 $EFBD$ 的距离, 该距离为

$$\frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|} = \frac{8}{3}.]$$

6. (1) 证明: $\because EA = EB, M$ 是 AB 的中点,

$\therefore EM \perp AB$,

又平面 $ABE \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $ABE \cap$ 平面 $ABCD = AB$,

$EM \subset$ 平面 ABE , $\therefore EM \perp$ 平面 $ABCD$, $\because AD \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore EM \perp AD$.

(2) 解: 连接 CM ,

由(1)知 $EM \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore CM \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore EM \perp CM$,

在菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, $\therefore \triangle ABC$ 是正三角形,

$\therefore CM \perp AB$,

故 MB, MC, ME 两两垂直,

以 M 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系,

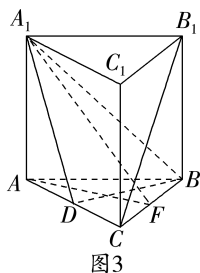
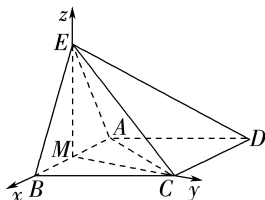


图3

则 $M(0,0,0), A(-1,0,0), B(1,0,0), C(0,\sqrt{3},0), E(0,0,$

$\sqrt{3})$, $\therefore \overrightarrow{AE} = (1,0,\sqrt{3}), \overrightarrow{EC} = (0,\sqrt{3},-\sqrt{3})$,

设 $\overrightarrow{EP} = \lambda \overrightarrow{EC} = (0,\sqrt{3}\lambda,-\sqrt{3}\lambda), 0 \leq \lambda \leq 1$,

则 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EP} = (1,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$,

易知平面 ABE 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (0,1,0)$,

$\therefore$ 直线 AP 与平面 ABE 所成的角为 45° ,

$$\begin{aligned} \therefore \sin 45^\circ &= |\cos \langle \overrightarrow{AP}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{AP}| |\mathbf{n}|} \\ &= \frac{|\sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{1+3\lambda^2+3-6\lambda+3\lambda^2} \times 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{2}{3}, \therefore \frac{EP}{EC} = \frac{2}{3}.$$

阶段检测(十二)

1. D [根据题意可知, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AD} =$

$\mathbf{b}, \overrightarrow{AP} = \mathbf{c}, \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AM} =$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AN} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} +$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} -$$

$$\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{4}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c}. \text{ 故选 D.}]$$

2. C [由于在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中, $\overrightarrow{OA} = (-1,2,1),$

$\overrightarrow{OB} = (1,1,2), \overrightarrow{OP} = (2,1,1)$, 点 Q 在直线 OP 上运动,

故点 Q, O, P 三点共线, 所以设 $\overrightarrow{OQ} = (2t, t, t)$,

所以 $\overrightarrow{QA} = (-1-2t, 2-t, 1-t), \overrightarrow{QB} = (1-2t, 1-t, 2-t)$,

$$\text{故 } \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 6t^2 - 6t + 3 = 6\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2},$$

当 $t = \frac{1}{2}$ 时, $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB}$ 取最小值, 最小值为 $\frac{3}{2}$. 故选 C.]

3. A [$\overrightarrow{AC} = (1,2,-1), \overrightarrow{AD} = (2,2,0), \overrightarrow{AB} = (2,2,-2)$,

设平面 ACD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

则 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$,

$$\therefore x + 2y - z = 0, 2x + 2y = 0,$$

取 $x = 1$, 则 $y = -1, z = -1$, 则 $\mathbf{n} = (1, -1, -1)$ 为平面 ACD 的一个法向量.

$$\therefore \text{点 } B \text{ 到平面 } ACD \text{ 的距离 } d = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|2-2+2|}{\sqrt{3}} =$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}. \text{ 故选 A.}]$$

4. C [根据题意可知, 正方体

$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为

1, 以 A 为坐标原点, $AB,$

AD, AA_1 所在直线分别为

x, y, z 轴, 建立空间直角坐

标系, 如图所示,

则 $A(0,0,0), C(1,1,0),$

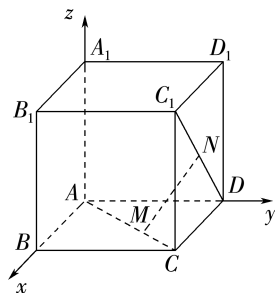
$D(0,1,0), C_1(1,1,1)$, 所以

$\overrightarrow{AC} = (1,1,0), \overrightarrow{DC_1} = (1,0,$

$1)$, 因为点 M 在 AC 上, 点 N 在 C_1D 上, 所以设 $M(m, m,$

$0), N(n, 1, n)$,

所以 $\overrightarrow{MN} = (n-m, 1-m, n)$,



因为 MN 是异面直线 AC 与 C_1D 的公垂线段,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MN} = 0, \overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{MN} = 0,$$

$$\text{即 } \begin{cases} n-m+1-m=0, \\ n-m+n=0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m=\frac{2}{3}, \\ n=\frac{1}{3}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } M\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right), N\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}\right),$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-1\right)^2 + \left(0-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ 故选 C.}]$$

5. A [由题意, 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2AB=4$, E, F 分别为 AB_1, BC_1 的中点, 点 G 为上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心, 则可以建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$,

则 $D(0,0,0), E(2,1,2), F(1,2,2), G(1,1,4)$, 所以 $\overrightarrow{EG}=(-1,0,x$

$$2), \overrightarrow{DF}=(1,2,2),$$

$$\text{于是 } \cos \langle \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{DF} \rangle = \frac{\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{DF}}{|\overrightarrow{EG}| |\overrightarrow{DF}|} = \frac{3}{\sqrt{5} \times 3} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

故直线 EG 与 DF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故选 A.]

6. C [由题意知向量 $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}$ 共面, 即这三个向量不能构成空间的一个基底,

对于 A, 由空间直角坐标系易知 $(0,0,0), (1,0,0), (0,0,1)$ 三个向量共面, 则由 $(0,0,0), (1,0,0) \in \Omega$ 无法推出 $(0,0,1) \notin \Omega$, 故 A 错误;

对于 B, 由空间直角坐标系易知 $(-1,0,0), (1,0,0), (0,0,1)$ 三个向量共面, 则由 $(-1,0,0), (1,0,0) \in \Omega$ 无法推出 $(0,0,1) \notin \Omega$, 故 B 错误;

对于 C, 由空间直角坐标系易知 $(1,0,0), (0,0,1), (0,1,0)$ 三个向量不共面, 可构成空间的一个基底,

则由 $(1,0,0), (0,1,0) \in \Omega$ 能推出 $(0,0,1) \notin \Omega$, 故 C 正确;

对于 D, 由空间直角坐标系易知 $(1,0,0), (0,0,1), (0,0,-1)$ 三个向量共面,

则由 $(0,0,-1), (1,0,0) \in \Omega$ 无法推出 $(0,0,1) \notin \Omega$, 故 D 错误. 故选 C.]

7. BC [对于 A, 向量 $a=(6,3,6), b=(1,-2,2)$, 向量 a 在 b 上的投影向量为 $\frac{a \cdot b}{|b|^2} b = \frac{4}{3} b = \left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$, 故 A 不正确;

对于 B, 对空间中任意一点 O , 有 $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OC}$, 由于 $2+3-4=1$, 则 P, A, B, C 四点共面, 故 B 正确;

对于 C, $\{a, b, c\}$ 是空间的一个基底, a, b, c 不共面, 而 $m=a+b$, 则 a, m, c 也不共面, $\{a, m, c\}$ 也是空间的一个基底, 故 C 正确;

对于 D, 直线 l 的方向向量为 $a=(0,1,2)$, 平面 α 的一个法向量 $e=(3,-4,2)$, 由于 $a \cdot e=0$, 因而 $l \parallel \alpha$ 或 l 在平面 α 内, 故 D 不正确.

故选 BC.]

8. BD [在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2, AD=AA_1=1$,

以 D 为坐标原点, 建立空间直角坐标系, 如图,

则 $A(1,0,0)$,

$B(1,2,0), C(0,2,0), D(0,0,0), A_1(1,0,1), B_1(1,2,1),$

$D_1(0,0,1), \overrightarrow{AC}=(-1,2,0),$

$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1),$

设平面 ACD_1 的法向量为 $n=(x,y,z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{AC} \perp n, \\ \overrightarrow{AD_1} \perp n, \end{cases} \text{ 则 } \begin{cases} \overrightarrow{AC} \cdot n = -x+2y=0, \\ \overrightarrow{AD_1} \cdot n = -x+z=0, \end{cases}$$

取 $x=2$, 得 $n=(2,1,2)$ 为平面 ACD_1 的一个法向量.

对于 A, $\overrightarrow{AC}=(-1,2,0), \overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1),$

$$\text{则 } \cos \angle D_1AC = \cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD_1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \text{ 故 A}$$

错误;

对于 B, 易知 $m=(0,0,1)$ 为平面 $ABCD$ 的一个法向量,

设平面 ACD_1 与底面 $ABCD$ 夹角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{m}|}{|\overrightarrow{n}| |\overrightarrow{m}|} = \frac{2}{3 \times 1} = \frac{2}{3},$$

所以平面 ACD_1 与底面 $ABCD$ 夹角的余弦值为 $\frac{2}{3}$, 故 B 正确;

对于 C, $\overrightarrow{AD}=(-1,0,0),$

设直线 AD 与平面 ACD_1 所成的角为 α , 则 $\sin \alpha =$

$$\frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{n}|} = \frac{2}{3},$$

所以直线 AD 与平面 ACD_1 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$,

所以直线 AD 与平面 ACD_1 所成角的余弦值为

$$\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \text{ 故 C 错误;}$$

对于 D, $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1),$

所以点 A_1 到平面 ACD_1 的距离为 $d = \frac{|\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|} = \frac{2}{3}$, 故 D

正确. 故选 BD.]

9. $-\frac{4}{3}$ [已知 $\{a, b, c\}$ 是空间的一个基底,

且 A, B, C, D 四点共面, 则 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}, x, y \in \mathbb{R}$,

又向量 $\overrightarrow{AB} = 2a - 3b, \overrightarrow{AC} = a - c, \overrightarrow{AD} = 2b + \lambda c,$

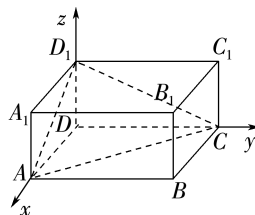
则 $2b + \lambda c = x(2a - 3b) + y(a - c) = (2x + y)a - 3xb - yc,$

又 a, b, c 不共面,

$$\text{因此 } \begin{cases} 2x+y=0, \\ -3x=2, \\ \lambda=-y, \end{cases} \text{ 解得 } x=-\frac{2}{3}, y=\frac{4}{3}, \lambda=-\frac{4}{3}, \text{ 所以}$$

$$\lambda = -\frac{4}{3}.$$

10. $-\frac{1}{4}$ [$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1M}) \cdot \overrightarrow{AD} = [\overrightarrow{CC_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{C_1D_1})] \cdot \overrightarrow{AD} = [\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})] \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD},$

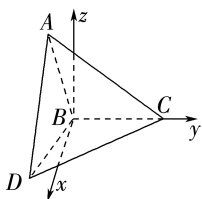


$$\text{因为 } \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos 60^\circ = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos 60^\circ = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.]$$

11. 解: 在平面 ABC 内过点 B 作 z 轴垂直于 BC , 在平面 BCD 内过点 B 作 x 轴垂直于 BC , $\because$ 平面 $ABC \perp$ 平面 DBC , $\therefore \angle xBz = 90^\circ$, 如图, 建立空间直角坐标系.



$$\text{设 } AB=a, \text{ 则 } B(0,0,0), A\left(0, -\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right), C(0,a,0), D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{1}{2}a, 0\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right), \overrightarrow{BC} = (0, a, 0), \overrightarrow{BD} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{1}{2}a, 0\right).$$

$$(1) \because \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \therefore AD \perp BC, \\ \therefore \text{直线 } AD \text{ 与直线 } BC \text{ 所成角的大小为 } 90^\circ.$$

$$(2) \text{ 设 } AD \text{ 与平面 } BCD \text{ 所成的角为 } \theta, 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ,$$

$$\text{易知 } \mathbf{n} = (0, 0, 1) \text{ 是平面 } BCD \text{ 的一个法向量,}$$

$$\therefore \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AD}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{AD}| |\mathbf{n}|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\sqrt{\frac{3}{2}a^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore \theta = 45^\circ, \text{ 即直线 } AD \text{ 与平面 } BCD \text{ 所成角的大小为 } 45^\circ.$$

$$(3) \text{ 设 } \mathbf{m} = (x, y, z) \text{ 是平面 } ABD \text{ 的法向量,}$$

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}ax - \frac{\sqrt{3}}{2}az = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}ax - \frac{1}{2}ay = 0, \end{cases}$$

$$\text{取 } x=1, \text{ 则 } z=1, y=\sqrt{3}, \therefore \mathbf{m} = (1, \sqrt{3}, 1) \text{ 为平面 } ABD \text{ 的一个法向量.}$$

$$\therefore \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{5} \times 1} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{设平面 } ABD \text{ 和平面 } BDC \text{ 的夹角为 } \beta,$$

$$\text{则 } \cos \beta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{故平面 } ABD \text{ 和平面 } BDC \text{ 夹角的余弦值为 } \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

12. 解: (1) 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AE \perp DC$,

$$\text{翻折后, } AE \perp DE, AE \perp CE,$$

$$\text{因为平面 } AED \perp \text{平面 } ABCE, \text{平面 } AED \cap \text{平面 } ABCE = AE, DE \subset \text{平面 } AED,$$

$$\text{所以 } DE \perp \text{平面 } ABCE.$$

$$\text{又 } AE, CE \subset \text{平面 } ABCE, \text{所以 } DE \perp AE, DE \perp CE,$$

$$\text{在等腰梯形 } ABCD \text{ 中, } 3AB = CD = 3, AD = BC = \sqrt{2}, \text{ 且 } AE \perp DC,$$

$$\text{所以 } DE = 1, CE = 2, AE = 1.$$

故以 E 为原点建立如图所示的空间直角坐标系,

$$\text{则 } E(0,0,0), B(1,1,0), D(0,0,1), C(0,2,0),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{ED} = (0,0,1),$$

$$\overrightarrow{BD} = (-1, -1, 1), \overrightarrow{BC} = (-1,$$

$$1, 0),$$

$$\text{设平面 } BDC \text{ 的法向量为 } \mathbf{m} = (x, y, z),$$

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BD} = -x - y + z = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BC} = -x + y = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } x=1, \text{ 则 } y=1, z=2, \text{ 所以 } \mathbf{m} = (1, 1, 2) \text{ 为平面 } BDC \text{ 的一个法向量,}$$

$$\text{所以点 } E \text{ 到平面 } BDC \text{ 的距离为}$$

$$\frac{|\overrightarrow{ED} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$(2) \text{ 由(1)知, } \overrightarrow{ED} = (0,0,1), \overrightarrow{EB} = (1,1,0),$$

$$\text{设平面 } BDE \text{ 的法向量为 } \mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1),$$

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{ED} = c_1 = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{EB} = a_1 + b_1 = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } a_1=1, \text{ 则 } b_1=-1, c_1=0, \text{ 所以 } \mathbf{n}_1 = (1, -1, 0) \text{ 为平面 } BDE \text{ 的一个法向量,}$$

$$\text{设 } \overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DC} = \lambda(0, 2, -1), \lambda \in (0, 1),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DP} = (0, 0, 1) + \lambda(0, 2, -1) = (0, 2\lambda, 1-\lambda),$$

$$\text{设平面 } PBE \text{ 的法向量为 } \mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2),$$

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{EP} = 2\lambda b_2 + (1-\lambda)c_2 = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{EB} = a_2 + b_2 = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } a_2=1, \text{ 则 } b_2=-1, c_2=\frac{2\lambda}{1-\lambda}, \text{ 所以 } \mathbf{n}_2 = \left(1, -1, \frac{2\lambda}{1-\lambda}\right) \text{ 为}$$

$$\text{平面 } PBE \text{ 的一个法向量,}$$

$$\text{因为二面角 } P-BE-D \text{ 为 } 60^\circ,$$

$$\text{所以 } |\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|}$$

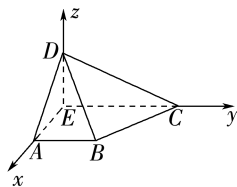
$$= \frac{|1+1|}{\sqrt{2} \times \sqrt{1+1+\left(\frac{2\lambda}{1-\lambda}\right)^2}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\text{解得 } \lambda = 3 \pm \sqrt{6},$$

$$\text{因为 } \lambda \in (0, 1), \text{ 所以 } \lambda = 3 - \sqrt{6},$$

$$\text{即 } \overrightarrow{DP} = (3 - \sqrt{6}) \overrightarrow{DC},$$

$$\text{故 } DP \text{ 与 } DC \text{ 的比值为 } 3 - \sqrt{6}.$$



课时作业(五十七)

1. B [经过两点 $A(2, m), B(-m, 4)$ 的直线 l 的斜率 $k = \frac{m-4}{2+m}$,

$$\text{又直线 } l \text{ 的倾斜角为 } 135^\circ,$$

$$\text{所以 } \frac{m-4}{2+m} = \tan 135^\circ = -1, \text{ 解得 } m = 1.$$

$$\text{故选 B.}]$$

2. C [法一: 由直线上的两点 $A(4, y), B(2, -3)$, 得 $\overrightarrow{AB} = (-2, -3-y)$, 又直线 AB 的一个方向向量为 $(-1, -1)$, 因此 $(-2) \times (-1) - (-3-y) \times (-1) = 0$, 解得 $y = -1$, 故选 C.

法二:由直线的方向向量为 $(-1, -1)$,得直线的斜率为 $\frac{-1}{-1}=1$,

所以 $\frac{y-(-3)}{4-2}=1$,解得 $y=-1$. 故选 C.]

3. B [由 $Ax+By+C=0$,整理得 $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$,由于该直线经过第一、二、四象限,

$$\text{所以} \begin{cases} -\frac{A}{B} < 0, \\ -\frac{C}{B} > 0, \end{cases} \text{故} \begin{cases} AB > 0, \\ BC < 0. \end{cases}$$

故选 B.]

4. A [根据题意,可得直线 l 的斜率 $k=\tan \frac{\pi}{4}=1$,

结合直线 l 过点 $(1, 3)$,得 l 的方程为 $y-3=x-1$,即 $y=x+2$,

当 $x=0$ 时, $y=2$,直线 l 交 y 轴于点 $(0, 2)$,即直线 l 在 y 轴上的截距为2.

故选 A.]

5. A [两直线化为截距式分别为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{-b}=1, \frac{x}{b}+\frac{y}{-a}=1$.

选项 A, B 中,根据直线 l_1 的图象可知, $a < 0, -b < 0$,

$\therefore b > 0, -a > 0$,即直线 l_2 在 x 轴、 y 轴上的截距都大于零,故选项 A 正确, B 错误;

对于选项 C,根据直线 l_1 的图象可知, $a < 0, -b > 0$,

$\therefore b < 0, -a > 0$,即直线 l_2 在 x 轴上的截距小于零,在 y 轴上的截距大于零,故选项 C 错误;

对于选项 D,根据直线 l_1 的图象可知, $a > 0, -b < 0$,

$\therefore b > 0, -a < 0$,即直线 l_2 在 x 轴上的截距大于零,在 y 轴上的截距小于零,故选项 D 错误.

故选 A.]

6. C [由题意可设直线 $l: y-8=k(x-6) (k < 0)$,即 $y=kx+8-6k (k < 0)$.

不妨假设 A 在 x 轴上,则 $A(6-\frac{8}{k}, 0), B(0, 8-6k)$,易知 A 在 C 右侧,

记 O 为坐标原点,因为线段 OA 与 OB 的长度分别为 $6-\frac{8}{k}, 8-6k$,

$$\text{所以} \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \left(6 - \frac{8}{k} - 4 \right) (8 - 6k) \\ = \frac{1}{2} \left(64 - \frac{64}{k} - 12k \right) \geq \frac{1}{2} (64 + 2\sqrt{64 \times 12}) = 32 + 16\sqrt{3},$$

当且仅当 $-\frac{64}{k} = -12k (k < 0)$,

即 $k = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时,等号成立.]

7. BC [A 不正确,方程 $k=\frac{y-2}{x+1}$ 不含点 $(-1, 2)$; B 正确; C 正确; D 只有斜率 k 存在时成立.]

8. BCD [当直线过原点时,直线在两坐标轴上的截距相等,如 $y=2x$,不能用方程 $x+y=a (a \in \mathbf{R})$ 表示,故 A 错误;

方程 $mx+y-2=0 (m \in \mathbf{R})$ 表示的直线斜率一定存在,为 $k=-m$,故 B 正确;

$$\text{由 } \alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right] \text{ 得 } \frac{1}{2} \leq \cos \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以 $k=2\cos \alpha \in [1, \sqrt{3}]$,

设直线的倾斜角为 $\theta (\theta \in [0, \pi))$,

则 $\tan \theta \in [1, \sqrt{3}]$,所以 $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right]$,故 C 正确;

经过两点 $P(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) (x_1 \neq x_2)$ 的直线的斜率 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,

由直线方程的点斜式可得,直线方程为 $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$,故 D 正确.

故选 BCD.]

9. AB [直线 $y=ax-2a+3=a(x-2)+3$ 过定点 $(2, 3)$, A 正确;

当 $m=0$ 时,直线方程为 $x=2$, B 正确;

若直线的倾斜角为 90° ,则该直线的

斜率不存在,不能用 $y-1 =$

$\tan \theta (x-1)$ 表示, C 错误;

直线 $l: mx+y-m-1=0$,即 m

$(x-1)+y-1=0$ 过定点 $C(1, 1)$,

画出图象如图所示,其中 $k_{AC} =$

$$\frac{-3-1}{2-1} = -4, k_{BC} = \frac{-2-1}{-3-1} = \frac{3}{4}, \text{直}$$

线 l 的斜率为 $-m$,所以 $-m \geq \frac{3}{4}$ 或 $-m \leq -4$,解得 $m \geq 4$

或 $m \leq -\frac{3}{4}$, D 错误. 故选 AB.]

10. $\frac{\pi}{3}$ [直线 $y=\sqrt{3}x-2$ 的斜率为 $\sqrt{3}$,

设其倾斜角大小为 α ,

则 $\tan \alpha = \sqrt{3}$,

因为 $\alpha \in [0, \pi)$,则 $\alpha = \frac{\pi}{3}$.]

11. 4 [由条件知 $-2=-3a+1, b=-3 \times (-1)+1$,

分别解得 $a=1, b=4, \therefore \frac{a}{x} + bx = \frac{1}{x} + 4x \geq$

$$2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot 4x} = 4,$$

当且仅当 $\frac{1}{x} = 4x$,即 $x = \frac{1}{2}$ 时,等号成立,

$\therefore \frac{1}{x} + 4x$ 的最小值是4.]

12. $9x-y=0$ 或 $x+y-10=0$ [当直线在两坐标轴上的截距为0时,直线方程为 $9x-y=0$;

当截距不为0时,设直线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$,则 $\frac{1}{a} + \frac{9}{a} = 1$,

解得 $a=10$,所以直线方程为 $x+y-10=0$.]

课时作业(五十八)

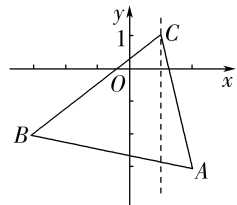
1. A [直线 $l_1: 4x-2y+5=0$ 和 $l_2: 6x+ay-7=0$,若 $l_1 \perp l_2$,则 $24-2a=0$,解得 $a=12$.

故选 A.]

2. B [法一:设所求直线上一点的坐标为 (x, y) ,则其关于点 $(\frac{1}{3}, 0)$ 对称的点为 $(\frac{2}{3}-x, -y)$,因为点 $(\frac{2}{3}-x, -y)$ 在

直线 $3x-2y=0$ 上,所以 $3(\frac{2}{3}-x)-2(-y)=0$,化简得

$$3x-2y-2=0,$$



所以所求直线方程为 $3x-2y-2=0$, 故选 B.

法二: 在直线 $3x-2y=0$ 上任取两点 $O(0,0), M(2,3)$, 设点 O, M 关于点 $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ 的对称点分别为 O', M' , 则 $O'\left(\frac{2}{3}, 0\right), M'\left(-\frac{4}{3}, -3\right)$, 所以所求直线方程为 $\frac{y-(-3)}{0-(-3)} = \frac{x-(-\frac{4}{3})}{\frac{2}{3}-(-\frac{4}{3})}$, 即 $3x-2y-2=0$. 故选 B.]

3. **B** [法一: 由点到直线的距离公式知点 $(0, -1)$ 到直线 $y = k(x+1)$ 的距离 $d = \frac{|k \cdot 0 - (-1) + k|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{|k+1|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{\frac{k^2+2k+1}{k^2+1}} = \sqrt{1+\frac{2k}{k^2+1}}$. 当 $k=0$ 时, $d=1$; 当 $k \neq 0$ 时, $d = \sqrt{1+\frac{2k}{k^2+1}} = \sqrt{1+\frac{2}{k+\frac{1}{k}}}$, 要使 d 最大, 需 $k>0$ 且 $k+\frac{1}{k}$ 最小, $\therefore$ 当 $k=1$ 时, $d_{\max} = \sqrt{2}$, 故选 B.]

法二: 记点 $A(0, -1)$, 直线 $y=k(x+1)$ 恒过点 $B(-1, 0)$, 当 AB 垂直于直线 $y=k(x+1)$ 时, 点 $A(0, -1)$ 到直线 $y=k(x+1)$ 的距离最大, 且最大值为 $|AB| = \sqrt{2}$, 故选 B.]

4. **A** [根据题意, $2x-my+m-2=0$ 变形可得 $(1-y)m+2x-2=0$,

$$\text{令 } \begin{cases} 1-y=0, \\ 2x-2=0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=1, \\ y=1, \end{cases}$$

所以该直线恒过定点 $(1, 1)$, 即 P 的坐标为 $(1, 1)$,

由 $x-2y+4=0$, 得 $y = \frac{1}{2}x+2$, 即该直线的斜率为 $\frac{1}{2}$,

因为所求直线与直线 $x-2y+4=0$ 垂直, 则所求的直线的斜率为 -2 ,

又由所求直线过点 $P(1, 1)$, 则所求直线的方程为 $y-1 = -2(x-1)$, 即 $2x+y-3=0$.

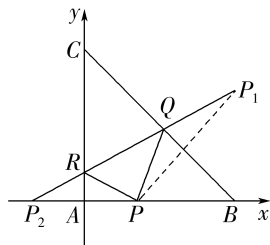
故选 A.]

5. **B** [由题意, 根据菱形的两组对边间的距离相等, 可得 $\frac{|1-3|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{9+16}}$,

$$\text{则 } |c_1-c_2| = 2\sqrt{5}.$$

故选 B.]

6. **A** [由题意, 可建立直角坐标系, 如图所示,



可得 $B(6,0), C(0,6)$, 故直线 BC 的方程为 $x+y=6$,

则 $\triangle ABC$ 的重心坐标为 $\left(\frac{0+0+6}{3}, \frac{0+0+6}{3}\right)$, 即 $(2, 2)$,

设 $P(a, 0), 0 < a < 6$, 点 P 关于直线 BC 的对称点 $P_1(x, y)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{a+x}{2} + \frac{0+y}{2} = 6, \\ \frac{y-0}{x-a} \times (-1) = -1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=6, \\ y=6-a, \end{cases}$$

即 $P_1(6, 6-a)$,

易得 P 关于 y 轴的对称点 $P_2(-a, 0)$, 由光的反射原理可知 P_1, Q, R, P_2 四点共线,

直线 QR 的斜率 $k = \frac{6-a-0}{6-(-a)} = \frac{6-a}{6+a}$, 故直线 QR 的方程为 $y = \frac{6-a}{6+a}(x+a)$,

由于直线 QR 过 $\triangle ABC$ 的重心 $(2, 2)$, 代入得 $2 = \frac{6-a}{6+a}(2+a)$,

则 $a=2$ 或 $a=0$ (舍去), 故 $P(2, 0), P_1(6, 4), P_2(-2, 0)$, 直

线 QR 的方程为 $y = \frac{1}{2}(x+2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x+y=6, \\ y=\frac{1}{2}(x+2), \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=\frac{10}{3}, \\ y=\frac{8}{3}, \end{cases}$$

即点 Q 的坐标为 $\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$,

$$\text{则 } \triangle PQB \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \times (6-2) \times y_Q = 2 \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

故选 A.]

7. **ABC** [对于选项 A, 由 $ax-(2a-3)y-1=0$ 得 $a(x-2y)+3y-1=0$,

$$\text{令 } \begin{cases} x-2y=0, \\ 3y-1=0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x=\frac{2}{3}, \\ y=\frac{1}{3}, \end{cases} \text{ 直线 } l_2 \text{ 始终过定点 } \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \text{ 故}$$

选项 A 正确;

对于选项 B, 由 $l_1 \perp l_2$ 得 $a-a(2a-3)=0$, 解得 $a=0$ 或 $a=2$, 故选项 B 正确;

对于选项 C, 由直线 $l_1: x+ay-a=0$ 和直线 $l_2: ax-(2a-3)y-1=0$,

可得当 $a=-3$ 时, $l_1: x-3y+3=0$, 即 $3x-9y+9=0$, $l_2: 3x-9y+1=0$, 则 $l_1 \parallel l_2$,

则 l_1 与 l_2 的距离为 $\frac{|9-1|}{\sqrt{3^2+(-9)^2}} = \frac{4\sqrt{10}}{15}$, 故选项 C 正确;

对于选项 D, 当 $a=0$ 时, $l_1: x=0$, 不经过第三象限, 故选项 D 错误.

故选 ABC.]

8. **AC** [根据点 N 在直线 $x+y=0$ 上,

设点 $N(a, -a)$,

结合 $M(1, 0)$, 可知 MN 的中点坐标为 $\left(\frac{a+1}{2}, -\frac{a}{2}\right)$,

由题意可知点 $\left(\frac{a+1}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ 在直线 $mx-y+1=0 (m \in \mathbf{R})$ 上,

$$\text{可得 } m \times \frac{a+1}{2} + \frac{a}{2} + 1 = 0, \text{ 化简得 } m(a+1) + a + 2 = 0, \text{ ①}$$

因为直线 MN 垂直于直线 $mx-y+1=0 (m \in \mathbf{R})$,

$$\text{所以当 } a \neq -1 \text{ 时, 可得 } -\frac{a}{a-1} \times m = -1,$$

$$\text{化简得 } am = a-1, \text{ ②}$$

联立①②, 解得

$$\begin{cases} a = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \\ m = -\sqrt{3}, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \\ m = \sqrt{3}, \end{cases}$$

又当 $a=1$ 时,根据直线 MN 垂直于直线 $mx-y+1=0(m \in \mathbf{R})$,可知 $m=0$,此时直线为 $y=1$,

而 MN 的中点坐标为 $(1, -\frac{1}{2})$,不在直线 $y=1$ 上,不满足题意.

综上所述, $m=\pm\sqrt{3}$.

故选 AC.]

9. $\sqrt{2}$ [由题可得 $1 \times (-a) - 3 = 0$,解得 $a = -3$,

直线 $3x - ay + 3 = 0$,即 $3x + 3y + 3 = 0$,即 $x + y + 1 = 0$,

所以直线 $x + y + 3 = 0$ 与直线 $x + y + 1 = 0$ 的距离为

$$\frac{|3-1|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}.$$

即直线 $x + y - a = 0$ 与直线 $3x - ay + 3 = 0$ 之间的距离为 $\sqrt{2}$.]

10. $x + y - 1 = 0$ [设所求直线方程为 $x + 2y - 2 + \lambda(3x - 2y + 2) = 0$,点 $P(1, 0)$ 在直线上,

$$\therefore 1 - 2 + \lambda(3 + 2) = 0, \text{解得 } \lambda = \frac{1}{5},$$

$\therefore$ 所求直线方程为 $x + 2y - 2 + \frac{1}{5}(3x - 2y + 2) = 0$,即 $x + y - 1 = 0$.]

11. 3 [由题意得 $|OP| = \sqrt{m^2 + n^2}$,表示点 P 到原点 $(0, 0)$ 的距离,

所以 $\sqrt{m^2 + n^2}$ 的最小值等于原点 $(0, 0)$ 到直线 $3x + 4y + 15 = 0$ 的距离,

结合点到直线的距离公式,可得 $d = \frac{|0 + 0 + 15|}{\sqrt{9 + 16}} = 3$,可知

$\sqrt{m^2 + n^2}$ 的最小值为 3.]

课时作业(五十九)

1. D [化圆的方程为标准方程,得 $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 10$,所以该圆的圆心 $(1, -3)$ 到直线 $x - y + 2 = 0$ 的距离为

$$\frac{|1 - (-3) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.]$$

2. B [由 $x^2 + y^2 + kx + 4y + k^2 + 1 = 0$,得 $(x + \frac{k}{2})^2 + (y + 2)^2 = 3 - \frac{3}{4}k^2$,

由 $3 - \frac{3}{4}k^2 > 0$,解得 $-2 < k < 2$,①

$\because$ 点 $P(1, -2)$ 在圆 C 的外部, $\therefore 1 + 4 + k - 8 + k^2 + 1 > 0$,即 $k^2 + k - 2 > 0$,得 $k < -2$ 或 $k > 1$,②

由①②得 $1 < k < 2$. 故选 B.]

3. B [由题意知, $\triangle ABC$ 是直角三角形,且 $A = 90^\circ$,

$\therefore$ 圆的半径为 $\frac{|BC|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 4^2}}{2} = \sqrt{5}$,圆心为 $(-3, 0)$,

$\therefore$ 圆的方程为 $(x+3)^2 + y^2 = 5$. 故选 B.]

4. A [设点 $M(x_0, y_0)$,则 $P(x_0, 2y_0)$,

又 P 在曲线 C 上,

所以 $x_0^2 + 4y_0^2 = 16(y_0 > 0)$,

$$\text{即 } \frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{4} = 1(y_0 > 0),$$

即点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1(y > 0)$. 故选 A.]

5. ABD [根据题意,圆 $C_k: (x-k)^2 + (y-k)^2 = 4(k \in \mathbf{R})$,其圆心为 (k, k) ,半径为 2.

依次分析选项:

对于 A,圆心为 (k, k) ,其圆心在直线 $y = x$ 上, A 正确;

对于 B,圆 $C_k: (x-k)^2 + (y-k)^2 = 4$,

将 $(3, 0)$ 代入圆的方程可得 $(3-k)^2 + (0-k)^2 = 4$,

化简得 $2k^2 - 6k + 5 = 0$, $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$,方程无解, B 正确;

对于 C,将 $(2, 2)$ 代入圆的方程可得 $(2-k)^2 + (2-k)^2 = 4$,解得 $k = 2 \pm \sqrt{2}$,故 C 错误;

对于 D,由圆的方程可知圆的半径为 2,则圆的面积为 4π ,故 D 正确.

故选 ABD.]

6. BD [如图,方程 $(x-2)^2 +$

$y^2 = 4$ 表示以 $C(2, 0)$ 为圆心,

半径 $r = 2$ 的圆. 对于 A, $\frac{y}{x+1}$

表示点 $(-1, 0)$ 与圆上的点 (x, y) 的连线的斜率,设过点 $(-1, 0)$ 的直线的斜率为 k ,则

$y = k(x+1)$,即 $kx - y + k =$

0 ,所以圆心 C 到该直线的距离 $d_1 = \frac{|2k + k|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} \leq 2$,解

得 $-\frac{2\sqrt{5}}{5} \leq k \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}$,故 A 错误;对于 B,令 $x + y = z$,即 $x +$

$y - z = 0$,直线 $x + y - z = 0$ 与圆必有交点,则圆心 C 到该直

线的距离 $d_2 = \frac{|2 - z|}{\sqrt{2}} \leq 2$,解得 $2 - 2\sqrt{2} \leq z \leq 2 + 2\sqrt{2}$,即 $2 -$

$2\sqrt{2} \leq x + y \leq 2 + 2\sqrt{2}$,故 $x + y$ 的最小值为 $2 - 2\sqrt{2}$,即 B 正

确;对于 C, $(x+2)^2 + (y+3)^2$ 表示圆上的点 (x, y) 到 $A(-2, -3)$ 的距离的平方,令圆上的点 (x, y) 到 $A(-2, -3)$ 的距离为 d_3 ,因为 $|AC| = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-0)^2} = 5$,所以 $|AC| - r \leq d_3 \leq |AC| + r$,即 $3 \leq d_3 \leq 7$,所以 $9 \leq$

$(x+2)^2 + (y+3)^2 \leq 49$,故 C 错误;对于 D,因为直线 $y = kx + 2$ 恒过点 $D(0, 2)$,又 $|CD| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$,所以点 (x, y) 到直线 $y = kx + 2$ 的距离的最大值为 $2 + 2\sqrt{2}$,故 D 正确. 故选 BD.]

7. $x^2 + y^2 - 2x = 0$ [设圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

$\because$ 圆经过点 $(0, 0), (1, 1), (2, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} F = 0, \\ 2 + D + E + F = 0, \\ 4 + 2D + F = 0, \end{cases} \text{解得 } \begin{cases} D = -2, \\ E = 0, \\ F = 0. \end{cases}$$

$\therefore$ 圆的方程为 $x^2 + y^2 - 2x = 0$.]

8. $[-1, 3]$ [将圆 C 的方程 $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ 化为 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$,

所以圆心 C 的坐标为 $(2, 0)$.

所以 $\overrightarrow{PC} = (2 - x, -y)$,

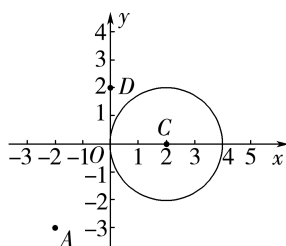
又 $\overrightarrow{PO} = (-x, -y)$,

所以 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PO} = x^2 + y^2 - 2x$.

因为 $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$,

所以 $x^2 + y^2 = 4x - 3$,

所以 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PO} = 4x - 3 - 2x = 2x - 3$.



因为 $(x-2)^2 + y^2 = 1$, 所以 $1 \leq x \leq 3$.

所以 $-1 \leq 2x-3 \leq 3$,

从而 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PO}$ (O 为坐标原点) 的取值范围为 $[-1, 3]$.

9. 解: (1) 设圆心坐标为 $(3t, t)$,

则由圆与 y 轴正半轴相切, 可得半径 $r = 3|t|$.

$\therefore$ 圆心到直线 l 的距离 $d = \frac{|6t-t|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}t$, 由 $4+5t^2=9t^2$, 解

得 $t = \pm 1$,

故圆心坐标为 $(3, 1)$ 或 $(-3, -1)$, 半径等于 3.

$\therefore$ 圆与 y 轴正半轴相切, $\therefore$ 圆心坐标只能为 $(3, 1)$,

故圆 C 的方程为 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$.

(2) (i) 设 $M(x, y), A(m, n)$,

$\therefore M$ 为线段 AB 上一点且满足 $\frac{|AM|}{|MB|} = 3$,

$\therefore \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$,

$\therefore (x-m, y-n) = 3(-5-x, 1-y)$,

$\therefore \begin{cases} m = 4x + 15, \\ n = 4y - 3, \end{cases}$

$\therefore$ 点 A 在圆 C 上运动,

$\therefore (4x+15-3)^2 + (4y-3-1)^2 = 9$,

$\therefore (4x+12)^2 + (4y-4)^2 = 9$,

$\therefore (x+3)^2 + (y-1)^2 = \frac{9}{16}$,

所以曲线 E 的方程为 $(x+3)^2 + (y-1)^2 = \frac{9}{16}$,

它是一个以 $(-3, 1)$ 为圆心, 以 $\frac{3}{4}$ 为半径的圆.

(ii) 假设存在一点 $T(a, 2a)$ 满足条件, 设 $P(x, y)$,

$\frac{|PT|}{|PO|} = \lambda$,

则 $(x-a)^2 + (y-2a)^2 = \lambda^2(x^2 + y^2)$,

整理得 $\lambda^2(x^2 + y^2) = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 4ay + 4a^2$,

$\therefore P$ 在轨迹 E 上,

$\therefore (x+3)^2 + (y-1)^2 = \frac{9}{16}$,

化简得 $x^2 + y^2 = -6x + 2y - \frac{151}{16}$,

$\therefore x(6\lambda^2 - 2a - 6) + y(-2\lambda^2 - 4a + 2) - \frac{151}{16} + \frac{151}{16}\lambda^2 + 5a^2 = 0$,

$\therefore \begin{cases} 6\lambda^2 - 2a - 6 = 0, \\ -2\lambda^2 - 4a + 2 = 0, \\ -\frac{151}{16} + \frac{151}{16}\lambda^2 + 5a^2 = 0, \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} \lambda^2 = 1, \\ a = 0, \end{cases} \therefore T(0, 0),$

$\therefore T$ 异于原点, $\therefore T$ 不存在.

课时作业(六十)

1. A [根据题意, 化简得 $E: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$, 圆心为 $E(3, 4), r_1 = 5$.

圆 $F: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$, 圆心为 $F(1, 2)$, 半径 $r_2 = 1$.

可得圆心距 $|EF| = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{2}$,

因为 $|EF| < r_1 - r_2 = 4$, 所以两圆内含.

故选 A.]

2. C [将直线 $l: (2m+1)x + (m+1)y - 13m - 9 = 0$, 整理可得 $(2x+y-13)m + x+y-9=0$,

令 $\begin{cases} 2x+y-13=0, \\ x+y-9=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=4, \\ y=5, \end{cases}$ 即直线 l 恒过定点 $P(4, 5)$,

将点 P 的坐标代入圆 C 中, 可得 $(4-2)^2 + (5-3)^2 = 8 < 16$, 所以点 P 在圆 C 内, 所以直线与圆相交, 即直线与圆的公共点有 2 个.

故选 C.]

3. B [联立 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0, \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y - 12 = 0, \end{cases}$

两式相减可得公共弦方程为 $x - y + 2 = 0$,

法一: 联立 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0, \\ x - y + 2 = 0, \end{cases}$

得 $x^2 + 2x = 0$,

解得 $x_1 = 0, x_2 = -2$, 即公共弦的端点坐标为 $(0, 2), (-2, 0)$,

根据两点之间的距离公式可得公共弦长 $d = \sqrt{[0-(-2)]^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$.

法二: 圆 $x^2 + y^2 - 4 = 0$ 的圆心坐标为 $(0, 0)$, 半径 $r = 2$,

圆心到公共弦的距离 $d_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

公共弦长 $d = 2\sqrt{r^2 - d_1^2} = 2\sqrt{2}$.

故选 B.]

4. B [圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 的圆心 $C(0, 0)$, 半径 $r = 2$,

可得圆心 C 到直线 $l: ax + by - 1 = 0$ 的距离 $d = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

所以弦长 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$

$= 2\sqrt{4 - \frac{1}{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{3}$,

可得 $a^2 + b^2 = 1$,

将点 $P(a, b)$ 代入直线 l 的方程可得 $a^2 + b^2 = 1$, 所以点 P 在直线 l 上.

故选 B.]

5. A [圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 的圆心 $C(1, 1)$, 半径为 1, 由直线 $x - y + 4 = 0$ 上一点 P 向圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 引切线, 设切点为 M , 连接 PC, MC (图略), 则 $|PM| =$

$\sqrt{|PC|^2 - |MC|^2} = \sqrt{|PC|^2 - 1}$, 要使切线长最小, 则 $|PC|$ 最小, 而 $|PC|$ 的最小值等于圆心 C 到直线 $x - y + 4 = 0$

的距离, 故 $|PC|_{\min} = \frac{|1-1+4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, 故切线长的最小值为

$\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 1} = \sqrt{7}$. 故选 A.]

6. B [由题意得圆心 $(0, -2)$ 到直线 $y = \sqrt{3}x + 2$ 的距离 $d = 2$. 当 $r = d - 1 = 1$ 时, 圆 $x^2 + (y+2)^2 = r^2 (r > 0)$ 上到直线 $y =$

$\sqrt{3}x + 2$ 的距离为 1 的点有且仅有一个, 当 $r = d + 1 = 3$ 时, 圆 $x^2 + (y+2)^2 = r^2 (r > 0)$ 上到直线 $y = \sqrt{3}x + 2$ 的距离为 1 的点有且仅有三个, 故当 $1 < r < 3$ 时, 圆 $x^2 + (y+2)^2 = r^2 (r > 0)$ 上到直线 $y = \sqrt{3}x + 2$ 的距离为 1 的点有且仅有两个.

故选 B.]

7. ACD [根据题意, 由 $x^2 + y^2 - 2x = 0$, 得 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, 则圆心 $O_1(1, 0)$, 半径 $r = 1$, 由 $x^2 + y^2 + 2x - 8y = 0$, 得 $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 17$, 则圆心 $O_2(-1, 4)$, 半径 $R = \sqrt{17}$.

对于 A, 联立 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0, \\ x^2 + y^2 + 2x - 8y = 0, \end{cases}$ 得 $x - 2y = 0$, 即直线

AB 的方程为 $x-2y=0$, A 正确; 对于 B, 圆心 O_1 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|1-0|}{\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $|AB| = 2 \times \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, B 错误; 对于 C, 线段 AB 的垂直平分线即直线 O_1O_2 , 由 $O_1(1, 0), O_2(-1, 4)$, 易得直线 O_1O_2 的方程为 $2x+y-2=0$, C 正确; 对于 D, 由圆心 O_1 到直线 AB 的距离 $d = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 知点 P

到直线 AB 的距离的最大值为 $\frac{\sqrt{5}}{5} + 1$, D 正确. 故选 ACD.]

8. BC [对于 A, $\odot A$ 的方程可化为 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25-k$, 所以 $A(3, 4)$, A 错误;

对于 B, 当 $k=9$ 时, $\odot A$ 的半径 $r=4$, 圆心到 x 轴的距离为 4, 所以 $\odot A$ 与 x 轴相切, B 正确;

对于 C, 当 $k=-11$ 时, $\odot A$ 的半径 $r=6$, 连接 OA (图略), 则 $|OA|=5$, 因为 $r-1=5$, 所以 $\odot O$ 与 $\odot A$ 内切, C 正确;

对于 D, 若两圆相交, 则两个交点所在直线的方程为两圆方程相减, 即 $6x+8y-k-1=0$, D 错误.

故选 BC.]

9. ABD [由题可知, 直线 l 过定点 $(-2, 0)$,

因为圆 $C: (x-2)^2 + y^2 = 8$,

所以圆心为 $C(2, 0)$, 半径为 $2\sqrt{2}$.

对于 A, 若 $t=1$, 则圆心 $C(2, 0)$ 到直线 $x-y+2=0$ 的距离为 $\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, 即圆心到直线的距离等于半径,

所以 l 与圆 C 相切, 故 A 正确;

对于 B, 依题意, 由圆心 $C(2, 0)$ 到直线 $x-ty+2=0$ 的距离为 $\frac{4}{\sqrt{1+t^2}} < 2\sqrt{2}$,

解得 $t > 1$ 或 $t < -1$, 故 B 正确;

对于 C, 将 $(2, 0)$ 代入到 l 的方程, 得 $2=t \times 0 - 2$ 不成立,

故 l 不能经过圆心 C , 则圆 C 不可能关于 l 对称, 故 C 错误;

对于 D, 若 $t=\sqrt{3}$, 圆心 $C(2, 0)$ 到直线 $x-\sqrt{3}y+2=0$ 的距离为 $\frac{4}{2} = 2$, 则弦长为 $2\sqrt{8-2^2} = 4$, 故 D 正确.

故选 ABD.]

10. AD [圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 的半径 $r=2$, 圆心为 $O(0, 0)$.

对于 A, 点 O 到直线 l 的距离 $d = \frac{|0-0+\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 1$, 所以弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2} = 2\sqrt{3}$, A 正确;

对于 B, 因为圆心 O 到直线 l 的距离 $d=1 < 2=r$, 所以直线 l 与圆 O 相交,

此时劣弧上的点到直线 l 的距离的最大值为 $r-d=1$, 所以劣弧上只有一个点满足题意,

优弧上有两个点符合题意, 即圆 O 上共有 3 个点到直线 l 的距离为 1, B 错误;

对于 C, 令 $\frac{y}{x-4} = k$, 则 $y=k(x-4)$, 由题意, 直线 $kx-y-4k=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 有公共点,

则 $\frac{|4k|}{\sqrt{k^2+1}} \leq 2$, 解得 $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq k \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以式子 $\frac{y_0}{x_0-4}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, C 错误;

对于 D, 由题意知, $M(3, 4)$, 且 $|PA|^2 = |PM|^2 - |AM|^2 = |PM|^2 - 1$,

所以问题转化为求 $|PM|$ 的最小值, 易知 $|PM|_{\min} = |OM| - 2 = \sqrt{3^2+4^2} - 2 = 3$,

此时 $|PA| = \sqrt{3^2-1} = 2\sqrt{2}$, 故 D 正确.

故选 AD.]

11. 2 [对于直线 $l_1: x-y+6=0$, 令 $x=0$, 得 $y=6$, 令 $y=0$,

得 $x=-6$, 所以 $A(-6, 0), B(0, 6)$, 所以 $|AB| = 6\sqrt{2}$. 因

为 $|AB| = 3|CD|$, 所以 $|CD| = 2\sqrt{2}$. 圆 $(x+1)^2 + (y-3)^2 = r^2$ 的圆心为 $(-1, 3)$, 圆心到直线 l_1 的距离 $d =$

$\frac{|-1-3+6|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 所以 $r = \sqrt{d^2 + \left(\frac{|CD|}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{2+2} = 2$.]

12. 0 或 -4 [圆 $O_1: x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x + a = 0$ 与圆 $O_2: x^2 + (y-1)^2 = 1$ 两个方程相减,

化简得 $2\sqrt{3}x - 2y - a = 0$,

即为直线 AB 的方程.

圆 $O_2: x^2 + (y-1)^2 = 1$ 的圆心为 $O_2(0, 1)$, 半径 $r_2 = 1$,

设点 O_2 到直线 AB 的距离为 d , 则 $|AB| = 2\sqrt{r_2^2 - d^2} = \sqrt{3}$,

解得 $d = \frac{1}{2}$,

所以 $\frac{|-2-a|}{\sqrt{12+4}} = \frac{1}{2}$,

解得 $a=0$ 或 $a=-4$.]

13. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ [圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的圆心为 $(0, 0)$, 半径 $r_1 = 1$,

圆 $(x-6)^2 + y^2 = 1$ 的圆心为 $(6, 0)$, 半径 $r_2 = 1$,

显然两圆相离.

直线 $y=kx+b(k>0)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和圆 $(x-6)^2 + y^2 = 1$ 都相切,

则 $\begin{cases} \frac{|b|}{\sqrt{1+k^2}} = 1, \\ \frac{|6k+b|}{\sqrt{1+k^2}} = 1, \end{cases}$ 解得 $k^2 = \frac{1}{8}$, 又 $k>0$, 则 $k = \frac{\sqrt{2}}{4}$.]

阶段检测(十三)

1. A [由题意, 设直线的方程为 $x-2y+c=0(c \neq 3)$,

因为所求直线过点 $P(-1, 3)$,

所以 $-1-6+c=0$, 解得 $c=7$,

故所求直线的方程为 $x-2y+7=0$.

故选 A.]

2. B [直线 $l_1: x+2y-3=0$ 与直线 $l_2: kx-2y+1=0(k \in \mathbf{R})$ 平行,

则 $\frac{k}{1} = \frac{-2}{2} \neq \frac{1}{-3}$, 解得 $k=-1$,

故直线 $l_1: x+2y-3=0$, 直线 $l_2: x+2y-1=0$,

这两条直线间的距离为 $\frac{|-3+1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故选 B.]

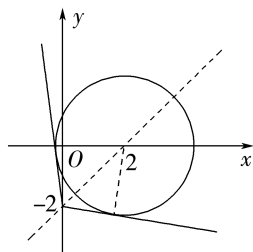
3. C [由题意, 圆的方程 $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$ 可化为 $(x+1)^2 + y^2 = 3^2$,

所以圆心坐标为 $(-1, 0)$, 半径 $r=3$,

直线 $mx+y-m-1=0$ 化简可得直线 $y=m(1-x)+1$,

所以直线过定点 $(1, 1)$, 因为定点和圆心的距离 $d = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5} < 3$,
 所以定点在圆内, 当直线垂直于圆心到定点的连线时, 圆心到直线的距离最大, 最大值为 $\sqrt{5}$,
 所以弦长最短为 $2\sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 4$.
 故选 C.]

4. B [如图, 由 $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ 得 $(x-2)^2 + y^2 = 5$, 所以圆心坐标为 $(2, 0)$, 半径 $r = \sqrt{5}$, 所以圆心到点 $(0, -2)$ 的距离为 $\sqrt{(2-0)^2 + (0+2)^2} = 2\sqrt{2}$, 由于圆心与点 $(0, -2)$ 的连线平分角 α , 所以 $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{2\sqrt{2}} =$



$$\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$\text{所以 } \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}, \text{ 所以 } \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{10}}{4} \times$$

$$\frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

故选 B.]

5. C [根据题意, 设 $\triangle ABC$ 的九点圆的标准方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$,
 由于 $A(-2, 1), B(4, 1), G(3, 3)$,
 设 AB 中点为 D , 其坐标为 $(1, 1)$, AG 中点为 E , 其坐标为 $(\frac{1}{2}, 2)$, BG 中点为 F , 其坐标为 $(\frac{7}{2}, 2)$,

由 $\triangle ABC$ 的九点圆过 D, E, F ,

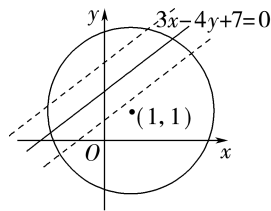
$$\text{则有 } \begin{cases} (1-a)^2 + (1-b)^2 = r^2, \\ (\frac{1}{2}-a)^2 + (2-b)^2 = r^2, \\ (\frac{7}{2}-a)^2 + (2-b)^2 = r^2, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a=2, \\ b=\frac{17}{8}, \\ r^2=\frac{145}{64}, \end{cases}$$

$$\text{故 } \triangle ABC \text{ 的九点圆的标准方程为 } (x-2)^2 + (y-\frac{17}{8})^2 = \frac{145}{64}.$$

故选 C.]

6. D [由已知 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$, 可知圆心坐标为 $(1, 1)$, 半径 $r = 3$,
 圆心 $(1, 1)$ 到直线的距离为 $\frac{|3-4+7|}{5} = \frac{6}{5} < \frac{1}{2}r = \frac{3}{2}$,



所以圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$ 上到直线 $3x-4y+7=0$ 的距离为 1 的点共有 4 个.

故选 D.]

7. ACD [对于 A, 点 $(0, 2)$ 到直线 $y = x + 1$ 的距离为 $d = \frac{|0-2+1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 选项 A 错误;

对于 B, 任意一条直线都有倾斜角, 但不一定有斜率, 如与 x 轴垂直的直线, 所以选项 B 正确;

对于 C, 直线 $x-2y+4=0$ 与两坐标轴的交点为 $A(-4, 0)$ 和 $B(0, 2)$, 与两坐标轴围成的三角形面积是 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times$

$4 \times 2 = 4$, 选项 C 错误;

对于 D, 直线过原点时, 过点 $(2, 2)$ 且在 x 轴和 y 轴上截距都相等的直线方程为 $y = x$,

直线不过原点时, 过点 $(2, 2)$ 且在 x 轴和 y 轴上截距都相等的直线方程为 $x+y-4=0$, 所以选项 D 错误.

故选 ACD.]

8. ABC [易知圆 C_1 的圆心为 $C_1(0, 0)$, 半径 $r_1 = 1$.

将 C_2 的方程化为 $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 1$, 得圆心为 $C_2(3, -4)$, 半径 $r_2 = 1$.

对于 A, 两圆的圆心距 $|C_1C_2| = 5 > r_1 + r_2$, 所以两圆外离, 故 A 正确;

对于 B, $|PQ|$ 的最小值为 $|C_1C_2| - r_1 - r_2 = 3$, 最大值为 $|C_1C_2| + r_1 + r_2 = 7$, 所以 $|PQ|$ 的取值范围为 $[3, 7]$, 故 B 正确;

对于 C, 两圆的圆心 $C_1(0, 0), C_2(3, -4)$ 都在直线 $4x+3y=0$ 上, 所以直线 $4x+3y=0$ 为两圆的对称轴, 故 C 正确;

对于 D, 由 A 项知两圆外离, 所以不存在公共弦, 故 D 错误.

故选 ABC.]

9. $2(2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 中任意一个均可 [设直线 $x-my+1=0$ 为直线 l , 由条件知 $\odot C$ 的圆心 $C(1, 0)$, 半径 $R=2$, 点 C 到

$$\text{直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{2}{\sqrt{1+m^2}},$$

$$|AB| = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{4 - \left(\frac{2}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2} = \frac{4|m|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

$$\text{由 } S_{\triangle ABC} = \frac{8}{5}, \text{ 得 } \frac{1}{2} \times \frac{4|m|}{\sqrt{1+m^2}} \times \frac{2}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{8}{5}, \text{ 整理得}$$

$$2m^2 - 5|m| + 2 = 0, \text{ 解得 } m = \pm 2 \text{ 或 } m = \pm \frac{1}{2}.$$

$$10. y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \text{ 或 } y = \frac{7}{24}x - \frac{25}{24} \text{ 或 } x = -1$$

[圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的圆心为 $O(0, 0)$, 半径为 1, 圆 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ 的圆心为 $O_1(3, 4)$, 半径为 4,

两圆圆心距为 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, 等于两圆半径之和, 故两圆外切, 如图,

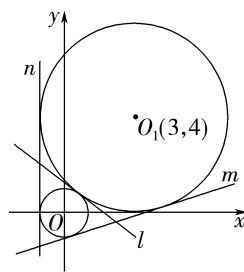
当切线为 l 时, 因为 $k_{OO_1} = \frac{4}{3}$,

所以 $k_l = -\frac{3}{4}$, 设方程为 $y = -\frac{3}{4}x + t (t > 0)$,

点 O 到 l 的距离 $d = \frac{|t|}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = 1$, 解得 $t = \frac{5}{4}$, 所以 l 的方

程为 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$;

当切线为 m 时, 设直线方程为 $kx + y + p = 0$, 其中 $p > 0, k < 0$,



$$\text{由题意得} \begin{cases} \frac{|p|}{\sqrt{1+k^2}}=1, \\ \frac{|3k+4+p|}{\sqrt{1+k^2}}=4, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k=-\frac{7}{24}, \\ p=\frac{25}{24}, \end{cases} \quad y=\frac{7}{24}x-\frac{25}{24};$$

当切线为 n 时,易知切线方程为 $x=-1$.]

11. 解: 存在. 设直线 l 的方程为 $y=x+b$,

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

因为以 AB 为直径的圆恰好经过原点,

所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$,

即 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0, x_1x_2 + (x_1+b)(x_2+b) = 0$,

所以 $2x_1x_2 + b(x_1+x_2) + b^2 = 0$.

$$\text{由} \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0, \\ y = x + b, \end{cases}$$

得 $x^2 + (x+b)^2 - 2x + 4(x+b) - 4 = 0$,

整理得 $2x^2 + (2b+2)x + b^2 + 4b - 4 = 0$,

由题意 $\Delta = (2b+2)^2 - 4 \times 2(b^2 + 4b - 4) > 0$, 即 $b^2 + 6b - 9 < 0$ (*).

$$\text{而 } x_1 + x_2 = -\frac{2b+2}{2} = -b-1, x_1x_2 = \frac{b^2+4b-4}{2},$$

所以 $b^2 + 4b - 4 + b(-b-1) + b^2 = 0$,

所以 $b=1$ 或 $b=-4$, 满足 (*) 式,

所以直线 l 的方程为 $y=x+1$ 或 $y=x-4$.

12. 解: (1) 依题意, 所求直线过圆心且与 $x-y+1=0$ 垂直, 易得圆心 $C(2, 1)$,

所以所求直线的方程为 $y-1=-(x-2)$, 即 $y=-x+3$.

(2) 圆心 $(2, 1)$ 到直线 $AB: x-y+1=0$ 的距离

$$d = \frac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}.$$

所以圆的半径 $r = \sqrt{d^2 + \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = 2$,

$$\text{所以 } \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 - 4m} = 2,$$

解得 $m=1$.

(3) 由题意知点 $P(4, 4)$ 在圆外,

① 当所求切线的斜率存在时, 设切线方程为 $y-4=k(x-4)$, 即 $kx-y-4k+4=0$,

由圆心到切线的距离等于半径 2,

$$\text{即 } \frac{|2k-1+4-4k|}{\sqrt{k^2+1}} = 2, \text{ 解得 } k = \frac{5}{12},$$

所以所求切线方程为 $5x-12y+28=0$.

② 当所求切线的斜率不存在时, 过 P 点的直线方程为 $x=4$, 圆心 C 到 $x=4$ 的距离为 2, 等于半径, 故直线 $x=4$ 是圆 C 的切线.

综上, 所求切线的方程为 $x=4$ 或 $5x-12y+28=0$.

课时作业(六十一)

1. D [把椭圆方程 $16x^2 + 4y^2 = 1$ 化为标准方程可得 $\frac{x^2}{\frac{1}{16}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$, 所以 $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{\sqrt{3}}{4}$,

$$\frac{x^2}{\frac{1}{16}} = 1, \text{ 所以 } a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

则长轴长 $2a = \frac{1}{2}$, 焦距 $2c = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 短轴长 $2b = \frac{1}{2}$, 离心率 $e =$

$$\frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}} = 2\sqrt{3}, \text{ 故选 D.]}$$

2. B [因为方程 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{t} = 1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆, 所以 $0 < t < 36$,

可得椭圆短轴长: $2\sqrt{t} \in (0, 12)$.

故选 B.]

3. B [根据题意可知,

$$a^2 = 2m, b^2 = 16, c^2 = 2m - 16,$$

$$\text{所以 } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{2m-16}{2m} = \frac{1}{9},$$

解得 $m=9$.

故选 B.]

4. C [因为椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$,

所以 $a=2, b=\sqrt{3}$,

则 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4-3} = 1$,

所以 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $|PF_1| + |PF_2| + |F_1F_2| = 2a + 2c = 6$.

故选 C.]

5. B [因为离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{3}$,

$$\text{解得 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{8}{9}, b^2 = \frac{8}{9}a^2,$$

A_1, A_2 分别为 C 的左、右顶点,

则 $A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B$ 为上顶点, 所以 $B(0, b)$.

所以 $\overrightarrow{BA_1} = (-a, -b), \overrightarrow{BA_2} = (a, -b)$,

因为 $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BA_2} = -1$,

所以 $-a^2 + b^2 = -1$, 将 $b^2 = \frac{8}{9}a^2$ 代入, 解得 $a^2 = 9, b^2 = 8$,

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

故选 B.]

6. C [由椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 可得 $F(-1, 0)$,

设 $P(x, y) (-2 \leq x \leq 2)$, 则 $\overrightarrow{OP} = (x, y), \overrightarrow{FP} = (x+1, y)$,

则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FP} = x^2 + x + y^2 = x^2 + x + 3\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{1}{4}x^2 +$

$$x + 3 = \frac{1}{4}(x+2)^2 + 2, -2 \leq x \leq 2,$$

当且仅当 $x=2$ 时, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FP}$ 取得最大值 6.]

7. A [点 $A(0, b)$, 设 $P(x_0, y_0), Q(-x_0, -y_0)$,

$$\text{则 } k_{AP} \cdot k_{AQ} = \frac{y_0-b}{x_0} \cdot \frac{y_0+b}{-x_0} = -\frac{y_0^2-b^2}{x_0^2} = -\frac{1}{4},$$

$$\text{又 } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \text{ 所以 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4},$$

$$\text{得 } e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选 A.]

8. ACD [圆柱的底面半径是 $\sqrt{2}$, 直径是 $2\sqrt{2}$, 所以椭圆的长轴

长 $2a = \frac{2\sqrt{2}}{\cos 45^\circ} = 4, a = 2$, 短轴长 $2b = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{2}$, 则 $c =$

$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2}$, 离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 以椭圆的中心为原点, 长轴与短轴所在直线分别为 y 轴、 x 轴建立平面直角坐标系 (图略), 可得椭圆的方程为 $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{2}=1$. 椭圆上的点到焦点的距离的最小值是 $a-c=2-\sqrt{2}$. 故选 ACD.]

9. CD [由椭圆 $C: \frac{x^2}{14+a}+\frac{y^2}{8-a}=1$,

可得 $\begin{cases} 14+a>0, \\ 8-a>0, \\ 14+a\neq 8-a, \end{cases}$ 可得 $a\in(-14,-3)\cup(-3,8)$, A 选项

错误;

若 C 的焦点在 x 轴上, 则 $14+a>8-a>0$, 可得 $a\in(-3,8)$, B 选项错误;

若 $a=\frac{3}{2}$, 则 C 的焦距为 $2\times\sqrt{14+\frac{3}{2}-8+\frac{3}{2}}=6$, C 选项正确;

若 $a=2$, 则 C 的离心率为 $\sqrt{1-\frac{8-2}{14+2}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$, D 选项正确.

故选 CD.]

10. BD [由椭圆的定义可得 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $|AF_2|+|BF_2|+|AB|=|AF_2|+|BF_2|+|AF_1|+|BF_1|=(|AF_2|+|AF_1|)+(|BF_2|+|BF_1|)=2a+2a=4a=20$, A 错误;

设圆 M 的半径为 r ,

则 $|MC_1|+|MC_2|=(13-r)+(3+r)=16>8=|C_1C_2|$,

所以 M 的轨迹是以 C_1, C_2 为焦点的椭圆,

且 $2a=16, 2c=8$,

所以 $a=8, c=4, b=\sqrt{a^2-c^2}=4\sqrt{3}$,

故所求动圆圆心 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$, B 正确;

根据题意, 作图如图所示,

易知 $|NM|=|NQ|$,

则 $|NP|+|NM|=6$,

即 $|NP|+|NQ|=6>|PQ|=4$,

故点 N 的轨迹是以 P, Q 为焦点且长轴长为 6 的椭圆,

设其方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,

则 $c=2, 2a=6$, 则 $a=3$,

故 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5}$,

则椭圆方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$, C 错误;

由椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, 得 $a=5, b=3, c=4$.

设 $|PF_1|=m, |PF_2|=n$,

所以 $m+n=10$. 在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由余弦定理可得

$(2c)^2=m^2+n^2-2mn\cos\angle F_1PF_2=(m+n)^2-2mn-2mn\cdot\frac{1}{3}$, 可得 $64=100-\frac{8}{3}mn$, 得 $mn=\frac{27}{2}$,

故 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}mn\sin\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}\times\frac{27}{2}\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$, D 正确.]

11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ [由题意知, 直线 $2x+y-2=0$ 过点 $(1,0), (0,2)$,

代入椭圆方程得 $\begin{cases} 0-n=1, \\ 4m-0=1, \end{cases}$ 解得 $m=\frac{1}{4}, n=-1$,

所以椭圆方程为 $\frac{y^2}{4}+x^2=1$,

所以 $a=2, b=1, c=\sqrt{3}$,

所以离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.]

12. $3\sqrt{3}$ [由题意知, $a=5, b=3, c=\sqrt{25-9}=4$,

所以 $|\overrightarrow{PF_1}|+|\overrightarrow{PF_2}|=10$,

因为 $\cos\langle\overrightarrow{PF_1}, \overrightarrow{PF_2}\rangle=\frac{\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}}{|\overrightarrow{PF_1}||\overrightarrow{PF_2}|}=\frac{1}{2}$,

且 $0^\circ<\langle\overrightarrow{PF_1}, \overrightarrow{PF_2}\rangle<180^\circ$,

所以 $\angle F_1PF_2=60^\circ$,

由余弦定理可得 $\cos\angle F_1PF_2$

$=\frac{|\overrightarrow{PF_1}|^2+|\overrightarrow{PF_2}|^2-|F_1F_2|^2}{2|\overrightarrow{PF_1}||\overrightarrow{PF_2}|}$

$=\frac{(|\overrightarrow{PF_1}|+|\overrightarrow{PF_2}|)^2-2|\overrightarrow{PF_1}||\overrightarrow{PF_2}|-64}{2|\overrightarrow{PF_1}||\overrightarrow{PF_2}|}$

$=\frac{1}{2}$,

解得 $|\overrightarrow{PF_1}||\overrightarrow{PF_2}|=12$,

则 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|\sin\angle F_1PF_2$

$=\frac{1}{2}\times 12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.]

13. 解: (1) 由题意得 $\frac{|BF|}{|AB|}=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$

$4a^2=3(b^2+a^2)\Rightarrow a^2=3b^2$,

所以椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(2) 由 (1) 可知椭圆的方程为 $x^2+3y^2=a^2$, 由题意易知直线 l 的斜率存在且不为 0, 设直线 l 的方程为 $y=kx+m(k\neq 0)$,

联立 $\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2+3y^2=a^2, \end{cases}$ 得 $(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-a^2=0$,

由 $\Delta=36k^2m^2-4(1+3k^2)(3m^2-a^2)=0\Rightarrow 3m^2=a^2(1+3k^2)$, ①

$x_M=-\frac{3km}{3k^2+1}, y_M=kx_M+m=\frac{m}{1+3k^2}$, 由 $|OM|=|ON|$,

可得 $m^2=\frac{m^2(9k^2+1)}{(3k^2+1)^2}$, ②

由 $S_{\triangle OMN}=\sqrt{3}$ 可得 $\frac{1}{2}|m|\cdot\frac{|3km|}{1+3k^2}=\sqrt{3}$, ③

联立 ①②③ 可得 $k^2=\frac{1}{3}, m^2=4, a^2=6$,

故椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.

课时作业(六十二)

1. A [若 $\frac{x^2}{m+1}-\frac{y^2}{m+2}=1$ 为双曲线方程,

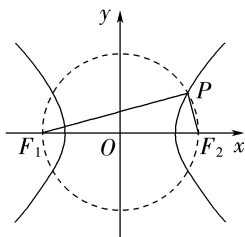
则 $(m+1)(m+2)>0$, 解得 $m>-1$ 或 $m<-2$,

又 $\{m|m>-1\} \not\subseteq \{m|m>-1 \text{ 或 } m<-2\}$,

故“ $m>-1$ ”是“ $\frac{x^2}{m+1} - \frac{y^2}{m+2} = 1$ 为双曲线方程”的充分不必要条件.

故选 A.]

2. D [如图,不妨设点 P 在 y 轴右侧,则 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$, ①



$$\text{已知 } |PF_1| + |PF_2| = \frac{5}{4} |F_1F_2| = \frac{5}{2} c, \text{ ②}$$

$$\text{联立 ① ② 解得 } |PF_1| = \frac{5}{4} c + a, |PF_2| = \frac{5}{4} c - a,$$

因为点 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上,

所以 $\triangle PF_1F_2$ 是直角三角形, 可得 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2$, 即 $\left(\frac{5}{4}c+a\right)^2 + \left(\frac{5}{4}c-a\right)^2 = 4c^2$, 整理

$$\text{得 } a^2 = \frac{7}{16}c^2, \text{ 则 } e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{7}}{7}.$$

故选 D.]

3. D [双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 虚半

$$\text{轴长为 } 2, \text{ 即 } b=2, e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{1+\frac{4}{a^2}} =$$

$$\sqrt{3}, \text{ 可得 } a=\sqrt{2}, c=\sqrt{6}, 2c=2\sqrt{6},$$

所以双曲线的焦距为 $2\sqrt{6}$.

故选 D.]

4. C [由题意得 $b=8$ 且 $\frac{8}{a} = \frac{4}{3}$, 所以 $a=6$,

所以 $||PF_1| - |PF_2|| = 2a = 12$, 则 $|PF_2| = 3$ 或 $|PF_2| = 27$.

当 $|PF_2| = 3$ 时, $|PF_1| + |PF_2| = 18 < |F_1F_2| = 20$, 故舍去;

当 $|PF_2| = 27$ 时, $|PF_1| + |PF_2| = 42 > |F_1F_2| = 20$, 满足题意.

故选 C.]

5. C [如图,由题意可知,点 P 必落在第四象限,

$$\angle F_1PF_2 = 90^\circ,$$

$$\text{设 } |PF_2| = m,$$

$$\angle PF_2F_1 = \theta_1,$$

$$\angle PF_1F_2 = \theta_2,$$

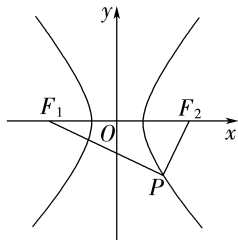
$$\text{由 } k_{PF_2} = \tan \theta_1 = 2,$$

$$\text{所以 } \sin \theta_1 = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

因为 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, 所以 $k_{PF_1} \cdot k_{PF_2} = -1$, 则 $k_{PF_1} = -\frac{1}{2}$, 即

$$\tan \theta_2 = \frac{1}{2}, \sin \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ 由正弦定理可得, } |PF_1| : |PF_2| :$$

$$|F_1F_2| = \sin \theta_1 : \sin \theta_2 : \sin 90^\circ = 2 : 1 : \sqrt{5},$$



则由 $|PF_2| = m$, 得 $|PF_1| = 2m, |F_1F_2| = 2c = \sqrt{5}m$,

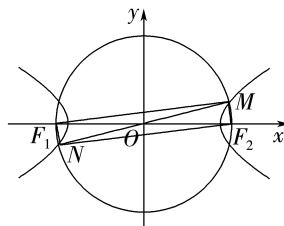
$$\text{由 } S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot m = 8, \text{ 得 } m = 2\sqrt{2},$$

$$\text{则 } |PF_2| = 2\sqrt{2}, |PF_1| = 4\sqrt{2}, |F_1F_2| = 2c = 2\sqrt{10}, c = \sqrt{10},$$

由双曲线的定义, 可得 $|PF_1| - |PF_2| = 2a = 2\sqrt{2}$, 所以 $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{c^2 - a^2} = 2\sqrt{2}$,

所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$. 故选 C.]

6. C [以 F_1F_2 为直径的圆与双曲线在第一、三象限的交点分别为 M, N , 如图所示,



设 $|MF_2| = n, |MF_1| = m$, 由 M 在以 F_1F_2 为直径的圆上可得 $MF_1 \perp MF_2$,

$\therefore |MF_1|^2 + |MF_2|^2 = |F_1F_2|^2$, 四边形 MF_1NF_2 为矩形,

则 $|MN| = |F_1F_2| = 2c$,

$$|MF_2| = |F_1N| = n.$$

由双曲线 $C: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$, 得 $a^2 = 3, b^2 = 1, c^2 = a^2 + b^2 = 4$,

$$\therefore m^2 + n^2 = 16, \text{ 又由双曲线的定义有 } m - n = 2a = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore m^2 - 2mn + n^2 = 12, \text{ 得 } mn = 2,$$

$$\therefore (m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2 = 16 + 4 = 20,$$

$$\text{即 } m+n = 2\sqrt{5}, \text{ 而 } |MN| = |F_1F_2| = 2c = 4,$$

$$\therefore m+n+|MN| = 4+2\sqrt{5},$$

$$\therefore \triangle MF_1N \text{ 的周长为 } 4+2\sqrt{5}.$$

故选 C.]

7. AD [已知双曲线 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$,

$$\text{则 } a=3, b=4, c=\sqrt{9+16}=5.$$

对于 A, 双曲线的实轴长为 6,

故选项 A 正确;

对于 B, 双曲线的焦距为 10,

故选项 B 错误;

对于 C, 双曲线的离心率为 $\frac{5}{3}$,

故选项 C 错误;

对于 D, 双曲线的焦点到渐近线的距离为 $\frac{\frac{4}{3} \times 5}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}} = 4$, 故

选项 D 正确. 故选 AD.]

8. BCD [对于 A, 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的渐近线

$$\text{方程为 } y = \pm \frac{b}{a}x,$$

当 $a=2, b=\sqrt{3}$ 时, 双曲线的渐近线方程是 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$, 故 A

错误;

对于 B, 因为点 $(2, 4\sqrt{2})$ 在 C 上, 则 $\frac{4}{a^2} - \frac{32}{b^2} = 1$, 得 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{4} + 8 > 8$,

所以双曲线的离心率 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 3$, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$, 若 $PF_1 \perp PF_2$,

则 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2 = 4c^2$,

即 $(|PF_1| - |PF_2|)^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 4c^2$,

即 $4a^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 4c^2$,

得 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 2(c^2 - a^2) = 2b^2$,

所以 $S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2| = b^2$, 故 C 正确;

对于 D, 若 C 为等轴双曲线, 则 $a = b$, 从而 $|F_1F_2| = 2c = 2\sqrt{2}a$,

若 $|PF_1| = 3|PF_2|$, 结合 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$, 则 $|PF_2| = a$, $|PF_1| = 3a$,

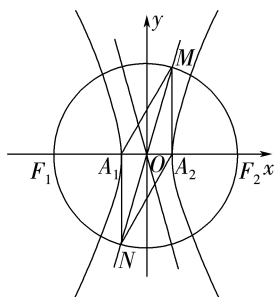
在 $\triangle F_1PF_2$ 中, 由余弦定理, 得

$$\cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = \frac{9a^2 + a^2 - 8a^2}{2 \times 3a \times a} = \frac{1}{3}, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 BCD.]

9. **ACD** [根据双曲线和圆的对称性, 知四边形 A_1MA_2N 为平行四边形, 因为 $\angle NA_1M = \frac{5\pi}{6}$, 所以 $\angle A_1MA_2 = \frac{\pi}{6}$. 故 A 正确.]

不妨设 $M(x_0, \frac{b}{a}x_0)$ ($x_0 > 0$), 根据 $|OM| = c$, 得 $x_0^2 + \frac{b^2}{a^2}x_0^2 = c^2$, 解得 $x_0 = a$,



故 $M(a, b)$, $N(-a, -b)$, 所以 $\angle MA_2A_1 = \frac{\pi}{2}$, 又因为

$$\angle A_1MA_2 = \frac{\pi}{6},$$

所以 $|MA_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}|MA_1|$, 故 B 错误.

在 $\text{Rt} \triangle MA_1A_2$ 中, $|MA_2| = b$, $|A_1A_2| = 2a$, $\angle A_1MA_2 = \frac{\pi}{6}$,

$$\text{所以 } \tan \angle A_1MA_2 = \frac{|A_1A_2|}{|MA_2|} = \frac{2a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{即 } \frac{b}{a} = 2\sqrt{3},$$

故 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{13}$, 故 C 正确.

当 $a = \sqrt{2}$ 时, $b = 2\sqrt{6}$, 则 $S_{\text{平行四边形 } NA_1MA_2} = 2S_{\triangle MA_1A_2} = 2 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 8\sqrt{3}$, 故 D 正确. 故选 ACD.]

10. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ [依题意, 设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$),

$$\text{由题意得 } \begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{3}{4}, \\ c = 5, \\ c^2 = a^2 + b^2, \end{cases}$$

解得 $a = 4, b = 3$, 所以双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.]

11. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ($x \geq 3$) [由双曲线的定义, 知点 M 的轨迹是双曲线的右支, 且 $c = 5, a = 3$, 所以 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 4$, 故点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ($x \geq 3$).]

12. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ [设 $P(x, y)$, 因为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$,

$$\text{所以 } y^2 = \frac{x^2}{4} - 1,$$

$$\text{所以 } |PA| = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(x-3)^2 + \frac{x^2}{4} - 1} = \sqrt{\frac{5x^2}{4} - 6x + 8}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4}\left(x - \frac{12}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}},$$

因此当 $x = \frac{12}{5}$ 时, 满足 $x \geq 2$, $|PA|$ 取最小值, 最小值是

$$\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.]$$

课时作业(六十三)

1. **D** [抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线方程为 $x = -1$,

$\therefore$ 点 A 到焦点 F 的距离等于点 A 到准线的距离, 点 A 的横坐标是 4,

$\therefore$ 点 A 到焦点 F 的距离是 $4 + 1 = 5$.

故选 D.]

2. **A** [由题可得抛物线方程为 $x^2 = -\frac{1}{5}y$,

$$2p = \frac{1}{5}, \text{ 且开口向下,}$$

所以抛物线 $y = -5x^2$ 的准线方程为 $y = \frac{1}{20}$.

故选 A.]

3. **D** [因为抛物线 $C_1: y^2 = 2p_1x$ ($p_1 > 0$) 和 $C_2: x^2 = 2p_2y$ ($p_2 > 0$) 均经过点 $(4, 8)$, 所以 $8^2 = 2 \times 4p_1, 4^2 = 2 \times 8p_2$, 解得 $p_1 = 8, p_2 = 1$, 所以 $C_1: y^2 = 16x, C_2: x^2 = 2y$, 则抛物线 C_1 的焦点坐标为 $(4, 0)$, 抛物线 C_2 的焦点坐标为 $(0, \frac{1}{2})$, 所以抛物线 C_1 的焦点与抛物线 C_2 的焦点之间的距离为 $\sqrt{(4-0)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$. 故选 D.]

4. **C** [由抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$),

知准线方程为 $x = -\frac{p}{2}, F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$,

根据对称性得 $\frac{p}{2} + (-9) = 2 \times \left(-\frac{p}{2}\right)$,

因此 $p = 6$,

故 C 的方程为 $y^2=12x$.

故选 C.]

5. B [抛物线 $y^2=6x$ 的焦点为 $F(\frac{3}{2}, 0)$,

准线 $l: x = -\frac{3}{2}$.

设 $P(x_0, y_0) (x_0 > 0, y_0 > 0)$,

则 $Q(-\frac{3}{2}, y_0)$,

因为直线 QF 的倾斜角为 120° ,

所以 $k_{QF} = \frac{y_0}{-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}} = \frac{y_0}{-3} = -\sqrt{3}$,

即 $y_0 = 3\sqrt{3}$, 所以 $x_0 = \frac{y_0^2}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$,

所以 $|PF| = x_0 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = 6$.]

6. D [因为 F 为 $\triangle ABC$ 的重心,

故 $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

设点 A, B, C 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

因为抛物线 $y^2=8x$, F 为其焦点, 所以 $F(2, 0)$,

所以 $\overrightarrow{AF} = (2 - x_1, -y_1)$, $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, $\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$.

因为 $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$,

所以 $2 - x_1 = \frac{1}{3} (x_2 - x_1 + x_3 - x_1)$,

所以 $x_1 + x_2 + x_3 = 6$,

所以 $|\overrightarrow{AF}| + |\overrightarrow{BF}| + |\overrightarrow{CF}| = x_1 + x_2 + x_3 + 6 = 12$,

即 $|AF| + |BF| + |CF| = 12$.]

7. B [因为抛物线 $x^2=2py (p>0)$ 上的点 A 到抛物线焦点 F

距离的最小值为 1, 则 $\frac{p}{2} = 1$, 解得 $p = 2$,

所以抛物线方程为 $x^2=4y$, 当 $x=2$ 时, $y=1 < 3$,

因此点 $P(2, 3)$ 在抛物线 $x^2=4y$ 的上方.

过点 P 作 $PP' \perp$ 准线 l 于 P' , 交抛物线于点 Q , 连接 QF , 过点 A 作 $AA' \perp$ 准线 l 于 A' , 连接 PA' ,

如图, 显然 $|AP| + |AF| =$

$|AP| + |AA'| \geq |PA'| \geq |PP'| = |PQ| + |QP'| = |PQ| + |QF|$,

当且仅当点 A 与点 Q 重合时取等号, 所以 $(|AP| + |AF|)_{\min} =$

$|PP'| = 3 - (-1) = 4$.

故选 B.]

8. AB [对于 A, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} x = ty + 2, \\ y^2 = 8x, \end{cases}$ 得

$y^2 - 8ty - 16 = 0, \Delta = 64t^2 + 64 > 0$,

$\therefore y_1 + y_2 = 8t$, 又线段 AB 的中点为 $M(m, 2)$,

$\therefore \frac{y_1 + y_2}{2} = 4t = 2$, 解得 $t = \frac{1}{2}$, A 正确; 对于 B, $\because M(m, 2)$ 在

直线 $l: x = \frac{1}{2}y + 2$ 上, $\therefore m = 1 + 2 = 3$, B 正确; 对于 C, $\because$ 直

线 $l: x = \frac{1}{2}y + 2$ 过点 $(2, 0)$, 且点 $(2, 0)$ 为抛物线 $y^2=8x$ 的焦

点, $\therefore |AB| = x_1 + x_2 + 4 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) + 8 = 10$, C 错误; 对于 D,

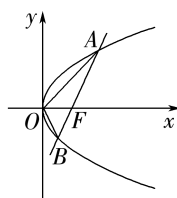
以 AB 为直径的圆的圆心为 M , 半径为 5, 设 $P(-2, 2)$, 连接 MP , 则 $|MP| = \sqrt{(-2-3)^2 + (2-2)^2} = 5$, $\therefore$ 点 $P(-2, 2)$ 在以 AB 为直径的圆上, D 错误, 故选 AB.]

9. ACD [抛物线的准线为 $x = -1$, 故 A 正确; 焦点到准线距离为 $p = 2$, 故 B 错误; 当横坐标为 2 时抛物线上位于第一象限内的点为 $(2, 2\sqrt{2})$, 此点位于点 $A(2, 1)$ 的上面, 故点 A 在抛物线内部, 由抛物线的定义知当直线 PA 垂直准线时, $|PA| + |PF|$ 取最小值, 即为 $x_A + \frac{p}{2} = 3$, 故 C 正确; 根据题意, 可得抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 设 $P(m, n)$, PF 的中点为 $B(x_1, y_1)$, 可得 $x_1 = \frac{1}{2}(1+m)$, 由抛物线的定义,

得 $|PF| = m + 1$, 则 $x_1 = \frac{1}{2}|PF|$, 即点 B 到 y 轴的距离等于以 PF 为直径的圆的半径, 因此, 以 PF 为直径的圆与 y 轴相切, 故 D 正确.

故选 ACD.]

10. BC [如图, 因为直线 $l: y = x - 2$ 经过抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 焦点在 x 轴上, 直线 $l: y = x - 2$ 与 x 轴的交点为 $(2, 0)$, 所以抛物线的焦点为 $F(2, 0)$, 故 $\frac{p}{2} = 2$, 所以 $p = 4$, A 错误.



联立 $\begin{cases} y = x - 2, \\ y^2 = 8x, \end{cases}$ 整理得 $x^2 - 12x + 4 = 0, \Delta = (-12)^2 - 16 = 128 > 0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = 12, x_1 x_2 = 4$,

故 $|AB| = x_1 + x_2 + p = 12 + 4 = 16$, B 正确.

线段 AB 的中点到 y 轴的距离为 $\frac{x_1 + x_2}{2} = 6$, C 正确.

由于 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + (x_1 - 2)(x_2 - 2) = 2x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = 8 - 24 + 4 = -12 \neq 0$, 故 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 不垂直, 所以 OA, OB 不垂直, D 错误, 故选 BC.]

11. $4\sqrt{2}$ [设 $P(x_0, y_0)$, 因为点 P 到准线 $x = -1$ 的距离为 9, 所以 $x_0 + 1 = 9$, 则 $x_0 = 8, y_0^2 = 4x_0 = 32$, 则 $y_0 = \pm 4\sqrt{2}$, 即点 P 到 x 轴的距离为 $4\sqrt{2}$.]

12. $\frac{4}{5}$ [由题意知, 圆 $(x-1)^2 + y^2 = 25$ 的圆心为 $F(1, 0)$, 故 $\frac{p}{2} = 1$, 即 $p = 2$, 所以抛物线方程为 $y^2 = 4x$.

由 $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 25, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 可得 $x^2 + 2x - 24 = 0$, 解得 $x = 4$ 或 $x = -6$ (舍去),

故 $A(4, \pm 4)$, 故直线 AF 的方程为 $y = \pm \frac{4}{3}(x-1)$, 即 $4x - 3y - 4 = 0$ 或 $4x + 3y - 4 = 0$,

故原点到直线 AF 的距离为 $d = \frac{|-4|}{5} = \frac{4}{5}$.]

13. $\frac{13\sqrt{2}}{2}$ [以孔顶为原点,建立如图所示的平面直角坐标系.]

设抛物线方程为 $x^2 = -2py$, 其中 $p > 0$,

由题意可得点 $(\frac{13}{2}, -8)$ 在抛物线上,

$$\text{则 } p = \frac{169}{64},$$

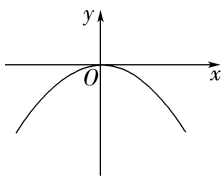
$$\text{即 } x^2 = -\frac{169}{32}y,$$

$$\text{当 } y = -4 \text{ 时, } x^2 = -\frac{169}{32} \times$$

$$(-4) = \frac{169}{8},$$

$$\text{即 } x = \pm \frac{13\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{则水面宽变为 } 2 \times \frac{13\sqrt{2}}{4} = \frac{13\sqrt{2}}{2} (\text{m}).]$$



课时作业(六十四)

1. A [设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

因为线段 PQ 的中点为 $M(4, 1)$,

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = 8, y_1 + y_2 = 2,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{4} - y_1^2 = 1, \\ \frac{x_2^2}{4} - y_2^2 = 1, \end{cases}$$

$$\text{两式相减可得 } \frac{x_1^2}{4} - \frac{x_2^2}{4} = y_1^2 - y_2^2,$$

$$\text{即 } \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{4} = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2),$$

$$\text{所以 } \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{1}{4}, \text{ 即 } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 1,$$

所以直线 l 的斜率为 1,

所以直线 l 的方程为 $y - 1 = x - 4$,

即 $y = x - 3$, 经检验符合题意. 故选 A.]

2. D [联立 $\begin{cases} y = kx - 1, \\ x^2 - y^2 = 1, \end{cases}$ 整理得 $(1 - k^2)x^2 + 2kx - 2 = 0$, 因为

直线 $y = kx - 1$ 与双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的右支交于不同的两点,

$$\text{所以 } \begin{cases} 1 - k^2 \neq 0, \\ \Delta = 4k^2 + 8(1 - k^2) > 0, \\ \frac{-2k}{1 - k^2} > 0, \\ \frac{-2}{1 - k^2} > 0, \end{cases}$$

解得 $1 < k < \sqrt{2}$, 所以实数 k 的取值范围为 $(1, \sqrt{2})$. 故选 D.]

3. ACD [由焦点 F 到准线的距离为 4,

可知 $p = 4$, 故 A 正确;

则抛物线的方程为 $y^2 = 8x$, 故 B 错误;

$$\text{则 } y_1^2 = 8x_1, y_2^2 = 8x_2,$$

若 $M(m, 2)$ 是线段 AB 的中点,

$$\text{则 } y_1 + y_2 = 4,$$

$$\therefore y_1^2 - y_2^2 = 8x_1 - 8x_2,$$

$$\text{即 } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{8}{y_1 + y_2} = \frac{8}{4} = 2,$$

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y = 2x - 4$, 故 C 正确;

又由 $y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2) - 8 = 4$, 得 $x_1 + x_2 = 6$,

$\therefore |AB| = |AF| + |BF| = x_1 + x_2 + 4 = 10$, 故 D 正确. 故选 ACD.]

4. BD [由题意, $a = 2, b = 1$. 对于 A, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$M(x_0, y_0), \text{ 则 } \frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1, \frac{x_2^2}{4} + y_2^2 = 1, \text{ 两式作差可得}$$

$$\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{4} = -(y_1 + y_2)(y_1 - y_2), \therefore \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} =$$

$$-\frac{x_1 + x_2}{4(y_1 + y_2)} = -\frac{x_0}{4y_0}, \text{ 则 } k_{AB} \cdot k_{OM} = -\frac{1}{4} \neq -1, \text{ 故 A 错}$$

误; 对于 B, 若点 M 的坐标为 $(1, \frac{1}{2})$, 则 $k_{AB} = -\frac{1}{2}$, 则直线

l 的方程为 $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x - 1)$, 即 $x + 2y - 2 = 0$, 经检验,

符合题意; 故 B 正确; 对于 C, 若直线 l 的方程为 $y = x + 1$,

则 $k_{OM} = -\frac{1}{4}$, 故 OM 所在直线的方程为 $y = -\frac{1}{4}x$, 很显然

点 M 的坐标不可能为 $(3, \frac{3}{4})$, 故 C 错误; 对于 D, 易知过椭

圆焦点的弦中, 通径最短, 为 $\frac{2b^2}{a} = 1$, 长轴最长, 为 4,

由直线 l 的斜率存在且不过原点, 得 $1 < |AB| < 4$, 故 D 正确. 故选 BD.]

5. $(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$ [把 $y = kx + 2$ 代入 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$, 消去 y 并整理

$$\text{得 } (2 + 3k^2)x^2 + 12kx + 6 = 0, \text{ 由题意得 } \Delta = (12k)^2 - 4 \times$$

$$(2 + 3k^2) \times 6 = 72k^2 - 48 < 0, \text{ 解得 } -\frac{\sqrt{6}}{3} < k < \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

故实数 k 的取值范围是 $(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$.]

6. 4 [设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

因为点 $P(2, 1)$ 是线段 AB 的中点,

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = 4, y_1 + y_2 = 2,$$

因为 A, B 为抛物线 $y^2 = 8x$ 上的点,

$$\text{所以 } y_1^2 = 8x_1, y_2^2 = 8x_2,$$

$$\text{两式相减得 } (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 8(x_1 - x_2),$$

$$\text{所以 } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 4, \text{ 则直线 } AB \text{ 的斜率为 4.}$$

经检验, 直线 AB 符合题意.]

7. 解: (1) 设焦点 $F(c, 0)$, 其到渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 的距离 $d =$

$$\frac{\frac{bc}{a}}{\sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2}} = b = \sqrt{3},$$

又因为双曲线经过点 $P(2\sqrt{2}, \sqrt{3})$, 所以 $\frac{8}{a^2} - \frac{3}{3} = 1$, 解得 $a =$

2,

$$\text{所以双曲线 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

因为 $M(4, 2)$ 是弦 AB 的中点,

$$\text{则 } \begin{cases} x_1 + x_2 = 8, \\ y_1 + y_2 = 4, \end{cases}$$

$$\text{由于 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{3} = 1, \\ \frac{x_2^2}{4} - \frac{y_2^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 两式相减得}$$

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4} = \frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{3},$$

$$\text{即 } \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{3(x_1+x_2)}{4(y_1+y_2)} = \frac{3}{2},$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的方程为 } y = \frac{3}{2}x - 4,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 4, \\ 3x^2 - 4y^2 = 12, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得 } 6x^2 - 48x + 76 = 0, \Delta = 48^2 -$$

$$4 \times 6 \times 76 = 480 > 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = 8, x_1 x_2 = \frac{38}{3},$$

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} \times \sqrt{64 - 4 \times \frac{38}{3}} = \frac{\sqrt{390}}{3}.$$

$$8. \text{解: (1) 已知椭圆 } C \text{ 的离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{4}, \text{ 即 } a^2 = \frac{4}{3}b^2, \text{ ①}$$

因为以原点为圆心、椭圆的短半轴长为半径的 $\odot E$ 与直线 $x - y + \sqrt{6} = 0$ 相切,

$$\text{所以 } b = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{3}, \text{ ②}$$

$$\text{联立 ①②, 解得 } a^2 = 4, b^2 = 3,$$

$$\text{则椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 不妨设直线 MN 的方程为 $y = k(x - 1)$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = k(x - 1), \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并整理得 } (3 + 4k^2)x^2 - 8k^2x +$$

$$4k^2 - 12 = 0, \Delta = 144k^2 + 144 > 0,$$

$$\text{则 } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3 + 4k^2}, \\ x_1 x_2 = \frac{4k^2 - 12}{3 + 4k^2}, \end{cases}$$

$$\text{此时 } y_1 y_2 = k(x_1 - 1) \cdot k(x_2 - 1) = \frac{-9k^2}{3 + 4k^2},$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{-5k^2 - 12}{3 + 4k^2} = -2,$$

$$\text{解得 } k^2 = 2, \text{ 即 } k = \pm\sqrt{2},$$

$$\text{此时 } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{16}{11}, \\ x_1 x_2 = \frac{-4}{11}, \end{cases}$$

$$\text{则 } |MN| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$$

$$= \sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{16}{11}\right)^2 + \frac{16}{11}} = \frac{36}{11},$$

$$\text{又点 } O \text{ 到直线 } MN \text{ 的距离 } d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{故 } \triangle MON \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \times \frac{36}{11} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{6\sqrt{6}}{11}.$$

阶段检测(十四)

$$1. \text{C} \quad [\text{已知抛物线 } C: y = \frac{1}{8}x^2,$$

$$\text{即 } x^2 = 8y,$$

又 C 上一点 P 到焦点的距离为 5,

$$\text{则 } y_P + 2 = 5,$$

$$\text{即 } y_P = 3,$$

则点 P 的纵坐标为 3.

故选 C.]

$$2. \text{C} \quad [\text{设 } F_1(0, -4), F_2(0, 4), P(-6, 4),$$

$$\text{则 } |F_1 F_2| = 2c = 8,$$

$$|PF_1| = \sqrt{6^2 + (-4 - 4)^2} = 10,$$

$$|PF_2| = \sqrt{6^2 + (4 - 4)^2} = 6,$$

$$\text{则 } 2a = |PF_1| - |PF_2| = 10 - 6 = 4,$$

$$\text{则 } e = \frac{2c}{2a} = \frac{8}{4} = 2.$$

故选 C.]

$$3. \text{A} \quad [\text{椭圆 } C: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0) \text{ 的焦点在 } x \text{ 轴上, 可知 } 0 <$$

$b < \sqrt{2}$, 长轴长为 $2\sqrt{2}$, 所以 B 不正确;

椭圆的焦距为 $2\sqrt{2 - b^2}$, 所以 D 不正确;

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, 可得 } \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } y = \frac{\sqrt{2}}{2}b \in (0, 1) \text{ 或 } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}b$$

$$\in (-1, 0),$$

所以 P 在椭圆外,

所以 A 正确, C 错误.

故选 A.]

$$4. \text{B} \quad [\because \text{双曲线 } C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1,$$

$$\therefore a^2 = 4, b^2 = 36, c^2 = 40, c = 2\sqrt{10},$$

$\therefore$ 右焦点坐标为 $(2\sqrt{10}, 0)$, 其中一条渐近线方程为 $y = 3x$,

$$\therefore \text{右焦点到其渐近线的距离为 } \frac{|6\sqrt{10} - 0|}{\sqrt{9 + 1}} = 6.$$

故选 B.]

$$5. \text{A} \quad [\text{由已知得 } e_1 = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}, e_2 = \frac{\sqrt{4 - 1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 因为 } e_2 =$$

$$\sqrt{3}e_1, \text{ 所以 } \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}, \text{ 解得 } a = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \text{ 故选 A.}]$$

$$6. \text{C} \quad [\text{将直线方程与椭圆方程联立得}$$

$$\begin{cases} y = x + m, \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 可得 } 4x^2 + 6mx + 3m^2 - 3 = 0, \text{ 因为直线}$$

与椭圆相交于 A, B 两点, 则 $\Delta = 36m^2 - 4 \times 4(3m^2 - 3) > 0$,

解得 $-2 < m < 2$. 易知 $F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0)$, 因为 $\triangle F_1AB$ 面积是 $\triangle F_2AB$ 面积的 2 倍, 所以点 F_1 到直线 AB 的距离是

点 F_2 到直线 AB 的距离的 2 倍, 即 $\frac{|-\sqrt{2} + m|}{\sqrt{2}} = 2 \times$

$$\frac{|\sqrt{2} + m|}{\sqrt{2}}, \text{ 解得 } m = -\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ 或 } m = -3\sqrt{2} (\text{舍去}), \text{ 故选 C.}]$$

$$7. \text{ABC} \quad [\text{对于选项 A, 由 } C_1: 4x^2 + 3y^2 = 48,$$

$$\text{可得 } C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

知曲线 C_1 为椭圆,其焦点在 y 轴上,且长轴长为 8,故选项 A 正确;

对于选项 B,由 $C_2: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 可得双曲线 C_2 的焦点在 x 轴上,其渐近线方程为 $x \pm \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$,

即 $y = \pm\sqrt{3}x$,故选项 B 正确;

对于选项 C,由 $C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$,

可得 $e_1 = \frac{\sqrt{16-12}}{4} = \frac{1}{2}$,

由 $C_2: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$,

可得 $e_2 = \frac{\sqrt{1+3}}{1} = 2$,故 C_1 与 C_2 的离心率互为倒数,故选项 C 正确;

对于选项 D,因为曲线 C_1, C_2 的焦点位置不同,故焦点坐标不可能相同,故选项 D 错误.

故选 ABC.]

8. ABD [对于 A,设曲线上的动点 $P(x, y)$,则 $x > -2$ 且 $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \times |x-a| = 4$,

因为曲线过坐标原点,故 $\sqrt{(0-2)^2 + 0^2} \times |0-a| = 4$,解得 $a = -2$,故 A 正确.

对于 B,曲线方程为 $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \times |x+2| = 4$,而 $x > -2$,故 $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \times (x+2) = 4$.

当 $x = 2\sqrt{2}, y = 0$ 时, $\sqrt{(2\sqrt{2}-2)^2} \times (2\sqrt{2}+2) = 8-4=4$,故点 $(2\sqrt{2}, 0)$ 在曲线 C 上,故 B 正确.

对于 C,由曲线的方程可得 $y^2 = \frac{16}{(x+2)^2} - (x-2)^2$,取 $x = \frac{3}{2}$,

则 $y^2 = \frac{64}{49} - \frac{1}{4}$,而 $\frac{64}{49} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{64}{49} - \frac{5}{4} = \frac{256-245}{49 \times 4} > 0$,故此时 $y^2 > 1$,故 C 错误.

对于 D,当点 (x_0, y_0) 在曲线上时,由 C 的分析可得 $y_0^2 = \frac{16}{(x_0+2)^2} - (x_0-2)^2 \leq \frac{16}{(x_0+2)^2}$,

故 $-\frac{4}{x_0+2} \leq y_0 \leq \frac{4}{x_0+2}$,故 D 正确.

故选 ABD.]

9. $\frac{\pi}{4}$ [由抛物线 $C: y^2 = 4x$,可得准线方程为 $x = -\frac{p}{2} = -1$,

故 $M(-1, 0)$,

结合图象可得当直线 MA 与 C 相切时, $\angle AMO$ 取得最大值,

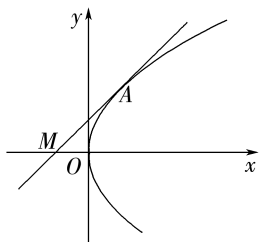
设此时直线 MA 的方程为 $x = my - 1$,

联立 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ x = my - 1, \end{cases}$

得 $y^2 - 4my + 4 = 0, \Delta = 16m^2 - 16 = 0$,

解得 $m = \pm 1$,即直线 MA 的斜率为 $\frac{1}{m} = \pm 1$,倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$

或 $\frac{3\pi}{4}$,



所以 $\angle AMO$ 的最大值为 $\frac{\pi}{4}$.]

10. $\frac{3}{2}$ [由题可知 A, B, F_2 三点横坐标相等,设 A 在第一象

限,将 $x = c$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$,即 $A(c, \frac{b^2}{a}), B(c, -\frac{b^2}{a})$,故 $|AB| = \frac{2b^2}{a} =$

10, $|AF_2| = \frac{b^2}{a} = 5$,

又 $|AF_1| - |AF_2| = 2a$,得 $|AF_1| = |AF_2| + 2a = 2a + 5 =$

13,解得 $a = 4$,代入 $\frac{b^2}{a} = 5$ 得 $b^2 = 20$,

故 $c^2 = a^2 + b^2 = 36$,即 $c = 6$,

所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.]

11. 解:设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

联立直线与抛物线的方程,

可得 $\begin{cases} y = x - 3, \\ x^2 = -8y, \end{cases}$

消去 y 并整理,得 $x^2 + 8x - 24 = 0, \Delta > 0$,

由根与系数的关系,得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -8, \\ x_1 x_2 = -24. \end{cases}$

因为点 A, B 在直线 l 上,所以 $\begin{cases} y_1 = x_1 - 3, \\ y_2 = x_2 - 3. \end{cases}$

(1) $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = 8\sqrt{5}$.

因为 $\frac{x_1 + x_2}{2} = -4$,

$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{x_1 + x_2 - 6}{2} = -7$,

所以线段 AB 的中点坐标为 $(-4, -7)$.

(2) $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ 不成立,理由如下:因为 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 +$

$y_1 y_2 = x_1 x_2 + (-\frac{1}{8} x_1^2) \cdot (-\frac{1}{8} x_2^2) = x_1 x_2 +$

$\frac{1}{64} (x_1 x_2)^2 = -24 + 9 = -15 \neq 0$,所以 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ 不成立.

12. 解:法一:联立 $\begin{cases} y = x + m, \\ x^2 + 2y^2 = 4, \end{cases}$

可得 $3x^2 + 4mx + 2m^2 - 4 = 0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,则 $\Delta = 16m^2 - 12(2m^2 - 4) > 0$,

即 $-\sqrt{6} < m < \sqrt{6}$.

由根与系数的关系得 $x_1 + x_2 = \frac{-4m}{3}, x_1 x_2 = \frac{2m^2 - 4}{3}$,

所以 AB 的中点为 $M(-\frac{2m}{3}, \frac{m}{3})$.

若 $|EA| = |EB|$,则 $EM \perp AB$,

即 $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$,设 $x_1 > x_2$,

则 $y_1 > y_2, \overrightarrow{EM} = (-\frac{2m}{3} - 1, \frac{m}{3})$,

$\overrightarrow{BA} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$,

$x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$

$= \sqrt{(\frac{-4m}{3})^2 - 4 \times \frac{(2m^2 - 4)}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{6 - m^2}$,

$$\text{即 } \overrightarrow{BA} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{6-m^2}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{6-m^2} \right),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{6-m^2} \left(-\frac{m}{3} - 1 \right) = 0,$$

解得 $m = -3$ 或 $m = \pm\sqrt{6}$.

因为此时不满足 $\Delta > 0$, 所以不存在直线 l 满足 $|EA| = |EB|$.

法二: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{2} = 1, \frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{2} = 1,$$

$$\text{所以 } |AE|^2 = (x_1 - 1)^2 + y_1^2 = (x_1 - 1)^2 + 2 \left(1 - \frac{x_1^2}{4} \right) =$$

$$\frac{x_1^2}{2} - 2x_1 + 3 = \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + 1.$$

$$\text{同理可得 } |BE|^2 = \frac{1}{2}(x_2 - 2)^2 + 1.$$

因为 $-2 \leq x_1 \leq 2, -2 \leq x_2 \leq 2$, 二次函数 $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 1$

在 $[-2, 2]$ 上单调递减, 所以不存在不同的两个值 x_1, x_2 , 使它们的函数值相等, 即不存在点 A, B 满足 $|EA| = |EB|$, 所以不存在直线 l 满足 $|EA| = |EB|$.

课时作业(六十五)

1. C [根据题意, 高一、高二、高三年级学生人数之比为 4 : 4 : 5,

所以从高三年级抽取的学生人数为

$$\frac{5}{4+4+5} \times 260 = 100. \text{ 故选 C.}]$$

2. A [由题意可得成绩在 $[13, 15)$ 内的频率为 $1 - 0.08 - 0.32 - 0.38 = 0.22$,

又本次赛车中, 共 50 名参赛选手,

所以这 50 名选手中获奖的人数为 $50 \times 0.22 = 11$.

故选 A.]

3. D [对于 A, 甲的数据分析核心素养指标值为 5, 乙的为 4, 故 A 正确; 对于 B, 乙的数学运算核心素养指标值为 5, 数学抽象核心素养指标值为 3, 故 B 正确; 对于 C, 甲的六大数学核心素养指标值均为 4 或 5, 乙的六大数学核心素养指标值有 3, 4, 5, 故甲的波动性较小, 故 C 正确; 对于 D, 甲、乙在数学建模核心素养上的指标值差为 1, 甲、乙在直观想象核心素养上的指标值差为 2, 故 D 错误. 故选 D.]

4. D [由题意, 高二年级女生有 $2\,000 \times 0.19 = 380$ (名), 即 $x = 380$,

则高三年级女生有 $y = 2\,000 - 373 - 380 - 377 - 370 - 250 = 250$ (名),

则用分层随机抽样的方法在全校抽取 64 名学生, 则应在高三年级抽取的女生人数为 $\frac{250}{2\,000} \times 64 = 8$. 故选 D.]

5. B [设样本中男生身高的平均数为 $\bar{x}$, 女生身高的平均数为 $\bar{y}$, 则 $\bar{x} = 172, \bar{y} = 160$,

$$\text{所以样本平均数 } \bar{W} = \frac{350}{350+250} \bar{x} + \frac{250}{350+250} \bar{y} = \frac{350}{350+250} \times 172 +$$

$$\frac{250}{350+250} \times 160 = 167 \text{ (cm)},$$

故该校高一学生的平均身高为 167 cm.

故选 B.]

6. A [由题意得, 抽取的 100 人中, 男生有 60 人, 女生有 40 人, 由抽取的样本中男生身高的平均数为 160, 女生身高的平均数为 155,

可得这 100 名学生的平均身高为

$$\frac{60 \times 160 + 40 \times 155}{100} = 158,$$

又抽取的样本中男生身高的平均数和方差分别为 160 和 4,

女生身高的平均数和方差分别为 155 和 3,

所以这 100 名学生身高的方差为

$$\frac{60}{100} \times [4 + (160 - 158)^2] + \frac{40}{100} \times [3 + (155 - 158)^2] = 9.6,$$

所以估计该校学生身高的总体方差是 9.6.

故选 A.]

7. ACD [高一、高二、高三的人数比例为 4 : 3 : 3, 分层随机抽样时各层抽取的样本数与总体比例一致,

设高一、高二、高三抽取的样本数分别为 $4k, 3k, 3k$ (k 为比例系数),

已知高一年级抽到 80 人, 即 $4k = 80$,

解得 $k = 20$,

高二年级抽取人数为 $3k = 3 \times 20 = 60$, 故选项 A 正确;

高三年级抽取人数为 $3k = 60$, 选项 B 错误;

总样本数 $n = 80 + 60 + 60 = 200$, 选项 C 正确;

抽取的高二与高三人数之和为 $60 + 60 = 120$, 比高一多 $120 - 80 = 40$, 选项 D 正确.

故选 ACD.]

8. ABD [对于选项 A, 从 2023 年 10 月到 2024 年 4 月, 这 7 个月的制造业采购经理指数 (PMI) 按从小到大的顺序为 49.0%, 49.1%, 49.2%, 49.4%, 49.5%, 50.4%, 50.8%, 因为 $7 \times 75\% = 5.25$,

所以第 75 百分位数为 50.4%, 故 A 正确;

对于选项 B, 极差为 $50.8\% - 49.0\% = 1.8\%$, 故 B 正确;

对于选项 C, 制造业采购经理指数 (PMI) 有升有降, 故 C 错误;

对于选项 D, 2024 年 3 月到 2024 年 4 月, PMI 大于 50%, 经济处于扩张活跃的状态, 故 D 正确. 故选 ABD.]

9. ABD [依题意, $(0.005 + 0.010 + 0.020 + a + 0.025 + 0.010) \times 10 = 1$,

解得 $a = 0.030$, 故 A 选项正确;

根据频率分布直方图, $90 - 50 = 40, 100 - 40 = 60$,

所以极差介于 40 分至 60 分之间, 故 B 选项正确;

因为 90 分以上的频率为 0.1,

所以 2 000 名考生中约有 $2\,000 \times 0.1 = 200$ (名) 成绩优秀, 故 C 选项错误;

成绩介于 70 分至 90 分之间的频率为 $0.3 + 0.25 = 0.55$,

所以估计有一半以上的考生的成绩介于 70 分至 90 分之间, 故 D 选项正确.

故选 ABD.]

10. B 6 [由题图可知女生人数为 60, 则男生人数为 40,

样本中 A 层的人数为 $9 + 40 \times 10\% = 13$;

样本中 B 层的人数为 $24 + 40 \times 30\% = 36$;

样本中 C 层的人数为 $15 + 40 \times 25\% = 25$;

样本中 D 层的人数为 $9 + 40 \times 20\% = 17$;

样本中 E 层的人数为 $3 + 40 \times 15\% = 9$.

故样本中 B 层的人数最多.

样本中 E 层的男生人数为 $40 \times 15\% = 6$.]

11. 0.01 [因为样本中分数低于60分的有15人,
所以样本中分数不低于60分的有 $100-15=85$ (人),
由频率分布直方图可知,样本中分数不低于60分的频率为
 $0.25+0.3+0.2+10a=0.75+10a$,所以 $100\times(0.75+10a)=85$,
解得 $a=0.01$.]

课时作业(六十六)

1. D [由已知得 $a=\frac{1}{10}\times(15+17+14+10+15+17+17+16+14+12)=14.7$,将这10名工人生产的件数按从小到大的顺序排列,得第5个数据和第6个数据都是15,
所以 $b=\frac{1}{2}\times(15+15)=15$,又 $c=17$,所以 $c>b>a$. 故选D.]
2. D [$\because$ 样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 的方差为3,
 $\therefore 2x_1-1, 2x_2-1, \dots, 2x_{10}-1$ 的方差为 $2^2\times 3=12$.
故选D.]
3. C [将数据按从小到大的顺序排列可得2,4,5,7,7,8,9,10,
 $\therefore 8\times 75\%=6$,
 $\therefore$ 这组数据的75%分位数为 $\frac{8+9}{2}=8.5$.
故选C.]
4. A [$\because$ 一组样本数据16, x , 14, 15, 13的平均数为15,
 $\therefore \frac{1}{5}(16+x+14+15+13)=15$,
解得 $x=17$,
 $\therefore$ 该组样本数据的方差为
 $s^2=\frac{1}{5}[(16-15)^2+(17-15)^2+(14-15)^2+(15-15)^2+(13-15)^2]=2$.
故选A.]
5. B [成绩按从小到大排列为8, 9, 12, 12, 13, 16, 16, 16, 18, 20,
对于A选项,出现次数最多的数为16,故A选项错误;
对于B选项,平均数为 $\frac{1}{10}(8+9+12+12+13+16+16+16+18+20)=14$,故B选项正确;
对于C选项,中位数为 $\frac{13+16}{2}=14.5$,故C选项错误;
对于D选项,由 $10\times 0.85=8.5$,
得这组数据的第85百分位数为第9位,为18,故D选项错误.
故选B.]
6. C [对于A,由频率分布直方图可得 $(0.01+n+0.035+m+0.01)\times 10=1$,又 $m=2n$,
解得 $n=0.015, m=0.03$,故A正确;
对于B,满意度计分的众数为最高矩形底边中点的横坐标,为75分,故B正确;
对于C,满意度计分的平均分约为 $(55\times 0.01+65\times 0.015+75\times 0.035+85\times 0.03+95\times 0.01)\times 10=76.5$,故C错误;
对于D,前两组的频率之和为0.25,所以满意度计分的第25百分位数约为70分,故D正确.
故选C.]
7. AC [题图1的频率分布直方图是对称的,平均数=中位数=众数,A正确;

- 题图2的众数最小,右拖尾平均数大于中位数,B错误,C正确;
题图3的左拖尾众数最大,平均数小于中位数,D错误.
故选AC.]
8. ACD [由甲队每场比赛平均失球数是1.5,乙队每场比赛平均失球数是2.1,
说明甲队每场比赛平均失球数比乙队每场比赛平均失球数少,
所以平均说来甲队比乙队防守技术好,故A正确;
甲队全年比赛失球个数的标准差为1.1,乙队全年比赛失球个数的标准差是0.4,
说明甲队全年比赛失球个数的标准差较大,
所以甲队的起伏较大,故B错误;
甲队全年比赛失球个数的标准差为1.1,乙队全年比赛失球个数的标准差是0.4,
说明甲队全年比赛失球个数的标准差较大,
所以甲队的表现时好时坏,故C正确;
乙队的平均失球数多,全年失球个数的标准差很小,
说明乙队的表现较稳定,经常失球,故D正确.
故选ACD.]
9. ABC [选项A,A班该月平均每天产生的饮料瓶个数估计为
 $10\times(15\times 0.005+25\times 0.015+35\times 0.030+45\times 0.020+55\times 0.025+65\times 0.005)=41$,故选项A正确;
选项B,由 $10\times(0.005+0.020+m+0.020+0.015+0.015)=1$,得 $m=0.025$,故选项B正确;
选项C, $\because (0.005+0.020+0.025+0.020)\times 10=0.7<0.75$,
 $(0.005+0.020+0.025+0.020+0.015)\times 10=0.85>0.75$,
 $\therefore$ B班5月份产生饮料瓶数的第75百分位数 x 位于[50, 60)内,
 $\therefore 0.7+(x-50)\times 0.015=0.75$,解得 $x=\frac{160}{3}$,故选项C正确;
选项D,A班和B班5月份产生饮料瓶数在[40,50)内的频率均为 $0.020\times 10=0.2$,
故该校学生5月份产生饮料瓶数在[40,50)内的频率也为0.2,
 $\therefore 1\,000\times 0.2=200$,
 $\therefore$ 该校约有200人5月份产生饮料瓶数在[40,50)内,故选项D错误. 故选ABC.]
10. 1 [将成绩从小到大排列为110, 120, 120, 122, 130, 130, 130, 138,
 $\therefore$ 该组成绩的中位数为 $\frac{122+130}{2}=126$,
平均数为
 $\frac{138+130\times 3+122+120\times 2+110}{8}=125$,
 $\therefore$ 该组成绩的中位数与平均数之差为 $126-125=1$.]
11. 27 [已知梨树单株产量分别为24, 27, 29, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 40, 41, 43, 45, 47, 50,
因为样本容量为15,所以 $15\times 10\%=1.5$,
则第2个数27即为10%分位数,
所以估计需重点养护的梨树单株产量的最大值为27千克.]

12.3 [由题意可得, $1.966 = \frac{800}{2\,000} \times [1 + (2.7 - 3)^2] + \frac{600}{2\,000} \times [2 + (3.1 - 3)^2] + \frac{600}{2\,000} \times [s_3^2 + (3.3 - 3)^2]$,
解得 $s_3^2 = 3$.]

课时作业(六十七)

1. B [观察题干图, 可知人体脂肪含量与年龄正相关, 且脂肪含量的中位数小于 20%.]

2. D [由散点图可知, 若去掉 D 点, 则 x 与 y 的线性相关性变强, 且是正相关, 所以样本相关系数 r 变大, 决定系数 R^2 变大, 残差平方和变小.

故选 D.]

3. B [经验回归直线必过样本点中心, 由题意得 $\bar{x} = \frac{15+20+25+30+35}{5} = 25$,

$$\bar{y} = \frac{1+2+2+4+5}{5} = 2.8, \text{ 结合选项可知, } 2.8 = 0.2 \times 25 -$$

2.2, 即 y 与 x 的经验回归方程是 $\hat{y} = 0.2x - 2.2$. 故选 B.]

4. B [令 $z_i = \log_2 y_i$, 则 $\hat{z} = \hat{b}x + \hat{a}$,

$$\bar{z} = \frac{1}{5} \times (0+1+3+3+4) = \frac{11}{5}, \bar{x} = \frac{1}{5} \times (1+2+3+4+5) = 3,$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i z_i - 5 \bar{x} \bar{z}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2} = 1,$$

$$\hat{a} = \bar{z} - \hat{b} \bar{x} = \frac{11}{5} - 1 \times 3 = -0.8,$$

$$\text{故 } \hat{y} = 2^{x-0.8},$$

$$\text{当 } x=6 \text{ 时, } y = 2^{5.2} = 2^5 \times 2^{\frac{1}{5}},$$

$$\text{因为 } 1.15^5 \approx 2, \text{ 所以 } 2^{\frac{1}{5}} \approx 1.15,$$

$$\text{所以 } y = 2^{5.2} = 2^5 \times 2^{\frac{1}{5}} \approx 32 \times 1.15 = 36.8 \approx 37.$$

故选 B.]

5. ABD [对于选项 A, 由样本相关系数的性质, 可得 $r \in [-1, 1]$, 故 A 正确;

对于选项 B, 由样本相关系数的性质, 可得当 $|r|$ 越接近 1 时, 成对样本数据的线性相关程度越强, 故 B 正确;

对于选项 C, 当 $r=0$ 时, 成对样本数据之间没有线性相关关系, 但不排除它们之间有其他相关关系, 故 C 错误;

对于选项 D, 由样本相关系数的性质, 可得当 $r>0$ 时, 成对样本数据正相关, 故 D 正确.

故选 ABD.]

6. ABD [由题意可知, $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3, \bar{y} = \frac{2.4+3.1+4+5+5.5}{5} = 4,$

$$\text{因为经验回归直线 } \hat{y} = \hat{b}x + 1.57 \text{ 过点 } (\bar{x}, \bar{y}),$$

$$\text{所以 } 4 = 3\hat{b} + 1.57,$$

$$\text{解得 } \hat{b} = 0.81, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{所以经验回归方程为 } \hat{y} = 0.81x + 1.57,$$

对于 B, 因为 $\hat{b} = 0.81 > 0$, 所以 $r > 0$, 故 B 正确;

对于 C, x 每增加 1, y 大约增加 0.81, 故 C 错误;

$$\text{对于 D, 因为 } \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -2 \times (-1.6) + (-1) \times$$

$$(-0.9) + 1 + 2 \times 1.5 = 8.1, \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 4 + 1 + 1 + 4 = 10,$$

$$\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 1.6^2 + 0.9^2 + 1 + 1.5^2 = 6.62,$$

$$\text{所以 } r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{8.1}{\sqrt{66.2}},$$

$$\text{所以 } r^2 = \frac{6\,561}{6\,620},$$

$$\text{因为 } \sum_{i=1}^5 (y_i - \hat{y}_i)^2 = 0.02^2 + 0.09^2 + 0.19^2 + 0.12^2 = 0.059,$$

$$\text{则 } R^2 = 1 - \frac{0.059}{6.62} = \frac{6\,561}{6\,620},$$

所以 $r^2 = R^2$, 故 D 正确. 故选 ABD.]

7. 1.4 [由题意, 样本点 $(5, 1.5)$ 处的残差为 -0.06 , 则 $1.5 - (0.28 \times 5 + \hat{a}) = -0.06$, 解得 $\hat{a} = 0.16$.

$$\text{由题表数据可得, } \bar{x} = \frac{1}{5} \times (1+2+3+4+5) = 3,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{5} \times (0.5+0.6+1+m+1.5) = \frac{3.6+m}{5},$$

$$\text{则 } \frac{3.6+m}{5} = 0.28 \times 3 + 0.16, \text{ 解得 } m = 1.4.]$$

8. 2.88 [设 $z = x^2$, 则 $\hat{y} = 0.14z + \hat{b}$, 则

z	1	4	9	16	25	36
y	2.5	3.6	4.4	5.4	6.6	7.5

$$\text{则 } \bar{z} = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6},$$

$$\bar{y} = \frac{2.5+3.6+4.4+5.4+6.6+7.5}{6} = 5,$$

$$\text{则 } \hat{b} = \bar{y} - 0.14\bar{z} = 5 - 0.14 \times \frac{91}{6} \approx 2.88.]$$

9. 解: (1) 由题意, $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (40+45+50+55+60) = 50, \bar{y} =$

$$\frac{1}{5} \times (50+56+64+72+83) = 65,$$

所以 y 关于 x 的样本相关系数

$$r = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5 \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 y_i^2 - 5 \bar{y}^2}} = \frac{16\,660 - 5 \times 50 \times 65}{\sqrt{250} \times \sqrt{680}} \approx \frac{410}{412} \approx 0.995,$$

所以 x 与 y 具有较强的线性相关关系.

$$(2) \text{ 由题意及 (1) 得 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2} = \frac{16\,660 - 5 \times 50 \times 65}{250} = \frac{41}{25},$$

$$\text{则 } \hat{a} = 65 - \frac{41}{25} \times 50 = -17,$$

$$\text{所以 } y \text{ 关于 } x \text{ 的经验回归方程为 } \hat{y} = \frac{41}{25}x - 17,$$

$$\text{当 } x=70 \text{ 时, } \hat{y} = \frac{41}{25} \times 70 - 17 = 97.8,$$

所以当土壤的湿度为 70% 时, 种子的发芽率 $y\%$ 的预测值为 97.8%.

课时作业(六十八)

1. **D** [因为 $\chi^2 = 6.748 > 6.635 = x_{0.01}$, 所以依据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 认为“数学成绩优秀与性别有关”, 即在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为数学成绩优秀与性别有关, 所以 ABC 错误. 故选 D.]

2. **B** [零假设为

H_0 : 变量 I 与 II 不相关.

因为 $\chi^2 = 2.954 > 2.706 = x_{0.1}$, 依据小概率值 $\alpha = 0.1$ 的 χ^2 独立性检验, 推断 H_0 不成立, 即认为变量 I 与 II 相关, 这个推断犯错误的概率不超过 0.1. 故选 B.]

3. **D** [根据列联表中的数据可求得 $b = 30, c = 10$.

对于 A, 代入计算可得 $\frac{a}{a+b} = \frac{2}{5} > \frac{c}{c+d} = \frac{1}{6}$, 正确;

对于 B, $\chi^2 = \frac{110 \times (20 \times 50 - 30 \times 10)^2}{30 \times 80 \times 50 \times 60}$

$\approx 7.486 > 6.635$, 可得 B 正确;

对于 C, D, 结合附表数值以及独立性检验的实际意义, 根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 认为是否患过该流行疾病与性别有关联, 即 C 正确, D 错误.]

4. **BCD** [散点图不适用于推断两个分类变量之间是否有关联, 所以 A 选项错误;

而等高堆积条形图、列联表、 χ^2 独立性检验适用于推断两个分类变量之间是否有关联, 所以 BCD 选项正确.

故选 BCD.]

5. **ABD** [随机抽取了 300 名学生, 则经常锻炼人数为 200, 不经常锻炼人数为 100.

对于选项 A, 由等高堆积条形图知, 男生中经常锻炼的人数为 $200 \times 50\% = 100$, 不经常锻炼的人数为 $100 \times 60\% = 60$, $\therefore$ A 正确;

对于选项 B, 由等高堆积条形图知, 女生中经常锻炼的人数为 $200 \times 50\% = 100$, 不经常锻炼的人数为 $100 \times 40\% = 40$,

$\therefore$ 从参与调查的学生中任取一人, 已知该生为女生, 则该生经常锻炼的概率为 $\frac{100}{100+40} = \frac{5}{7}$, $\therefore$ B 正确;

对于选项 C, 由题意可得列联表如下:

单位: 人

性别	锻炼情况		合计
	不经常	经常	
女生	40	100	140
男生	60	100	160
合计	100	200	300

$\therefore \chi^2 = \frac{300 \times (40 \times 100 - 100 \times 60)^2}{140 \times 160 \times 200 \times 100}$

$\approx 2.679 < 2.706 = x_{0.1}$,

$\therefore$ 依据 $\alpha = 0.1$ 的独立性检验, 不能认为性别因素影响学生体育锻炼的经常性, $\therefore$ C 错误;

对于选项 D, 2×2 列联表如下:

单位: 人

性别	锻炼情况		合计
	不经常	经常	
女生	80	200	280
男生	120	200	320
合计	200	400	600

$\therefore \chi^2 = \frac{600 \times (80 \times 200 - 200 \times 120)^2}{280 \times 320 \times 200 \times 400} = \frac{75}{14} \approx 5.357 >$

$3.841 = x_{0.05}$,

$\therefore$ 依据 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 认为性别因素影响学生体育锻炼的经常性, 该推断犯错误的概率不超过 0.05, $\therefore$ D 正确.

故选 ABD.]

6. 74 [由题意知 $a + 21 = 70, c + 5 = 30$,

可得 $a = 49, c = 25$,

所以 $a + c = 74$.]

7. 4.882 0.05 [根据题意可知,

$\chi^2 = \frac{100 \times (15 \times 44 - 6 \times 35)^2}{21 \times 79 \times 50 \times 50} \approx 4.882 > 3.841$

$= x_{0.05}$,

根据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 认为服用此药的效果与患者的性别有关, 此推断犯错误的概率不大于 0.05.]

8. 解: (1) 根据题意可知,

该校成绩超过 90 分的人数为 $200 \times 85\% = 170$,

成绩没有超过 90 分的人数为 $200 - 170 = 30$,

因此 $\lambda = 90, \mu = 80, t = 20$.

(2) 零假设为

H_0 : 该校男生和女生了解安全知识的程度与性别无关.

因为 $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$= \frac{200 \times (10 \times 80 - 90 \times 20)^2}{100 \times 100 \times 30 \times 170} \approx 3.92 < 6.635 = x_{0.01}$,

根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 没有充分证据推断 H_0 不成立, 因此可以认为 H_0 成立,

所以不能推断该校男生和女生了解安全知识的程度与性别有关.

阶段检测(十五)

1. **D** [由分层随机抽样的特点可得 $\frac{15}{m} = \frac{60}{60+80}$,

解得 $m = 35$. 故选 D.]

2. **D** [从题干散点图可以看出, 两个变量是正相关, 故 A 正确; 从题干散点图可以看出, 经验回归直线的斜率是正数, 且 l_1 的斜率大于 l_2 的斜率, 故 B 和 C 正确; 从题干散点图可以看出, 去掉“离群点”E 后, 相关性更强, 拟合的效果更好, R^2 值越大, 模型的拟合效果越好, 所以 $R_1^2 < R_2^2$, 故 D 错误. 故选 D.]

3. **B** [因为样本数据 $2x_1 + 3, 2x_2 + 3, \dots, 2x_8 + 3$ 的方差为 32, 所以数据 $x_1, x_2, \dots, x_8$ 的方差为 $\frac{32}{2^2} = 8$.

故选 B.]

4. **B** [对于 A, 由 $\hat{y} = -10x + \hat{a}, -10 < 0$, 可得 y 与 x 负相关, 故 A 错误;

对于 B, C, 由表中数据可得

$$\bar{x} = \frac{6+6.5+7+7.5+8}{5} = 7,$$

$$\bar{y} = \frac{90+85+80+75+70}{5} = 80,$$

将 $(7, 80)$ 代入 $\hat{y} = -10x + \hat{a}$, 得 $80 = -10 \times 7 + \hat{a}$,

解得 $\hat{a} = 150$, 则经验回归方程为 $\hat{y} = -10x + 150$,

当 $x = 7.5$ 时, $\hat{y} = -10 \times 7.5 + 150 = 75$, 故 $(7.5, 75)$ 在经验回归直线上, 故 B 正确, C 错误;

对于 D, 当 $x = 9.5$ 时, $\hat{y} = -10 \times 9.5 + 150 = 55$, 这是一个估计值, 不是精确值, 故 D 错误.

故选 B.]

5. ACD [由题意可知, 抽取男生人数为 $600 \times \frac{100}{400+600} = 60$,

女生抽取的人数为 $400 \times \frac{100}{400+600} = 40$,

由等高堆积条形图知, 抽取男生感兴趣的人数为 $60 \times 0.5 = 30$, 抽取男生不感兴趣的人数为 $60 \times 0.5 = 30$,

抽取女生感兴趣的人数为 $40 \times 0.3 = 12$, 抽取女生不感兴趣的人数为 $40 \times 0.7 = 28$, 则 2×2 列联表如下:

单位: 人

性别	数学兴趣		合计
	感兴趣	不感兴趣	
女生	12	28	40
男生	30	30	60
合计	42	58	100

对于 A, 由此表可知, $a = 12, c = 30$, 故 A 正确;

对于 B, 女生不感兴趣的人数约为 $400 \times \frac{28}{40} = 280$, 男生不感

兴趣的人数约为 $600 \times \frac{30}{60} = 300$,

所以估计该校高一新生中对数学不感兴趣的女生人数比男生人数少, 故 B 错误;

对于 C, 零假设为

H_0 : 性别与对数学的兴趣没有差异.

$$\chi^2 = \frac{100 \times (12 \times 30 - 28 \times 30)^2}{40 \times 60 \times 42 \times 58} \approx 3.941 > 3.841 = x_{0.05},$$

依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 有充分证据推断 H_0 不成立, 因此可以认为 H_0 不成立, 即可以认为性别与对数学的兴趣有差异, 故 C 正确;

对于 D, 由 C 项知 $\chi^2 \approx 3.941 < 6.635 = x_{0.01}$,

依据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 没有充分证据推断 H_0 不成立, 因此可以认为 H_0 成立, 即可以认为性别与对数学的兴趣没有差异, 故 D 正确.

故选 ACD.]

6. 13.5% [设 2025 年到该地旅游的游客总人数为 a ,

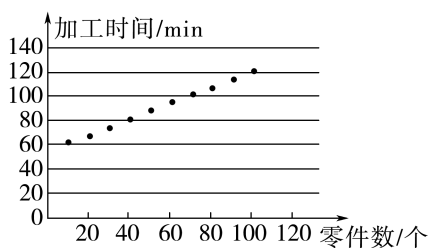
由扇形图可知, 游客中青年人所占百分比为 $1 - 35\% - 20\% = 45\%$,

则游客中青年人的人数为 $0.45a$,

其中选择自助游的青年人的人数为 $0.45a \times 0.3 = 0.135a$,

所以估计 2025 年到该地旅游的游客中选择自助游的青年人占总游客人数的 13.5%.]

7. 解: (1) 散点图如下.



(2) 由已知得 $\bar{x} = 55, \bar{y} = 91.7$,

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 5\,515,$$

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 8\,250, \text{ 所以 } \hat{b} = \frac{5\,515}{8\,250} \approx 0.668,$$

$$\hat{a} \approx 91.7 - 0.668 \times 55 = 54.96.$$

所以经验回归方程为 $\hat{y} = 0.668x + 54.96$.

(3) 关于加工零件的个数与加工时间, 我们得到的结论是: 加工的零件越多, 所花的时间大致越长.

8. 解: (1) 由已知得样本中有 25 周岁及以上组工人 60 名, 25 周岁以下组工人 40 名,

所以样本中日平均生产件数不足 60 件的工人中 25 周岁及以上组有 $60 \times 0.05 = 3$ (人), 分别记为 A_1, A_2, A_3 , 25 周岁以下组有 $40 \times 0.05 = 2$ (人), 分别记为 B_1, B_2 ,

从中随机抽取 2 人, 所有可能的结果共 10 种, 分别是 $(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_2, A_3), (A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_1), (A_3, B_2), (B_1, B_2)$,

其中至少抽到 1 名 25 周岁以下组的工人的结果有 7 种,

$$\text{故所求概率 } P = \frac{7}{10}.$$

(2) 由频率分布直方图可知在抽取的 100 名工人中,

“25 周岁及以上组”中的“生产能手”有 $60 \times 0.25 = 15$ (人),

“25 周岁以下组”中的“生产能手”有 $40 \times 0.375 = 15$ (人),

据此可得 2×2 列联表如下:

单位: 人

分组	生产件数		合计
	≥ 80	< 80	
25 周岁及以上组	15	45	60
25 周岁以下组	15	25	40
合计	30	70	100

零假设为

H_0 : “生产能手”与工人所在的年龄组无关.

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$= \frac{100 \times (15 \times 25 - 45 \times 15)^2}{60 \times 40 \times 30 \times 70}$$

$$\approx 1.786 < 2.706 = x_{0.1},$$

所以依据小概率值 $\alpha = 0.1$ 的独立性检验, 没有充分证据推断 H_0 不成立, 即认为“生产能手”与工人所在的年龄组无关.

课时作业(六十九)

1. B [若 $A_n^3 = 10C_n^2$, 则 $\frac{n!}{(n-3)!} = 10 \times \frac{n!}{2!(n-2)!}$,

$$\text{整理得 } \frac{1}{(n-3)!} = \frac{5}{(n-2)!},$$

$$\text{所以 } 1 = \frac{5}{n-2}, \text{ 解得 } n=7.$$

故选 B.]

2. B [7 名同学排成一排照相,

则甲、乙不相邻的不同排法种数为 $A_5^5 A_6^2 = 3\ 600$.

故选 B.]

3. C [根据题意, 个位从 3 和 5 中选择一个, 百位不能选 0,

若含 0, 则有 $C_2^1 C_3^1 = 6$ (个);

若不含 0, 则有 $C_2^1 A_3^2 = 12$ (个).

故符合条件的三位奇数的个数为 $12+6=18$.

故选 C.]

4. C [由题意, 区域 A 有 5 种涂法, B 有 4 种涂法,

C, A 不同色, C 有 3 种, D 有 2 种涂法, 有 $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ (种),

C, A 同色, D 有 3 种涂法, 有 $5 \times 4 \times 3 = 60$ (种),

所以共有 $120+60=180$ (种) 不同的涂色方法.

故选 C.]

5. B [甲、乙、丙、丁四位师范生分配到 A, B, C 三所学校实习,

若每所学校至少分到一人,

则可将四人分为 1, 1, 2 三组, 共有 $\frac{C_4^1 \cdot C_3^1}{A_2^2} = 6$ 种方法,

再分到三所学校有 $A_3^3 = 6$ (种) 分法,

则不同的分配方案的种数是 $6 \times 6 = 36$.

故选 B.]

6. B [由题意, 可分两类, 第一类: 由一个数字组成 4 位数“回文数”, 在 6 个数字中任取 1 个, 有 C_6^1 种情况. 第二类: 由两组相同的数字组成 4 位数“回文数”, 在 6 个数字中任取 2 个, 这 2 个数字互换位置又可以组成另一个数, 所以有 $C_6^2 A_2^2$ 种情况. 综上, 由数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 可以组成 4 位数的“回文数”的个数为 $C_6^1 + C_6^2 A_2^2 = 36$. 故选 B.]

7. ABD [对于 A, 左边 $= \frac{n!}{(n-m)!} + m \cdot \frac{n!}{(n-m+1)!} = \frac{(n-m+1) \cdot n!}{(n-m+1)!} + m \cdot \frac{n!}{(n-m+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-m+1)!} =$ 右边, $\therefore$ A 正确; 对于 B, 右边 $= \frac{n \cdot (n-1)!}{(r-1)! \cdot (n-r)!} = \frac{r}{r} \cdot \frac{n!}{(r-1)! \cdot (n-r)!} = r \cdot \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} =$ 左边, $\therefore$ B 正确; 对于 C, 右边 $= C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m \neq$ 左边, $\therefore$ C 错误; 对于 D, 右边 $= \frac{m+1}{n-m} \cdot \frac{n!}{(m+1)! \cdot (n-m-1)!} = \frac{(m+1) \cdot n!}{(m+1) \cdot m! \cdot (n-m) \cdot (n-m-1)!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} =$ 左边, $\therefore$ D 正确.

故选 ABD.]

8. BD [对于 A, 若 1 班不再分配名额, 则 20 个名额分配到 5 个班级, 每个班级至少 1 个, 根据挡板法, 有 C_{19}^4 种分配方法, 故 A 错误; 对于 B, 若 1 班有除劳动模范之外的学生参加, 则 20 个名额分配到 6 个班级, 每个班级至少 1 个, 根据挡板法, 有 C_{19}^5 种分配方法, 故 B 正确; 对于 C, D, 若每个班至少 3 人参加, 由于 1 班有 2 个劳动模范, 故只需先满足其他每个班级有 2 个名额, 还剩 10 个名额, 再将 10 个名额分配到 6 个班级, 每个班级至少 1 个名额, 故只需在 10 个名额中的 9 个空

上放置 5 个挡板即可, 故有 $C_9^5 = 126$ (种), 故 C 错误, D 正确.

故选 BD.]

9. AC [如果甲工序不能放在第一道, 则甲有 4 种安排方式, 根据分步乘法计数原理, 共有 $C_4^1 A_4^4 = 96$ (种) 加工顺序, 故 A 正确;

甲、乙两道工序必须相邻, 将甲和乙捆绑为一道工序, 和剩余 3 道工序放在一起排序, 则共有 $A_2^2 A_4^4 = 48$ (种) 加工顺序, 故 B 错误;

如果甲、丙两道工序必须不相邻, 则先安排剩余 3 道工序, 在形成的 4 个空中, 安排甲、丙, 故共有 $A_3^3 A_4^2 = 72$ (种) 加工顺序, 故 C 正确;

现将 5 道不同的工序全排列, 再除以乙、丙两道工序的全排列, 故共有 $\frac{A_5^5}{A_2^2} = 60$ (种) 加工顺序, 故 D 错误. 故选 AC.]

10. 15 [因为 $2\ 025 = 3^4 \times 5^2$, 所以 2 025 的正因数有 $(4+1) \times (2+1) = 15$ (个).]

11. 16 [法一: 可分两种情况: 第一种情况, 只有 1 名女生入选, 不同的选法有 $C_2^1 C_4^2 = 12$ (种); 第二种情况, 有 2 名女生入选, 不同的选法有 $C_2^2 C_4^1 = 4$ (种). 根据分类加法计数原理知, 至少有 1 名女生入选的不同的选法共有 $12+4=16$ (种).

法二: 从 6 人中任选 3 人的不同的选法共有 $C_6^3 = 20$ (种), 从 6 人中任选 3 人都是男生的不同的选法有 $C_4^3 = 4$ (种), 所以至少有 1 名女生入选的不同的选法共有 $20-4=16$ (种).]

12. (1) 96 (2) 1 728 [(1) 由题意可得共 $A_2^2 A_2^2 A_4^4 = 2 \times 2 \times 24 = 96$ (种) 不同的站法.

(2) 先排老师和女学生共有 A_4^4 种站法, 再排男学生甲有 C_3^1 种站法,

最后排剩余的 3 名男学生有 A_4^3 种站法, 所以共有 $A_4^4 C_3^1 A_4^3 = 24 \times 3 \times 24 = 1\ 728$ (种) 不同的站法.]

课时作业(七十)

1. A [由题意, $f(x) = x^4 - C_4^1 x^3 + C_4^2 x^2 - C_4^3 x + 1 = C_4^0 x^4 - (-1)^0 + C_4^1 x^3 \cdot (-1)^1 + C_4^2 x^2 \cdot (-1)^2 + C_4^3 x \cdot (-1)^3 + C_4^4 x^0 \cdot (-1)^4 = (x-1)^4$,

其图象可由偶函数 $y = x^4$ 的图象向右平移 1 个单位长度得到, 所以函数 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=1$.

故选 A.]

2. A [$(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2)^6 = (x - \frac{1}{x})^{12}$, 其展开式的通项为

$$T_{k+1} = C_{12}^k x^{12-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^k = (-1)^k C_{12}^k x^{12-2k}, 0 \leq k \leq 12, k$$

$\in \mathbf{N}$, 由 $12-2k=0$, 得 $k=6$, 则 $(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2)^6$ 的展开式中的常数项为 $(-1)^6 \times C_{12}^6 = 924$. 故选 A.]

3. D [对于 $(1-x)^4 + (1-x)^5$ 的展开式,

含 x^2 的项为 $C_4^2 (-x)^2 + C_5^2 (-x)^2 = 16x^2$,

故该项的系数为 16.

故选 D.]

4. A [$(a - \sqrt{x})^7$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_7^k a^{7-k} \cdot (-\sqrt{x})^k, k=0, 1, 2, \dots, 7$. 令 $k=4$, 得 $T_5 = C_7^4 a^3 x^2$, 所以 $C_7^4 a^3 = 280$, 解得 $a=2$. 故选 A.]

5. A $[(2-x)^4]$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_4^k 2^{4-k} \cdot (-x)^k, k=0, 1, 2, 3, 4$,
所以 $(1+ax)(2-x)^4$ 的展开式中含 x^4 的项为 $1 \times C_4^4 2^{4-4} \cdot (-x)^4 + ax \times C_4^3 2^{4-3} (-x)^3 = x^4 - 8ax^4 = (1-8a)x^4$,
则 $1-8a=17$, 解得 $a=-2$.

故选 A.]

6. A [对于 A, 令 $x=0$, 可得 $a_0=2^{10}$, 故 A 正确;
对于 B, 令 $x=-1$, 可得 $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{10}=1$ ①, 故 B 错误;

对于 C, 令 $x=1$, 可得 $a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=5^{10}$ ②,

联立 ①② 可得 $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}=\frac{1+5^{10}}{2}$, 故 C 错误;

对于 D, 展开式共有 11 项, 则第 6 项的二项式系数最大, 故 D 错误.

故选 A.]

7. BC [由题意可得, 展开式共有 7 项, 故 A 错误;

展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k (x^2)^{6-k} \left(-\frac{2}{x}\right)^k$

$= (-2)^k C_6^k x^{12-3k}, k=0, 1, \cdots, 6$,

令 $12-3k=0$, 得 $k=4$, 则 $T_5 = (-2)^4 \times C_6^4 = 240$, 故 B 正确;

令 $12-3k=4$, 得 $k=\frac{8}{3}$, 不符合题意, 故没有含 x^4 的项, 则 C 正确;

由二项式系数的性质可知 C_6^3 最大, 故 $T_4 = (-2)^3 C_6^3 x^3 = -160x^3$, 故 D 错误.

故选 BC.]

8. AB [$\because f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 = (x-1)^5, \therefore f(x)$ 可以被 $(x-1)^3$ 整除, 故 A 正确;

$\because f(x+y+1) = (x+y)^5, \therefore f(x+y+1)$ 可以被 $(x+y)^4$ 整除, 故 B 正确;

$\because f(30) = (30-1)^5 = (27+2)^5 = C_5^0 \times 27^5 + C_5^1 \times 27^4 \times 2 + \cdots + C_5^4 \times 27 \times 2^4 + C_5^5 \times 2^5 = C_5^0 \times 27^5 + C_5^1 \times 27^4 \times 2 + \cdots + C_5^4 \times 27 \times 2^4 + 27 + 5, \therefore f(30)$ 被 27 除的余数为 5, 故 C 错误;

$\because f(29) = (29-1)^5 = (30-2)^5 = C_5^0 \times 30^5 + C_5^1 \times 30^4 \times (-2) + \cdots + C_5^4 \times 30 \times (-2)^4 + (-2)^5 = C_5^0 \times 30^5 + C_5^1 \times 30^4 \times (-2) + \cdots + C_5^4 \times 30 \times (-2)^4 - 32, \therefore$ 个位数为 $10-2=8$, 故 D 错误. 故选 AB.]

9. ACD [对于 A, 因为 $\left(x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式共有 8 项, 所以

$n=7$,

故所有项的二项式系数和为 $2^7=128$, 故 A 正确;

对于 B, 令 $x=1$, 可得所有项的系数和为 $\left(1+\frac{1}{2}\right)^7 \neq \left(\frac{3}{2}\right)^8$,

故 B 错误;

展开式的通项为 $T_{k+1} = C_7^k \cdot x^{7-k} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot$

$C_7^k \cdot x^{7-\frac{3k}{2}} (k=0, 1, 2, \cdots, 7)$,

对于 C, 设第 $k+1$ 项系数最大,

由 $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot C_7^k \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot C_7^{k-1}, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot C_7^k \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \cdot C_7^{k+1}, \end{cases}$

$$\text{解得} \begin{cases} k \leq \frac{8}{3}, \\ k \geq \frac{5}{3}, \end{cases} \text{ 则 } k=2, \text{ 故第 3 项的系数最大, 故 C 正确;}$$

对于 D, 由 $7-\frac{3k}{2}$ 为整数, 且 $k=0, 1, 2, \cdots, 7$ 可知, k 的值可

以为 $0, 2, 4, 6$,

所以二项展开式中, 有理项共有 4 项, 故 D 正确.

故选 ACD.]

10. -20 $[(x-1)^6]$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k x^{6-k} \cdot (-1)^k = (-1)^k C_6^k x^{6-k}$, 令 $6-k=3$, 得 $k=3$, 所以 x^3 项的系数为 $(-1)^3 C_6^3 = -20$.]

11. 1 260 [把 $x+\frac{1}{x}$ 看成一个整体, 则 $\left(x+\frac{1}{x}-y\right)^{10}$ 的展开

式的通项为 $T_{k+1} = C_{10}^k \left(x+\frac{1}{x}\right)^{10-k} (-y)^k$. 令 $k=6$, 则

$T_7 = C_{10}^6 \left(x+\frac{1}{x}\right)^4 y^6, \left(x+\frac{1}{x}\right)^4$ 的展开式的通项为

$T_{r+1} = C_4^r x^{4-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = C_4^r x^{4-2r}$. 令 $4-2r=0$, 则 $r=2$, 所以

在 $\left(x+\frac{1}{x}-y\right)^{10}$ 的展开式中, 只含 y^6 的项的系数为 $C_{10}^6 \times$

$C_4^2 = 1\,260$.]

12. 5 $\left[\left(\frac{1}{3}+x\right)^{10}\right]$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} x^k$,

$0 \leq k \leq 10$ 且 $k \in \mathbf{N}$,

设展开式中第 $k+1$ 项系数最大,

$$\text{则} \begin{cases} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \geq C_{10}^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{9-k}, \\ C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \geq C_{10}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{11-k}, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k \geq \frac{29}{4}, \\ k \leq \frac{33}{4}, \end{cases} \text{ 即 } \frac{29}{4} \leq k \leq \frac{33}{4}, \text{ 又 } k \in \mathbf{N}, \text{ 故 } k=8,$$

所以展开式中系数最大的项是第 9 项, 且该项系数为

$C_{10}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 5$.]

阶段检测(十六)

1. C [要让电路从 A 处到 B 处接通, 不同的路径条数为 $2 \times 1 + 2 \times 3 = 8$.

故选 C.]

2. D [因为 $(1+x)^2 + (1+x)^3 + \cdots + (1+x)^9 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_9 x^9$,

所以 $a_2 = C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_9^2 = C_3^3 + C_3^2 + \cdots + C_9^2 = C_4^3 + \cdots + C_9^2 = C_{10}^3 = 120$.

故选 D.]

3. B [先将丙和丁捆绑在一起, 有 A_2^2 种排法, 再将其与乙、戊排列, 有 A_3^3 种排法, 最后将甲插入中间两空, 有 C_2^2 种排法, 根据分步乘法计数原理, 共有 $A_2^2 A_3^3 C_2^2 = 24$ (种) 不同的排列方式. 故选 B.]

4. C [甲、乙二人先选 1 种相同的课外读物, 有 $C_6^1 = 6$ (种) 情况, 再从剩下的 5 种课外读物中各自选 1 本不同的读物, 有 $C_5^1 C_4^1 = 20$ (种) 情况, 由分步乘法计数原理可得共有 $6 \times 20 = 120$ (种) 选法, 故选 C.]

5. A [因为二项式系数只有第6项最大,故 $n=10$,

$$\text{因为 } T_{k+1} = C_{10}^k \left(\frac{1}{2}x^3\right)^{10-k} (-2x^{-2})^k$$

$$= C_{10}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} (-2)^k x^{30-5k} \quad (0 \leq k \leq 10, k \in \mathbf{N}),$$

令 $30-5k=0$, 则 $k=6$,

$$\text{故 } T_7 = C_{10}^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times (-2)^6 = 840.$$

故选 A.]

6. B [先从5人中选择1人两天均参加公益活动,有 C_5^1 种方式;再从余下的4人中选2人分别安排到星期六、星期日,有 A_4^2 种安排方式,所以不同的安排方式共有 $C_5^1 \cdot A_4^2 = 60$ (种). 故选 B.]

7. BD [在 $\left(x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ 的展开式中,所有奇数项的二项式系数和为 $\frac{2^{10}}{2} = 2^9$, A 错误;

令 $x=1$, 则所有项的系数和为 3^{10} , B 正确;

二项式系数最大的项为第6项, C 错误;

$$T_{k+1} = C_{10}^k x^{20-2k} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = 2^k C_{10}^k x^{20-\frac{5k}{2}},$$

令 $20-\frac{5k}{2}=0$, 则 $k=8$, 即展开式中的常数项是第9项, D 正确.

故选 BD.]

8. ABD [A 选项, 0 不能当首位, 所以有 $C_5^1 A_5^3 = 300$ (个), 故 A 正确;

B 选项, 分为两类: 0 在末位, 则有 $A_5^3 = 60$ (个);

0 不在末位, 则有 $C_2^1 C_4^1 A_4^2 = 96$ (个),

所以共有 $60+96=156$ (个), 故 B 正确;

C 选项, 分为两类: 0 在末位, 则有 $A_5^3 = 60$ (个);

5 在末位, 则有 $C_4^1 A_4^2 = 48$ (个),

所以共有 $60+48=108$ (个), 故 C 错误;

D 选项, 首位为1的有 $A_5^3 = 60$ (个); 前两位为20的有 $A_4^2 = 12$ (个); 前两位为21的有 $A_4^2 = 12$ 个, 所以第85个数字是前两位为23的最小数, 即为2301, 故 D 正确.

故选 ABD.]

9. 10 [令 $x=1$, 所以 $(1+1)^n = 32$, 即 $2^n = 32$, 解得 $n=5$,

所以 $(x+1)^5$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_5^k \cdot x^{5-k}$, 令 $5-k=2$, 则 $k=3$,

$$\text{所以 } T_4 = C_5^3 x^2 = 10x^2.$$

故 x^2 的系数为 10.]

10. 15 [因为 $(1-2x)^4 = a_0 - 2a_1x + 4a_2x^2 - 8a_3x^3 + 16a_4x^4$, 所以令 $x=0$, 可得 $a_0=1$. 再令 $x=-\frac{1}{2}$, 可得 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2^4 = 16$, 所以 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 16 - a_0 = 16 - 1 = 15$.]

11. 解: (1) 从5名男生和4名女生中选出4人参加创新大赛, 则4人中男生和女生各选2人, 共有 $C_5^2 \cdot C_4^2 = 10 \times 6 = 60$ (种) 选法.

(2) 除去甲、乙之外, 其余2人可以从剩下的7人中任意选择,

则男生中的甲和女生中的乙必须在内有 $C_7^2 = 21$ (种) 选法.

(3) 男生中的甲和女生中的乙不在内的情况, 共有 $C_7^4 = 35$ (种) 选法.

则可得男生中的甲和女生中的乙至少有1人在内有 $C_9^4 - C_7^4 = 126 - 35 = 91$ (种) 选法.

(4) 如果4人中必须既有男生又有女生, 可以按含有女生的人数分成三类: 1男3女; 2男2女; 3男1女,

则4人中必须既有男生又有女生有

$$C_5^1 C_4^3 + C_5^2 C_4^2 + C_5^3 C_4^1 = 20 + 60 + 40 = 120 \text{ (种) 选法.}$$

12. 解: 在 $(3x-2y)^{20}$ 的展开式中,

(1) 二项式系数最大的项是第11项,

$$\text{即 } T_{11} = C_{20}^{10} \times 3^{10} \times (-2)^{10} x^{10} y^{10} = C_{20}^{10} \times 6^{10} x^{10} y^{10}.$$

(2) 设系数绝对值最大的项是第 $(r+1)$ ($0 \leq r \leq 20, r \in \mathbf{N}$) 项,

$$\text{于是 } \begin{cases} C_{20}^r \cdot 3^{20-r} \cdot 2^r \geq C_{20}^{r+1} \cdot 3^{19-r} \cdot 2^{r+1}, \\ C_{20}^r \cdot 3^{20-r} \cdot 2^r \geq C_{20}^{r-1} \cdot 3^{21-r} \cdot 2^{r-1}, \end{cases}$$

$$\text{化简得 } \begin{cases} 3(r+1) \geq 2(20-r), \\ 2(21-r) \geq 3r. \end{cases} \text{ 解得 } \frac{37}{5} \leq r \leq \frac{42}{5} \quad (r \in \mathbf{N}), \text{ 所以}$$

$$r=8,$$

即 $T_9 = C_{20}^8 \times 3^{12} \times 2^8 x^{12} y^8$ 是系数绝对值最大的项.

(3) 由于系数为正的项为 y 的偶次方项, 因此可设第 $2k-1$ ($1 \leq k \leq 11, k \in \mathbf{N}$) 项系数最大,

$$\text{于是 } \begin{cases} C_{20}^{2k-2} \cdot 3^{22-2k} \cdot 2^{2k-2} \geq C_{20}^{2k-4} \cdot 3^{24-2k} \cdot 2^{2k-4}, \\ C_{20}^{2k-2} \cdot 3^{22-2k} \cdot 2^{2k-2} \geq C_{20}^{2k} \cdot 3^{20-2k} \cdot 2^{2k}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 10k^2 + 143k - 1077 \leq 0, \\ 10k^2 + 163k - 924 \geq 0, \\ 1 \leq k \leq 11, k \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

$$\text{解得 } k=5, \text{ 即第 } 2 \times 5 - 1 = 9 \text{ 项系数最大, } T_9 = C_{20}^8 \times$$

$$3^{12} \times 2^8 x^{12} y^8.$$

课时作业(七十一)

1. A [对于 A, 甲、乙两人各写一个数字, 所有可能的结果为 (奇, 偶), (奇, 奇), (偶, 奇), (偶, 偶), 则都是奇数或都是偶数的概率为 $\frac{1}{2}$, 故游戏是公平的;

对于 B, 随着试验次数的增加, 频率偏离概率的幅度会缩小, 故事件 A 发生的频率就是事件 A 发生的概率是不正确的;

对于 C, 某人花 100 元买福利彩票, 中奖或者不中奖都有可能, 但事先无法预料, 故 C 不正确;

对于 D, 事件 B 可能发生也可能不发生, 故事件 B 是随机事件, 故 D 不正确.

故选 A.]

2. C [由题意, 事件 A = “击中环数小于 8” 与事件 B = “击中环数大于 8” 是互斥事件但不是对立事件, 故 A 选项错误; 事件 B = “击中环数大于 8” 与事件 C = “击中环数不小于 8”, 能同时发生, 所以不是互斥事件, 故 B 选项错误; 事件 A = “击中环数小于 8” 与事件 C = “击中环数不小于 8” 是对立事件, 故 C 选项正确; 事件 B = “击中环数大于 8” 与事件 D = “击中环数不大于 9” 能同时发生, 不是互斥事件, 故 D 选项错误. 故选 C.]

3. B [根据题意, 事件 A, B 互斥, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.2 + 0.3 = 0.5$.]

4. C [法一: 由题意, 甲、乙、丙三人在 3 天节日中值班, 每人值班 1 天, 每天一人的情况有 (甲, 乙, 丙), (甲, 丙, 乙), (乙, 甲, 丙), (乙, 丙, 甲), (丙, 甲, 乙), (丙, 乙, 甲), 共 6 种, 其中乙排在甲前面值班的情况有 (乙, 甲, 丙), (乙, 丙, 甲), (丙, 乙, 甲), 共 3 种, 故乙排在甲前面值班的概率为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. 故选 C.]

法二:甲、乙、丙三人在3天节日中值班,每人值班1天,每天一人,共有 $A_3^3=6$ (种)等可能结果,设事件 A ="乙排在甲前面值班",则事件 A 包含的可能结果为 $\frac{1}{2}A_3^3=3$ (种),所以事件

件 A 发生的概率 $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

故选C.]

5. B [根据题意, $P(A)=P(AB)+P(\overline{AB})$,变形可得

$$P(\overline{AB})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{5},$$

又 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{3}{5}$,变形可得

$$P(B)=\frac{2}{5}. \text{ 故选 B.}]$$

6. A [由统计表可知,共抽取了 $6+9+15+12+8=50$ 名学生,

阅读时间少于4 h的有 $6+9=15$ 人,

$\therefore$ 从该校随机抽取1名学生,估计其每周的课外阅读时间少于4 h的概率为 $\frac{15}{50}=0.3$.

故选A.]

7. BC [由题意知事件 A 包含的样本点:向上的一面出现的点数为1,3,5;事件 B 包含的样本点:向上的一面出现的点数为1,2;事件 C 包含的样本点:向上的一面出现的点数为4,5,6,所以 $\overline{AB}$ ="向上的一面出现的点数为2",故A错误; $\overline{BC}$ ="向上的一面出现的点数为4或5或6",故B正确; $\overline{AB}+\overline{BC}$ ="向上的一面出现的点数为3或4或5或6",故C正确; $\overline{ABC}$ ="向上的一面出现的点数为5",故D错误. 故选BC.]

8. ABC [由题意可知, $m=100-55-18=27$, $P(A)=\frac{55}{100}=$

0.55 , $P(B)=\frac{18}{100}=0.18$, $P(C)=\frac{27}{100}=0.27$. 事件 A, B, C 两两互斥,所以 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)=0.73$, $P(B \cup C)=P(B)+P(C)=0.45$. 故选ABC.]

9. ABD [对于A, $\because A \subseteq B$,事件 AB 发生就相当于事件 A 发生,

$\therefore P(AB)=P(A)$,故A正确;

对于B, $\because A, B$ 是互斥事件,

$\therefore P(A \cup B)=P(A)+P(B)=0.6$,

$\therefore P(A)=0.4$, $P(\overline{A})=1-P(A)=0.6$,故B正确;

对于C,如抛掷一枚骰子,统计抛得的点数,

记事件 $C=\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,3,5\}$, $B=\{1,3\}$,

满足 $P(A \cup C)=P(B \cup C)$,

但 $P(A)=\frac{1}{2}>P(B)=\frac{1}{3}$,故C错误;

对于D, $\because A=AB+\overline{AB}$, $B=BA+\overline{BA}$, $AB, \overline{AB}$ 互斥, $BA, \overline{BA}$ 互斥,

$\therefore P(A)=P(AB)+P(\overline{AB})$,

$P(B)=P(BA)+P(\overline{BA})$,

$\therefore P(\overline{AB})=P(\overline{BA})$, $\therefore P(A)=P(B)$,故D正确.

故选ABD.]

10. 0.3 [由题意可知,摸出红球为摸出白球或黑球的对立事件,所以摸出红球的概率为 $1-(0.4+0.3)=0.3$.]

11. 0.9 [在大量重复进行同一试验时,事件 A 发生的频率总是接近于某个常数,在它附近摆动,这个常数就是事件 A 的概率,

观察题表得到某种植物的种子发芽的频率稳定在0.9附近,所以可估计该植物的种子发芽的概率为0.9.]

12. $\frac{3}{56}$ [从8张卡片中随机抽出3张,则样本空间中总的样本

点个数为 $C_8^3=56$,

因为 $1+2+3+4+5+6+7+8=36$,

所以要使抽出的3张卡片上的数字之和与其余5张卡片上的数字之和相等,

则抽出的3张卡片上的数字之和应为18,

则抽出的3张卡片上的数字的组合有8,7,3或8,6,4或7,6,5,共3种,

所以符合抽出的3张卡片上的数字之和为18的样本点有3个,

所以抽出的3张卡片上的数字之和与其余5张卡片上的数字之和相等的概率为 $\frac{3}{56}$.]

课时作业(七十二)

1. B [法一: $P(A)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$, $P(AB)=\frac{7}{36}$,

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{7}{36}}{\frac{1}{3}}=\frac{7}{12}.$$

法二:事件 A 中的样本点个数为12,事件 AB 中的样本点个数为7,故 $P(B|A)=\frac{7}{12}$. 故选B.]

2. C [设甲地降雨为事件 A ,乙地降雨为事件 B ,则两地恰有一地降雨为 $\overline{AB}+\overline{AB}$,

所以 $P(\overline{AB}+\overline{AB})=P(\overline{AB})+P(\overline{AB})$

$=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=0.2 \times 0.7+0.8 \times 0.3=0.38$.

故选C.]

3. B [$\because P(B)=P(BA)+P(\overline{BA})$,

$\therefore P(BA)=P(B)-P(\overline{BA})=0.3-0.1=0.2$.

故选B.]

4. C [三个元件 T_1, T_2, T_3 正常工作的概率均为 $\frac{1}{3}$,且是相互独立的,

则电路不发生故障的概率为 $\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{27}$.

故选C.]

5. C [因为 $P(\overline{B}|A)=\frac{3}{4}$,所以 $P(B|A)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$,故D错误;

因为 $P(AB)=P(B) \cdot P(A|B)$,

所以 $P(B|A)=\frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$

$$=\frac{\frac{5}{9}P(B)}{P(A)}=\frac{1}{4},$$

解得 $\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{9}{20}$.

又因为 $P(A)P(B)=\frac{1}{5}$,

所以 $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{3}{10}$,故AB错误;

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B|A)=\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}=\frac{1}{6}, \text{故 C 正确.}$$

故选 C.]

6. C [设“甲乘地铁”为事件 A,“甲乘公交车”为事件 B,“甲骑共享单车”为事件 C,“甲按时到达文博会”为事件 D,

$$\text{则 } P(A)=\frac{1}{4}, P(B)=\frac{1}{4}, P(C)=\frac{1}{2},$$

$$P(D|A)=\frac{4}{5}, P(D|B)=\frac{3}{4}, P(D|C)=\frac{2}{3},$$

$$\text{则 } P(D)=P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)=\frac{1}{4} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{173}{240}, P(CD)=P(C)P(D|C)=\frac{1}{3},$$

所以若某一天甲按时到达文博会,

$$\text{则他骑共享单车的概率为 } P(C|D)=\frac{P(CD)}{P(D)}=\frac{80}{173}.$$

故选 C.]

7. ACD [对于 A, $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}=\frac{1}{8}$, 所以

A 正确; 对于 B, $P(\bar{B}|A)=1-P(B|A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, 所以

B 错误; 对于 C, $P(B|\bar{A})=1-P(\bar{B}|\bar{A})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$, 所以

C 正确; 对于 D, $P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, 则 $P(B)=$

$$P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{24}, \text{所以}$$

以 D 正确. 故选 ACD.]

8. BD [对于 A, 因为 $A=\{1,2\}, B=\{1,3\}$, 则 $A \cap B=\{1\} \neq \emptyset$, 所以 A 错误;

对于 B, 因为 $B \cap C=\{1\}$,

$$\text{所以 } P(BC)=\frac{1}{4},$$

$$\text{又 } P(B)=P(C)=\frac{1}{2},$$

则 $P(BC)=P(B)P(C)$, 所以 B 与 C 相互独立, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $A \cap B \cap C=\{1\}$,

$$\text{则 } P(ABC)=\frac{1}{4},$$

$$\text{又 } P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2},$$

所以 $P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$, 故 C 错误;

$$\text{对于 D, 因为 } P(A)=P(C)=\frac{1}{2},$$

$$\text{又 } A \cap C=\{1\}, \text{则 } P(AC)=\frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2},$$

$$P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}, \text{故 D 正确. 故选 BD.}]$$

9. 0.18 [∵ 随机事件 A 与 B 对立, B 与 C 相互独立, $P(A)=$

$$0.4, P(C)=0.3,$$

$$\therefore P(B)=1-P(A)=1-0.4=0.6,$$

$$P(BC)=P(B)P(C)=0.6 \times 0.3=0.18.]$$

10. 0.957 [设 B=“取到合格品”, A_i =“取到的产品来自第 i 批”(i=1,2), 则 $P(A_1)=0.3, P(A_2)=0.7, P(B|A_1)=$

$$0.95,$$

$$P(B|A_2)=0.96,$$

$$\text{由全概率公式得 } P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2) \cdot P(B|$$

$$A_2)=0.3 \times 0.95 + 0.7 \times 0.96 = 0.957.]$$

11. 解: 根据题意, 设 A=“机器人是甲品牌”, B=“机器人是合格品”, C=“机器人是乙品牌”, D=“机器人是丙品牌”.

(1) 因为甲品牌的占 40%, 合格率为 95%, 则 $P(A)=40\%$, $P(B|A)=95\%$,

$$\text{所以该机器人是甲品牌合格品的概率 } P(AB)=P(A) \cdot P(B|A)=40\% \times 95\% = 0.38.$$

(2) 根据题意, 乙品牌的占 30%, 合格率为 90%, 则 $P(C)=30\%$, $P(B|C)=90\%$,

丙品牌的占 30%, 合格率为 90%,

则 $P(D)=30\%$, $P(B|D)=90\%$,

$$\text{则 } P(B)=P(A)P(B|A)+P(C)P(B|C)+P(D)P(B|D)=40\% \times 95\% + 30\% \times 90\% + 30\% \times 90\% = 0.92.$$

课时作业(七十三)

1. C [选手甲在三次中距离投篮中可能都不中, 得 0 分, 中一次, 得 2 分, 中两次, 得 4 分, 中三次, 得 6 分, 故总得分 ξ 的所有可能取值为 0, 2, 4, 6, 所以总得分 ξ 的所有可能取值的和为 12.]

2. B [由离散型随机变量 ξ 的分布列的性质, 得 $0.2+0.1+2m+0.25+m=1$,

$$\therefore 3m=0.45, \text{解得 } m=0.15,$$

$$\therefore P(|\xi| < 2) = P(\xi = -1) + P(\xi = 1) = 0.1 + 2m = 0.1 + 2 \times 0.15 = 0.4.$$

故选 B.]

3. C [因为 $a + \frac{1}{3} + 3a = 1$, 所以 $a = \frac{1}{6}$,

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{3},$$

$$\text{则 } D(X) = \left(0 - \frac{4}{3}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(2 - \frac{4}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{9}.$$

故选 C.]

4. C [根据离散型随机变量概率分布列的性质可得概率和为

$$1, \text{即 } a + \frac{1}{3} + 5a + \frac{1}{6} = 1, \text{解得 } a = \frac{1}{12}.$$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{12} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{12} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3},$$

又因为离散型随机变量 $Y=2X+1$,

$$\text{所以 } E(Y)=2E(X)+1,$$

$$\text{即 } E(Y)=2 \times \frac{5}{3} + 1 = \frac{13}{3}.$$

故选 C.]

5. AC [半小时内经过的车辆数可以一一列举出来, 是离散型随机变量, 选项 A 正确;

体重无法一一列举, 选项 B 错误;

人数可以列举, 选项 C 正确;

某电子元件的寿命可为任意值, 不能一一列举出来, 选项 D 错误.

故选 AC.]

6. **ACD** [由离散型随机变量 X 的分布列的性质得:

$$q = 1 - 0.4 - 0.1 - 0.2 - 0.2 = 0.1,$$

$$E(X) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.2 = 2,$$

$$D(X) = (0-2)^2 \times 0.1 + (1-2)^2 \times 0.4 + (2-2)^2 \times 0.1 + (3-2)^2 \times 0.2 + (4-2)^2 \times 0.2 = 1.8,$$

$\therefore$ 离散型随机变量 Y 满足 $Y = 2X + 1$,

$$\therefore E(Y) = 2E(X) + 1 = 5, D(Y) = 4D(X) = 7.2.$$

故选 ACD.]

7.2 [由题意, 设 X 表示 1 张彩票中奖的金额, 则 $P(X=2) =$

$$\frac{1\ 000}{10\ 000} = 0.1, P(X=10) = \frac{300}{10\ 000} = 0.03, P(X=50) =$$

$$\frac{100}{10\ 000} = 0.01, P(X=100) = \frac{50}{10\ 000} = 0.005,$$

$$P(X=1\ 000) = \frac{5}{10\ 000} = 0.000\ 5,$$

$$P(X=0) = 1 - (0.1 + 0.03 + 0.01 + 0.005 + 0.000\ 5) = 0.854\ 5, \text{ 所以 } X \text{ 的分布列为}$$

X	0	2	10	50	100	1 000
P	0.854 5	0.1	0.03	0.01	0.005	0.000 5

所以 $E(X) = 0 \times 0.854\ 5 + 2 \times 0.1 + 10 \times 0.03 + 50 \times 0.01 + 100 \times 0.005 + 1\ 000 \times 0.000\ 5 = 2$, 即 1 张彩票中奖金额的均值是 2 元.]

8.24 [由题意, 可得 X 的所有可能取值为 190, 150, 110,

$$P(X=190) = \frac{C_2^0 C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}, P(X=150) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}, P(X=$$

$$110) = \frac{C_2^2 C_3^0}{C_5^2} = \frac{1}{10},$$

$$\text{所以 } E(X) = 190 \times \frac{3}{10} + 150 \times \frac{3}{5} + 110 \times \frac{1}{10} = 158,$$

所以标准差为

$$\sqrt{(190-158)^2 \times \frac{3}{10} + (150-158)^2 \times \frac{3}{5} + (110-158)^2 \times \frac{1}{10}} = 24.]$$

9. 解: (1) 根据题意, 可得甲同学 2 门课程均未取得优秀成绩的

$$\text{概率为 } \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{12}.$$

(2) 根据题意, 可得 X 的可能取值为 0, 1, 2,

$$P(X=0) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{12},$$

$$P(X=1) = \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{5}{12},$$

$$P(X=2) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{12} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{17}{12}.$$

10. 解: 若按“项目一”投资, 设获利为 X_1 万元, X_1 的所有可能取值为 300, -150. 则 X_1 的分布列为

X_1	300	-150
P	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$

$$\therefore E(X_1) = 300 \times \frac{7}{9} + (-150) \times \frac{2}{9} = 200 (\text{万元}),$$

$$D(X_1) = (300-200)^2 \times \frac{7}{9} + (-150-200)^2 \times \frac{2}{9} = 35\ 000.$$

若按“项目二”投资, 设获利 X_2 万元, X_2 的所有可能取值为 500, -300, 0. 则 X_2 的分布列为

X_2	500	-300	0
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$

$$\therefore E(X_2) = 500 \times \frac{3}{5} + (-300) \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{15} = 200 (\text{万元}),$$

$$D(X_2) = (500-200)^2 \times \frac{3}{5} + (-300-200)^2 \times \frac{1}{3} + (0-200)^2 \times \frac{1}{15} = 140\ 000.$$

$$\therefore E(X_1) = E(X_2), D(X_1) < D(X_2),$$

这说明虽然项目一、项目二获利的期望值相等, 但项目一更稳妥.

综上所述, 建议该投资公司选择项目一投资.

课时作业(七十四)

1. **C** [超几何分布是在 N 个对象(包含 M 个特定对象)中随机不放回取出 n 个对象,

含有特定对象数 ξ 的概率分布, 被取出的 n 个对象中特定对象数 ξ 是变化的,

任意取出的 4 个号码, 最大号码都只有 1 个, 个数保持不变, X 不服从超几何分布, 故 A 正确;

取出的黑球个数 Y 服从超几何分布, 故 B 正确;

取出 2 个白球的概率为 $P = \frac{C_6^2 C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{7}$, 故 C 错误;

根据已知可得取出四个黑球的总得分最大, 概率为 $P' = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{14}$, 故 D 正确.

故选 C.]

2. **C** [$\because \mu = 0, \therefore P(\xi > 2) = P(\xi < -2) = 0.023,$

$$\therefore P(-2 \leq \xi \leq 2) = 1 - 2 \times 0.023 = 0.954.]$$

3. **A** [若随机变量 $X \sim B\left(4, \frac{2}{3}\right),$

$$P(X=3) = C_4^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{32}{81}.$$

故选 A.]

4. **B** [因为 $E(X) + D(X) = \frac{20}{9},$

$$\text{所以 } 4p + 4p(1-p) = \frac{20}{9}, \text{ 即 } (p-1)^2 = \frac{4}{9},$$

$$\text{因为 } 0 < p < 1, \text{ 所以 } p = \frac{1}{3}.$$

$$\text{故 } P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^4 = \frac{65}{81}.]$$

5. AC [从袋子中有放回的取球 4 次, 则每次取球互不影响, 并且每次取到的黑球概率相等, 又每次取一个球, 取到白球记 0 分, 取到黑球记 1 分, 4 次取球的总分数相当于取到黑球的总个数,

又每次取到黑球的概率为 $\frac{2}{3}$, 由有放回地取 4 次球, 得 $X \sim$

$B\left(4, \frac{2}{3}\right)$, 故 A 正确;

$P(X=2) = C_4^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$, 故 B 错误;

由二项分布期望公式得 $E(X) = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$, 故 C 正确;

由二项分布方差公式得 $D(X) = 4 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$, 故 D 错误.

故选 AC.]

6. AC [对于 A, 因为 X 的正态密度曲线比 Y 的正态密度曲线瘦高, 说明 X 的方差更小, 则 $\sigma_1 < \sigma_2$, 故 A 正确;

对于 B, 因为流水线的误差 $X \sim N(500, 0.01, \sigma_1^2)$, 均值为 500.01, 因此 $P(X \geq 500) > 0.5$,

B 流水线的误差 Y 的均值为 500, 则 $P(Y \geq 500) = 0.5$,

因此 $P(X \geq 500) > P(Y \geq 500)$, 故 B 错误;

因为 $\sigma_1 < \sigma_2$, 所以 $P(X \geq \sigma_1) > P(X \geq \sigma_2)$,

$P(Y \geq \sigma_1) > P(Y \geq \sigma_2)$, 故 C 正确, D 错误.

故选 AC.]

7. 0.648 [该同学通过测试的概率为 $C_3^2 \times 0.6^2 \times 0.4 + C_3^3 \times 0.6^3 = 0.648$.]

8. 25% [设这 12 件产品中的次品数为 x ,

则 $P(\xi=1) = \frac{C_x^1 C_{12-x}^1}{C_{12}^2} = \frac{9}{22}$, 且 $\frac{x}{12} \leq 40\%$,

解得 $x=3$,

故这 12 件产品的次品率为 $\frac{3}{12} = 25\%$.]

9. 解: (1) 设参赛学生的成绩为 X , 由题可得 $X \sim N(70, 100)$, 所以 $\mu=70, \sigma=10$,

则 $P(X > 90) = P(X < 50) = \frac{1}{2} [1 - P(50 \leq X \leq 90)] \approx \frac{1}{2} \times$

$(1 - 0.9545) = 0.02275$,

$12 \div 0.02275 \approx 527$ (人),

因此, 此次参赛学生的总数约为 527 人.

(2) 由 $P(X \geq 80) = P(X \leq 60) = \frac{1}{2} [1 - P(60 < X < 80)] \approx$

$\frac{1}{2} \times (1 - 0.6827) = 0.15865$,

$527 \times 0.15865 \approx 84$ (人).

因此, 此次竞赛成绩为优的学生约为 84 人.

10. 解: (1) 每次抽取后都放回, 则取到黄球的个数 $X \sim B\left(2, \frac{3}{8}\right)$,

所以 $P(X=1) = C_2^1 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{32}$,

$P(X=2) = C_2^2 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$,

所以 $P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{15}{32} + \frac{9}{64} = \frac{39}{64}$.

(2) 每次抽取后都不放回, 则取到黄球的个数 Y 的可能取值为 0, 1, 2,

且 $P(Y=0) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}$, $P(Y=1) = \frac{C_3^1 C_5^1}{C_8^2} = \frac{15}{28}$, $P(Y=2) =$

$\frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}$.

所以 Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

所以 $E(Y) = 0 \times \frac{5}{14} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{3}{28} = \frac{3}{4}$.

阶段检测(十七)

1. A [由 $0.15 + 0.15 + 0.15 + 0.25 + m = 1$, 得 $m = 0.3$, 所以 $P(Y=2) = P(X=4) = 0.3$.

故选 A.]

2. D [甲、乙两人从 4 门课程中各选修 2 门, 共有 $C_4^2 \times C_4^2 = 36$ (种) 选法,

甲、乙所选的课程都相同的共有 $C_4^2 = 6$ (种),

故甲、乙所选的课程中至少有 1 门不相同的概率 $P = 1 -$

$\frac{6}{36} = \frac{5}{6}$.

故选 D.]

3. A [根据题意, 事件 $A =$ “三个点数都不同”, $B =$ “至少出现一个 3 点”,

则 $P(AB) = \frac{C_5^2 A_3^3}{6^3} = \frac{5}{18}$,

$P(A) = \frac{6 \times 5 \times 4}{6^3} = \frac{5}{9}$,

所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{5}{9}} = \frac{1}{2}$.

故选 A.]

4. C [对于 A, 因为 B, C 不一定互斥, 即使 $P(B) + P(C) = 1$, 也无法得到 C 与 B 相互对立, A 错误;

对于 B, 若 $A \subseteq B$, 则 $P(AB) = P(A) = 0.3$, B 错误;

对于 C, 事件 A 与 B 相互独立, 则 $P(AB) = P(A)P(B) = 0.15$,

则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.3 + 0.5 - 0.15 = 0.65$, C 正确;

对于 D, 若事件 A 与 B 相互独立, 则 $\bar{A}, B$ 相互独立,

则 $P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B) = 0.35$, D 错误, 故选 C.]

5. C [根据题意可知, 单个篮球的质量 X 服从正态分布 $N(600, 4^2)$, 则 $\mu=600, \sigma=4$,

由所给公式 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.6827 \Rightarrow P(600 - 4 \leq X \leq 600 + 4) = 0.6827$,

即 $P(596 \leq X \leq 604) = 0.6827 \Rightarrow P(596 \leq X \leq 600) = \frac{1}{2} \times$

$0.6827 = 0.34135$,

所以 $P(X \geq 596) = P(596 \leq X < 600) + P(X \geq 600) = 0.34135 + 0.5 = 0.84135$,

因此被抽检的篮球的质量不小于 596 克的个数约为 $0.84135 \times 300 \approx 252$.

故选 C.]

6. D [因为 $X \sim B(n, p)$, $E(X) = 4$,

所以 $E(X) = np = 4$, 因为 $Y = 2X + 3$,

$D(Y) = 3.2$,

所以 $D(Y) = 4D(X) = 4np(1-p) = 4 \times 4(1-p) = 3.2$, 解得 $p = 0.8, n = 5$.

对于 A, $E(Y) = 2E(X) + 3 = 2 \times 4 + 3 = 11$, 故 A 错误;

对于 B, 因为 $D(Y) = 4D(X) = 3.2$,

所以 $D(X) = \frac{3.2}{4} = 0.8$, 故 B 错误;

对于 C, 由前面求得 $p = 0.8$, 故 C 错误;

对于 D, 因为 $X \sim B(5, 0.8)$,

所以 $P(X = 2) = C_5^2 \times 0.8^2 \times (1 - 0.8)^3 = 10 \times 0.64 \times 0.008 = \frac{32}{625}$, 故 D 正确.

故选 D.]

7. ACD [对于 A, 由题知, 抽奖箱共有五张卡片, 写有“联”字的卡片只有一张,

由古典概型概率公式可知, 从五张中取一张卡片, 中一等奖的概率为 $\frac{1}{5}$, 故 A 正确;

对于 B, 由题知甲同学中二等奖的概率为 $P = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$,

故 B 错误;

对于 C, 记事件 $E =$ “甲同学中奖”, 事件 $F =$ “甲同学中一等奖”,

则 $P(E) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$,

$P(EF) = \frac{1}{5}$,

所以 $P(F|E) = \frac{P(EF)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$,

故 C 正确;

对于 D, 因为三位同学都中奖, 则甲、乙、丙三人抽到的三张卡片为: “联”“欢”“会”,

且抛掷一枚质地均匀的 1 元硬币两次, 硬币均数字一面朝上,

所以三位同学都中奖的概率为 $P = \frac{A_3^3}{A_5^3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{40}$, 故 D

正确.

故选 ACD.]

8. BC [对于选项 A, 因为 $\xi \sim N(20, \sigma^2)$, 且 $P(\xi \geq 22) = 0.1$, 所以 $P(\xi \leq 18) = P(\xi \geq 22) = 0.1$,

所以 $P(18 < \xi < 22) = 1 - 0.1 - 0.1 = 0.8$, 故 A 错误;

对于选项 B, 由 A 知, ξ 不在区间 $(18, 22)$ 的概率为 0.2, 则 $X \sim B(3, 0.2)$, 所以 $E(X) = 0.6$,

所以 $E(3X + 2) = 3E(X) + 2 = 3 \times 0.6 + 2 = 3.8$, 故 B 正确;

对于选项 C, 由 B 知, $D(X) = 3 \times 0.2 \times 0.8 = 0.48$,

因此 $D(\sqrt{5}X) = 5D(X) = 2.4$, 故 C 正确;

对于选项 D, $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0.2)^3 = 1 - 0.8^3 = 0.488$, 故 D 错误.

故选 BC.]

9. $\frac{1}{221} \frac{1}{17}$ [由题意, 设第一次抽到 A 的事件为 B, 第二次抽

到 A 的事件为 C,

则 $P(BC) = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$, $P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$,

所以 $P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{221}}{\frac{1}{13}} = \frac{1}{17}$.]

10. 0.85 [由题意知, A, B, C 题库的比例为 5 : 4 : 3, 各占比

分别为 $\frac{5}{12}, \frac{4}{12}, \frac{3}{12}$, 则根据全概率公式知所求正确率 $P =$

$\frac{5}{12} \times 0.92 + \frac{4}{12} \times 0.86 + \frac{3}{12} \times 0.72 = 0.85$.]

11. 解: (1) 设事件 A, B, C 分别为甲、乙、丙三台机床各自加工的零件是一等品,

$$\begin{cases} P(A\bar{B}) = \frac{1}{4}, \\ P(B\bar{C}) = \frac{1}{12}, \\ P(AC) = \frac{2}{9}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(A)[1 - P(B)] = \frac{1}{4}, \\ P(B)[1 - P(C)] = \frac{1}{12}, \\ P(A)P(C) = \frac{2}{9}. \end{cases}$$

又 $P(A), P(B), P(C)$ 均大于 0,

所以 $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, P(C) = \frac{2}{3}$.

即甲、乙、丙三台机床各自加工的零件是一等品的概率分别

是 $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}$.

(2) 记事件 D 为从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验, 至少有一个一等品, 则 $P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - [1 - P(A)][1 -$

$P(B)][1 - P(C)] = 1 - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

故从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验, 至少有一个一等品的概率为 $\frac{5}{6}$.

12. 解: (1) 记“摸出一球, 放回后再摸出一个球, 两球颜色不同”

为事件 A, 摸出一球是白球的概率为 $\frac{2}{5}$, 摸出一球是黑球的

概率为 $\frac{3}{5}$,

所以 $P(A) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$.

(2) 记事件 B 为“第一次摸到黑球”, 事件 C 为“第二次摸到

黑球”, 依题意知 $P(B) = \frac{3}{5}, P(BC) = \frac{3 \times 2}{5 \times 4} = \frac{3}{10}$,

所以在第一次摸到黑球的条件下, 第二次摸到黑球的概率

为 $P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{1}{2}$.

(3) 由题意知, X 的取值为 0, 1, 2, 则

$P(X = 0) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$,

$P(X = 1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$,

$P(X = 2) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$.

X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{9}{25} + 1 \times \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{4}{5},$$

$$D(X) = \left(0 - \frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{9}{25} + \left(1 - \frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{12}{25} + \left(2 - \frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{4}{25} = \frac{12}{25}.$$

(4) 由题意, Y 的取值为 0, 1, 2, 则

$$P(Y=0) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10},$$

$$P(Y=1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5},$$

$$P(Y=2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$\text{所以 } E(Y) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5},$$

$$D(Y) = \left(0 - \frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{3}{10} + \left(1 - \frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} + \left(2 - \frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{25}.$$

【阶段二】

课后限时练(一)

1. B [因为 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 则 $f(0)=0$,

又因为 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=f\left(\frac{1}{2}-x\right)$, 则 $f(x+1)=f(-x)=-f(x)$,

可得 $f(x+2)=-f(x+1)=f(x)$, 可知 2 为 $f(x)$ 的一个周期, 所以 $f(7)=f(1)=-f(0)=0$.

故选 B.]

2. A [$\because$ 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-2, 0)$ 对称,

$\therefore f(x-4)=-f(-x)$.

又 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

$\therefore -f(-x)=f(x)$, $\therefore f(x-4)=f(x)$, 即函数 $f(x)$ 是周期函数且周期是 4, 则 $f(11)=f(-1)$, $f(12)=f(0)$, $f(21)=f(1)$,

$\because f(x)$ 为奇函数, 且在 $[0, 2)$ 上单调递增,

则 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 内单调递增, $\therefore f(-1) < f(0) < f(1)$, 即 $f(11) < f(12) < f(21)$. 故选 A.]

3. BC [因为 $f(x+1)$ 为奇函数, 所以 $f(-x+1)=-f(x+1)$, 即函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, C 正确; 由函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称可知 $f(-x)=-f(2+x)$,

又因为 $f(x+2)$ 为偶函数, 所以 $f(-x+2)=f(x+2)$, 即函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 则 $f(-x)=f(x+4)$,

所以 $f(x+4)=-f(x+2)$, 即 $f(x+2)=-f(x)$,

所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是周期为 4

的周期函数, 所以 $f(2\ 025)=f(4 \times 506+1)=f(1)$.

又 $f(1)=0$, 所以 $f(2\ 025)=0$, B 正确;

$f(-x)=-f(2+x)=f(x)$, 故 $f(x)$ 是偶函数, A 错误;

对任意的 $x_1, x_2 \in (1, 2)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} >$

0, 不妨设 $x_1 > x_2$,

则 $f(x_1)-f(x_2) > 0$, 由单调性的定义可得函数 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内单调递增,

又由函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内单调递增.

又 $f(\pi)=f(\pi-4)=f(4-\pi)$, $f(e)=f(e-4)=f(4-e)$, $0 < 4-\pi < 4-e < 2$,

所以 $f(4-\pi) < f(4-e)$, 得 $f(\pi) < f(e)$, D 错误.

故选 BC.]

4. $[-1, 0]$ [因为函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x)=f(2-x)$,

则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称.

又因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2]$ 上单调递减, 则 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增,

则由 $f(2x+3) \leq f(1)$, 得 $|2x+3-2| \leq |1-2|$,

即 $|2x+1| \leq 1$, 解得 $-1 \leq x \leq 0$, 则该不等式的解集为 $[-1, 0]$.]

5. 2 499 [因为 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 1)$ 对称, 所以 $f(-x)+f(x+2)=2$,

则 $f(-x)-2(-x)+f(x+2)-2(x+2)=-2$,

即 $g(-x)+g(x+2)=-2$,

又 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 则 $g(x+4)=g(-x)$,

所以 $g(x+4)+g(x+2)=-2$, 即 $g(x+2)+g(x)=-2$,

可得 $g(x+4)=g(x)$, 则 $g(x)$ 是以 4 为周期的周期函数.

因为 $g(0)=f(0)-2 \times 0=0$,

由 $f(-x)+f(x+2)=2$, 令 $x=-1$, 得 $f(1)=1$,

所以 $g(1)=f(1)-2=-1$, $g(2)=-2-g(0)=-2$, $g(3)=g(1)=-1$,

所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(50)=g(1)+g(2)+\cdots+g(50)+2(1+2+\cdots+50)$

$=-4 \times 12-1-2+2\ 550=2\ 499$.]

课后限时练(二)

1. BCD [对于 A, $f(x)=\cos(2x+3)$,

则 $f'(x)=-2\sin(2x+3)$, 故 A 错误;

对于 B, $f(x)=3f'(1)x-x^2+\ln x+\frac{1}{2}$,

求导得 $f'(x)=3f'(1)-2x+\frac{1}{x}$,

当 $x=1$ 时, $f'(1)=3f'(1)-2 \times 1+\frac{1}{1}$, 解得 $f'(1)=\frac{1}{2}$, 故

B 正确;

对于 C, $f(x)=\frac{x}{e^x}$, 则 $f'(x)=\frac{x' \cdot e^x - x \cdot (e^x)'}{(e^x)^2}=\frac{1-x}{e^x}$, 故

C 正确;

对于 D, $f(x)=\sqrt{x}$, 则 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,

故 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{2\Delta x} = \frac{1}{2} f'(1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, 故 D 正确. 故选 BCD.]

2. A [因为 $f(x)=\frac{x-1}{e^x}$, 则 $f'(x)=\frac{e^x - e^x(x-1)}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x}$,

课后限时练(三)

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线斜率为 $f'(0)=2$,
故所求切线方程为 $y=2x-1$, 该直线交 x 轴于点 $(\frac{1}{2}, 0)$,
交 y 轴于点 $(0, -1)$,

因此, 切线与两坐标轴围成的三角形面积为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$. 故选 A.]

3. B $[f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x - a$,

因为函数 $f(x) = \ln x + x^2 - ax$ 在其定义域内单调递增,

所以 $\frac{1}{x} + 2x - a \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 即 $\frac{1}{x} + 2x \geq a$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

因为 $\frac{1}{x} + 2x \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot 2x} = 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立,

所以 $(\frac{1}{x} + 2x)_{\min} = 2\sqrt{2}$, 所以 $a \leq 2\sqrt{2}$.

故选 B.]

4. $(0, \frac{1}{2})$ $[$ 函数 $f(x) = a \ln x - \frac{x-1}{x+1}$,

则 $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{ax^2 + 2(a-1)x + a}{x(x+1)^2} (x > 0)$,

当 $a \leq 0$ 时, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 不存在极值, 不符合题意;

当 $a > 0$ 时, 因为 $f(x)$ 有两个极值点, 所以关于 x 的方程 $ax^2 + 2(a-1)x + a = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不相等的实数根,

$$\text{所以} \begin{cases} -\frac{2(a-1)}{2a} > 0, \\ \Delta = 4(a-1)^2 - 4a^2 > 0, \\ a > 0, \end{cases}$$

解得 $0 < a < \frac{1}{2}$,

故实数 a 的取值范围为 $(0, \frac{1}{2})$.]

5. 解: (1) $f'(x) = a - \sin x$,

$$\text{由题意得} \begin{cases} f(0) = b + 1 = 2, \\ f'(0) = a = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

所以 $a = \frac{1}{2}, b = 1$.

(2) 由(1)得 $f'(x) = \frac{1}{2} - \sin x$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \cos x$,

因为 $x \in [0, 2\pi]$,

当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ 时, $f'(x) \geq 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 当 $\frac{\pi}{6} < x <$

$\frac{5\pi}{6}$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减, 当 $\frac{5\pi}{6} \leq x \leq 2\pi$ 时,

$f'(x) \geq 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

故当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极大值 $f(\frac{\pi}{6}) = 1 + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$,

又 $f(0) = 2, f(2\pi) = 2 + \pi$,

故函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的最大值为 $2 + \pi$.

1. 解: (1) 函数的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 2x - \frac{2}{x}$
 $= \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

则当 $x = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极小值, 且极小值为 $f(1) = 1$, 无极大值.

(2) 证明: 要证 $f(x) \leq x^2 + \frac{2}{x} - 2$, 即证 $-2 \ln x \leq \frac{2}{x} - 2$, 即

证 $\ln x + \frac{1}{x} - 1 \geq 0$,

设 $g(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1 (x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$,

易知当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

则 $g(x) \geq g(1) = 0$, 即 $\ln x + \frac{1}{x} - 1 \geq 0$, 即得证.

2. 解: (1) $g(x) = 2x + \ln x - \frac{a}{x} (x > 0)$, $g'(x) = 2 + \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2}$
 $(x > 0)$.

$\because$ 函数 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增,

$\therefore g'(x) \geq 0$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立,

即 $2 + \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} \geq 0$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立,

$\therefore a \geq -2x^2 - x$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立,

$\therefore a \geq (-2x^2 - x)_{\max}, x \in [1, 2]$.

在 $[1, 2]$ 上, $(-2x^2 - x)_{\max} = -3$,

$\therefore a \geq -3$.

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $[-3, +\infty)$.

(2) $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上存在单调递增区间,

则 $g'(x) > 0$ 在 $[1, 2]$ 上有解,

即 $a > -2x^2 - x$ 在 $[1, 2]$ 上有解,

$\therefore a > (-2x^2 - x)_{\min}$,

又 $(-2x^2 - x)_{\min} = -10$,

$\therefore a > -10$.

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(-10, +\infty)$.

3. 解: 由函数 $f(x) = \ln x - mx^2 + (2-m)x, x > 0$,

知 $f'(x) = \frac{1}{x} - 2mx + 2 - m = -\frac{(mx-1)(2x+1)}{x}$,

当 $m \leq 0$ 时, $mx-1 < 0, 2x+1 > 0$, 那么 $f'(x) > 0$,

此时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 不可能有两个零点, 不符合题意;

当 $m > 0$ 时, $2x+1 > 0$, 令导函数 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{m}$,

当 $x > \frac{1}{m}$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减,

当 $0 < x < \frac{1}{m}$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

又 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$,

要使函数 $f(x)$ 有两个零点, 那么 $f(\frac{1}{m}) = \ln \frac{1}{m} - \frac{1}{m} +$

$(2-m) \cdot \frac{1}{m} = \ln \frac{1}{m} + \frac{1}{m} - 1 > 0$ 恒成立,

设函数 $g(x) = \ln x + x - 1, x > 0$, 那么 $g'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$,

因此 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又因为 $g(1) = 0$,

则 $\frac{1}{m} > 1$, 解得 $0 < m < 1$.

综上所述, m 的取值范围为 $(0, 1)$.

课后限时练(四)

1. A [因为角 α 的终边在射线 $y = -2x (x \leq 0)$ 上,

所以 $\tan \alpha = -2$, 可得 $\sin 2\alpha = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} =$

$-\frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{3}{5}$,

则 $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2\alpha \cos \frac{\pi}{4} - \cos 2\alpha \sin \frac{\pi}{4} = \left(-\frac{4}{5}\right) \times$

$\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$.

故选 A.]

2. ABD [$\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \sin\left(-2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

对于 A, $2\sin 15^\circ \sin 75^\circ = 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$;

对于 B, $\cos 18^\circ \cos 42^\circ - \sin 18^\circ \sin 42^\circ = \cos(18^\circ + 42^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$;

对于 C, 由辅助角公式可得, $\frac{\sin 70^\circ + \sqrt{3} \cos 70^\circ}{4 \cos 490^\circ} =$

$\frac{2\left(\frac{1}{2} \sin 70^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 70^\circ\right)}{4 \cos 130^\circ} = \frac{2 \sin 130^\circ}{4 \cos 130^\circ} = \frac{1}{2} \tan 130^\circ \neq \frac{1}{2}$;

对于 D, 因为 $\tan 45^\circ = \frac{2 \tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ} = 1$,

可得 $\frac{\tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ} = \frac{1}{2}$.

故选 ABD.]

3. C [由题意知 $g(x) = 4 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, $g(x)$ 不是奇函数, 故

A 错误;

$g\left(\frac{\pi}{12}\right) = 4 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} \neq \pm 4$, $g(x)$ 的图象不关于直线

$x = \frac{\pi}{12}$ 对称, 故 B 错误;

由 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, 得 $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, 则 $4 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \in [-2, 4]$, 故 C 正确;

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, 而 $y = \cos x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上不单调,

所以 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上不单调, 故 D 错误. 故选 C.]

4. BCD [由题图知, $A = 2$, $f(0) = -1$, 则 $2 \sin \varphi = -1$,

即 $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$,

因为 $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$,

因为 $x = \frac{5\pi}{6}$ 为 $f(x)$ 的零点, 则 $\frac{5\pi\omega}{6} - \frac{5\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $\omega =$

$1 + \frac{6k}{5}$,

由题图知, $\begin{cases} T > \frac{5\pi}{6}, \\ \frac{3}{4}T < \frac{5\pi}{6}, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \frac{2\pi}{\omega} > \frac{5\pi}{6}, \\ \frac{3}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} < \frac{5\pi}{6}, \end{cases}$

解得 $\frac{9}{5} < \omega < \frac{12}{5}$,

所以 $k = 1, \omega = \frac{11}{5}$, 从而 $f(x) = 2 \sin\left(\frac{11}{5}x - \frac{5\pi}{6}\right)$.

由题设, $g(x) = 2 \sin\left(\frac{11}{5} \times \frac{10}{11}x - \frac{5\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$,

则 $g\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{5\pi}{6}\right]$

$= 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 既不是奇函数也不是偶函数, 所以 A 错误;

$g(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 所以 B 正确;

当 $x = \frac{2\pi}{3}$ 时, $2x - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 则 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{2\pi}{3}$

对称, 所以 C 正确;

将 $g(x)$ 图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度后, 得到

$h(x) = 2 \sin\left[2\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) - \frac{5\pi}{6}\right] = 2 \sin 2x$ 的图象,

当 $x \in \left(\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{12}\right)$ 时, $2x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}\right) \subseteq \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, 所以 $h(x)$ 在

$\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{12}\right)$ 上单调递减, 故 D 正确.

故选 BCD.]

5. $-\frac{37}{40}$ [由 $2 \sin \alpha + \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

得 $\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

又 $\cos \alpha + \frac{1}{2} \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

所以 $\left(\cos \alpha + \frac{1}{2} \cos \beta\right)^2 + \left(\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin \beta\right)^2 = \frac{5}{4} + \cos \alpha \cos \beta +$

$\sin \alpha \sin \beta$

$= \frac{5}{4} + \cos(\alpha - \beta) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{13}{40}$,

所以 $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{37}{40}$.]

6. $-\sqrt{3}$ [由函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0)$ 的部分图

象易知 $A = 2$,

可得 $\frac{3T}{4} = \frac{13\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4}$, 得到 $T = \pi$,

又 $\omega > 0$,

所以 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 解得 $\omega = 2$,

又函数图象经过点 $\left(\frac{13\pi}{12}, 2\right)$,

则有 $2 \times \frac{13\pi}{12} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\varphi = -\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$,

$k \in \mathbf{Z}$,

所以 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{5\pi}{3}\right)$,

则 $f\left(\frac{2\ 025\pi}{2}\right) = 2\sin\left(2\ 025\pi - \frac{5\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.]

课后限时练(五)

1. B [由题意可知, x_1 为 $f(x)$ 的最小值点, x_2 为 $f(x)$ 的最大值点,

则 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$, 即 $T = \pi$,

又 $\omega > 0$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$. 故选 B.]

2. B [当 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{6}, \frac{\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right]$, 若 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增,

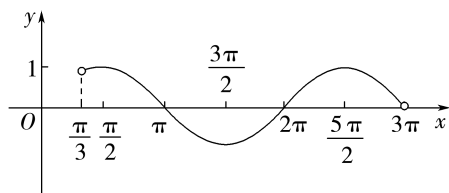
则 $\begin{cases} -\frac{\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \geq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 结合 $\omega > 0$, 解得 $0 < \omega \leq \frac{4}{3}$, 即 ω

$\in \left(0, \frac{4}{3}\right]$.

故选 B.]

3. C [依题意可得 $\omega > 0$, 因为 $x \in (0, \pi)$, 所以 $\omega x + \frac{\pi}{3} \in$

$\left(\frac{\pi}{3}, \omega\pi + \frac{\pi}{3}\right)$, 又 $y = \sin x$, $x \in \left(\frac{\pi}{3}, 3\pi\right)$ 的图象如图所示,



要使函数在区间 $(0, \pi)$ 内恰有三个极值点、两个零点,

则 $\frac{5\pi}{2} < \omega\pi + \frac{\pi}{3} \leq 3\pi$, 解得 $\frac{13}{6} < \omega \leq \frac{8}{3}$, 即 $\omega \in \left(\frac{13}{6}, \frac{8}{3}\right]$. 故

选 C.]

4. ACD [若 $\omega = 2, \varphi = \frac{\pi}{2}$, 则 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$,

所以 $f(x)$ 是最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 的偶函数, A 正确;

若 $\omega = 2$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$,

若 x_0 为 $f(x)$ 的一个零点, 则 $x_0 + \frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的一个极大值点或极小值点, B 错误;

若 $\varphi = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴,

则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\omega - \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1$,

所以 $\frac{\pi}{2}\omega - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 即 $\omega = \frac{3}{2} + 2k (k \in \mathbf{Z})$,

又 $\omega > 0$, 所以 ω 的最小值为 $\frac{3}{2}$, C 正确;

若 $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, 则 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right) (\omega > 0)$, 由正弦函数的单调性,

令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $-\frac{\pi}{4\omega} +$

$\frac{2k\pi}{\omega} \leq x \leq \frac{3\pi}{4\omega} + \frac{2k\pi}{\omega} (k \in \mathbf{Z})$,

又 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调, 所以当 $k = 0$ 时, $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \subseteq$

$\left[-\frac{\pi}{4\omega}, \frac{3\pi}{4\omega}\right]$, 即 $\frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{4\omega}$, 解得 $\omega \leq \frac{9}{2}$, 则 ω 的最大值为 $\frac{9}{2}$, D

正确. 故选 ACD.]

5. C [根据题意可知, 函数 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) (\omega > 0)$ 在

$\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增, 得 $\frac{2\pi}{\omega} \geq 2\left[\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \pi$,

解得 $0 < \omega \leq 2$, 由 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称, 得 $\frac{\pi}{3}\omega -$

$\frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{N}$,

解得 $\omega = 3k + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{N}$, 于是 $k = 0, \omega = \frac{1}{2}, f(x) =$

$\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)$,

所以 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. 故选 C.]

6. [2, 3) [法一: 函数 $f(x) = \cos \omega x - 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个零点, 即 $\cos \omega x = 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个根, 因为 $\omega > 0, x \in [0, 2\pi]$, 所以 $\omega x \in [0, 2\omega\pi]$, 则由余弦函数的图象可知, $4\pi \leq 2\omega\pi < 6\pi$, 解得 $2 \leq \omega < 3$, 即 ω 的取值范围是 $[2, 3)$.

法二: 函数 $f(x) = \cos \omega x - 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个零点, 即 $\cos \omega x = 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个根, 根据函数 $y = \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图象可知, $\cos x = 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有 2 个根, 所以若 $\cos \omega x = 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个根, 则函数 $y = \cos \omega x$ 在 $[0, 2\pi]$ 内至少包含 2 个周期, 但小于 3 个

周期, 即 $\begin{cases} 2 \times \frac{2\pi}{\omega} \leq 2\pi, \\ 3 \times \frac{2\pi}{\omega} > 2\pi, \end{cases}$ 又 $\omega > 0$, 所以 $2 \leq \omega < 3$, 即 ω 的取值范

围是 $[2, 3)$.]

课后限时练(六)

1. B [因为 $a : b : c = 4 : 5 : 6$, 设 $a = 4k, k > 0$, 则 $b = 5k, c =$

$6k$, 由余弦定理的推论得

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25k^2 + 36k^2 - 16k^2}{2 \times 5k \times 6k} = \frac{3}{4}$,

由正弦定理得, $\sin A : \sin C = a : c = 2 : 3$,

则 $\frac{2a \cos A}{c} = 2 \times \frac{a}{c} \times \cos A = 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = 1$.

故选 B.]

2. C [在 $\triangle ABC$ 中, $BC = \frac{AB \sin \angle BAC}{\sin \angle ACB}$

$= \frac{100 \sin 15^\circ}{\sin(45^\circ - 15^\circ)} = 50(\sqrt{6} - \sqrt{2})$,

在 $\triangle BCD$ 中, $\sin \angle BDC = \frac{BC \sin \angle CBD}{CD}$

$= \frac{50(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{50} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} - 1$,

又 $\because \cos \theta = \sin \angle BDC, \therefore \cos \theta = \sqrt{3} - 1$. 故选 C.]

3. BC [因为 $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4$,

所以由正弦定理知 $a : b : c = 2 : 3 : 4$,

令 $a = 2t, b = 3t, c = 4t (t > 0)$,

对于选项 A, $(a+b) : (b+c) : (c+a) = 5t : 7t : 6t = 5 : 7 : 6$, 故 A 错误;

对于选项 B, 因为 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4t^2 + 9t^2 - 16t^2}{2 \times 2t \times 3t} = -\frac{1}{4} < 0$, 所以角 C 为钝角, 故 B 正确;

对于选项 C, 由选项 B 知 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

由正弦定理得 $\frac{c}{\sin C} = 2R$, 所以 $2R = \frac{4t}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{16t}{\sqrt{15}}$, 得到 $R = \frac{8t}{\sqrt{15}} = \frac{8\sqrt{15}t}{15}$,

$$\frac{8t}{\sqrt{15}} = \frac{8\sqrt{15}t}{15},$$

又 $\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}(a+b+c)r$, 得到 $r = \frac{\sqrt{15}t}{6}$, 所以 $5R = 16r$, 故 C 正确;

对于选项 D, $a+b+c = 9t = 18$, 得到 $t = 2$, 所以 $a = 4, b = 6$,

$$\text{又 } \sin C = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = 3\sqrt{15}$, 故 D 错误. 故选 BC.]

4. 1 或 2 [由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $\sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$ 或 $C = \frac{2\pi}{3}$. 当 $C = \frac{\pi}{3}$ 时, $B = \frac{\pi}{2}$, 所以 $b = 2$; 当 $C = \frac{2\pi}{3}$ 时, $B = \frac{\pi}{6}$, 所以 $b = 1$. 综上所述, $b = 2$ 或 $b = 1$.]

5. 解: (1) 若选择①②, 由 $b+c=2a$, 可知 $b \leq a \leq c$ 或 $c \leq a \leq b$, 因此 $B \leq A \leq C$ 或 $C \leq A \leq B$,

结合 $A = \frac{2\pi}{3}$, 可知 $\triangle ABC$ 中有两个钝角, 与三角形内角和定理矛盾, 所以 $\triangle ABC$ 不存在;

若选择②③, 由 $3c \sin B = 4a \sin C$,

得 $3 \sin C \sin B = 4 \sin A \sin C$,

结合 $\sin C \neq 0$, 可得 $\sin B = \frac{4}{3} \sin A = \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} > 1$, 与 $\sin B \leq 1$ 矛盾, 所以 $\triangle ABC$ 不存在;

若选择①③, 根据正弦定理得 $\sin B = \frac{4}{3} \sin A$, 即 $b = \frac{4}{3}a$,

结合 $b+c=2a$, 解得 $c = \frac{2}{3}a$, 此时 $\triangle ABC$ 存在.

综上所述, 选择①③, 可得

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + \frac{4}{9}a^2 - \frac{16}{9}a^2}{2a \cdot \frac{2}{3}a} = -\frac{1}{4}.$$

(2) 若 $a = 2$, 结合(1)的结论可得 $c = \frac{4}{3}$,

$$\text{由 } \cos B = -\frac{1}{4}, \text{ 可得 } \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

6. 解: (1) 因为 $\sin 2B = \frac{\sqrt{3}}{7}b \cos B = 2 \sin B \cos B$,

因为 A 为钝角, 所以 B 为锐角, $\cos B \neq 0$,

$$\text{所以 } \sin B = \frac{\sqrt{3}}{14}b,$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

$$\text{因为 } a = 7, \text{ 所以 } \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{因为 A 为钝角, 所以 } A = \frac{2\pi}{3}.$$

(2) 若选条件①, 因为 $b = 7, a = 7$,

$$\text{所以 } B = A = \frac{2\pi}{3}, \text{ 与 } A + B + C = \pi \text{ 矛盾,}$$

此时 $\triangle ABC$ 不存在, 故条件①不符合要求, 不选①.

$$\text{若选条件②, 因为 } \cos B = \frac{13}{14}, \text{ 所以 } \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{3\sqrt{3}}{14},$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

$$\text{所以 } b = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin B = \frac{7}{\sin \frac{2\pi}{3}} \times \frac{3\sqrt{3}}{14} = 3,$$

$$\text{又 } \sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{13}{14} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{5\sqrt{3}}{14},$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 7 \times 3 \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{若选条件③, 由(1)知 } A = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{因为 } c \sin A = \frac{5}{2}\sqrt{3}, \text{ 所以 } c = 5,$$

$$\text{由余弦定理得 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$\text{即 } 7^2 = b^2 + 5^2 - 2b \times 5 \times \cos \frac{2\pi}{3}, \text{ 解得 } b = 3 \text{ (负值舍去),}$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times$$

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

课后限时练(七)

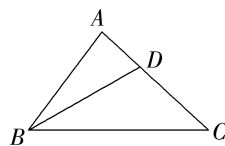
1. A [因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$,

$$A = 60^\circ, AB = 3,$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A =$$

$$\frac{1}{2} \times 3 \times AC \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}, \text{ 解得}$$

$$AC = 8,$$



由余弦定理得 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 9 + 64 - 2 \times 3 \times 8 \cos 60^\circ = 49$, 得 $BC = 7$,

因为 BD 平分 $\angle ABC$, 所以由角平分线的性质可得 $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}$,

即 $\frac{AD}{AC-AD} = \frac{AB}{BC}$, 即 $\frac{AD}{8-AD} = \frac{3}{7}$, 解得 $AD = \frac{12}{5}$.

故选 A.]

2. A [已知 BC 边上的高 $AD = \sqrt{3}$, $a = 4$, $A = \frac{\pi}{3}$,

由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot AD = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$,

可得 $\frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}bc$, 则 $bc = 8$,

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

即 $4^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{3}$, 即 $16 = b^2 + c^2 - bc$,

可得 $16 = (b+c)^2 - 2bc - bc$, 即 $16 = (b+c)^2 - 3bc = (b+c)^2 - 24$,

解得 $b+c = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. 故选 A.]

3. 7 [由题意可得 $\overrightarrow{2AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$,

两边平方可得 $4AM^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = c^2 + b^2 + 2cb \cos A = c^2 + b^2 + c^2 + b^2 - a^2 = 2 \times (49 + 81) - 64 = 196$,

解得 $|\overrightarrow{AM}| = 7$. 所以 AM 的长为 7.]

4. 2 [由余弦定理的推论, 得 $\cos 60^\circ = \frac{AC^2 + 4 - 6}{2 \times 2AC}$, 整理得

$AC^2 - 2AC - 2 = 0$, 得 $AC = 1 + \sqrt{3}$.

因为 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$, 所以 $\frac{1}{2} \times 2AC \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times$

$2AD \sin 30^\circ + \frac{1}{2}AC \cdot AD \sin 30^\circ$,

所以 $AD = \frac{2\sqrt{3}AC}{AC+2} = \frac{2\sqrt{3} \times (1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} = 2$.]

5. 解: 法一: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $A+B=\pi-C$,

因为 $A+B=3C$, 所以 $3C=\pi-C$, 所以 $C=\frac{\pi}{4}$.

因为 $2\sin(A-C)=\sin B$,

所以 $2\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}-A\right)$,

展开并整理得 $\sqrt{2}(\sin A - \cos A) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos A + \sin A)$,

得 $\sin A = 3\cos A$,

又 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, 且 $\sin A > 0$,

所以 $\sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

(2) 由正弦定理 $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$,

得 $BC = \frac{AB}{\sin C} \cdot \sin A = \frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = 3\sqrt{5}$,

由余弦定理 $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos C$,

得 $5^2 = AC^2 + (3\sqrt{5})^2 - 2AC \cdot 3\sqrt{5} \cos \frac{\pi}{4}$,

整理得 $AC^2 - 3\sqrt{10}AC + 20 = 0$,

解得 $AC = \sqrt{10}$ 或 $AC = 2\sqrt{10}$.

由 (1) 得, $\tan A = 3 > \sqrt{3}$, 所以 $\frac{\pi}{3} < A < \frac{\pi}{2}$,

又 $A+B=\frac{3\pi}{4}$, 所以 $B > \frac{\pi}{4}$,

即 $C < B$, 所以 $AB < AC$, 所以 $AC = 2\sqrt{10}$.

设 AB 边上的高为 h , 则 $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \sin C$,

即 $5h = 2\sqrt{10} \times 3\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$,

解得 $h = 6$,

所以 AB 边上的高为 6.

法二: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $A+B=\pi-C$,

因为 $A+B=3C$, 所以 $3C=\pi-C$, 所以 $C=\frac{\pi}{4}$.

因为 $2\sin(A-C)=\sin B$,

所以 $2\sin(A-C)=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)$,

所以 $2\sin A \cos C - 2\cos A \sin C = \sin A \cos C + \cos A \sin C$,

所以 $\sin A \cos C = 3\cos A \sin C$,

易得 $\cos A \cos C \neq 0$,

所以 $\tan A = 3 \tan C = 3 \tan \frac{\pi}{4} = 3$, 又 $\sin A > 0$,

所以 $\sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

(2) 由 (1) 知 $\sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\tan A = 3 > 0$, 所以 A 为锐角,

所以 $\cos A = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

所以 $\sin B = \sin\left(\frac{3\pi}{4}-A\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos A + \sin A)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

由正弦定理 $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$,

得 $AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{5 \times \frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{10}$,

故 AB 边上的高为 $AC \cdot \sin A = 2\sqrt{10} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = 6$.

课限时练(八)

1. A [设 $AB = x$, $x > 0$, 由余弦定理的推论可得

$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{x^2 + 8}{8x} = \frac{x}{8} + \frac{1}{x}$

$\geq 2\sqrt{\frac{x}{8} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 当且仅当 $x = 2\sqrt{2}$ 时, 等号成立.

因为 $0 < B < \pi$, 则 $0 < B \leq \frac{\pi}{4}$. 故选 A.]

2. C [由正弦定理, 得 $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin 2B}{\sin B} = \frac{2\sin B \cos B}{\sin B} =$

$2\cos B$. 因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,

则 $\begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < C = 2B < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} < B+C = 3B < \pi, \end{cases}$ 所以 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{4}$,

所以 $2\cos B \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, 即 $\frac{AB}{AC}$ 的取值范围是 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. 故选 C.]

3. CD [对于 A, 因为 $\triangle ABC$ 中, $c=4, A=\frac{\pi}{3}, a=2\sqrt{3}$,

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sin C}$,

故 $\sin C=1$, 所以 $C=\frac{\pi}{2}$, 故 $\triangle ABC$ 有一解, 故 A 错误;

对于 B, 因为 $A=\frac{\pi}{3}, c=4, \triangle ABC$ 为钝角三角形,

当 B 为钝角时, $b^2 > a^2 + c^2 > c^2 = 16$, 即 $b > 4$, 故 B 错误;

对于 C, 因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,

$$\text{则} \begin{cases} 0 < C < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - C < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

可得 $C \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin C \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\frac{1}{\sin C} \in (1, 2)$,

又因为 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 即 $\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sin C}$,

可得 $a = \frac{4}{\sin C} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin C} \in (2\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$, 故 C 正确;

对于 D, 由正弦定理可得 $\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin B \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

当 $B = \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{b}{a}$ 的最大值是 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故 D 正确.

故选 CD.]

4. BCD [对于 A, 由 $(a+b)(\sin B - \sin A) = c(\sin B - \sin C)$, 结合正弦定理可得 $(a+b)(b-a) = c(b-c)$, 整理得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$,

所以 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$, 结合 $A \in (0, \pi)$, 得 $A = \frac{\pi}{3}$, 故 A 项错误;

对于 B, 因为 $a = \sqrt{3}$, 根据余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 3$,

即 $b^2 + c^2 - bc = 3$, 所以 $(b+c)^2 = 3 + 3bc \leq 3 + \frac{3}{4}(b+c)^2$,

解得 $(b+c)^2 \leq 12$, 故 $0 < b+c \leq 2\sqrt{3}$, 当且仅当 $b=c$ 时, 等号成立.

所以 $\triangle ABC$ 的周长 $a+b+c \leq 3\sqrt{3}$, 当 $b=c=\sqrt{3}$ 时, $\triangle ABC$ 的周长的最大值为 $3\sqrt{3}$, 故 B 项正确;

对于 C, 由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$,

所以 $b = 2\sin B \leq 2$,

当且仅当 $B = \frac{\pi}{2}$ 时, b 取最大值, 此时 $c = \sqrt{b^2 - a^2} =$

$\sqrt{4-3}=1$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 C 项正确;

对于 D, 由前面的结论, 可得 $b = 2\sin B, c = 2\sin C$. 所以 $b-c = 2\sin B - 2\sin C = 2\sin B - 2\sin(B+A) = 2\sin B -$

$2\left(\frac{1}{2}\sin B + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right) = \sin B - \sqrt{3}\cos B = 2\sin\left(B - \frac{\pi}{3}\right)$,

因为 $0 < B < \frac{2\pi}{3}$, 即 $-\frac{\pi}{3} < B - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3}$,

所以 $\sin\left(B - \frac{\pi}{3}\right) \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

可得 $b-c = 2\sin\left(B - \frac{\pi}{3}\right) \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, 故 D 项正确.

故选 BCD.]

5.6 4 [若 $a=4, h=\frac{3}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ah = 3$,

由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 3$, 可得 $bc = \frac{6}{\sin A} \geq 6$,

当 $\sin A = 1$, 即 $A = \frac{\pi}{2}$ 时, 等号成立,

所以 bc 的最小值为 6.

若 $h = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ah = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2$, 可得

$$bc = \frac{\sqrt{3}a^2}{6\sin A}.$$

根据余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 得 $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cos A$,

$$\text{所以 } \frac{b^2 + c^2}{bc} = \frac{a^2 + 2bc \cos A}{bc} = \frac{a^2}{bc} + 2\cos A = \frac{a^2}{\frac{\sqrt{3}a^2}{6\sin A}} +$$

$$2\cos A = 2\sqrt{3}\sin A + 2\cos A = 4\sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right),$$

当 $A + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ 时, 即 $A = \frac{\pi}{3}$ 时, $\frac{b^2 + c^2}{bc}$ 取得最大值 4.]

6. 解: (1) 由余弦定理的推论, 得 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2b+c}{2a}$, 即 $a^2 +$

$$b^2 - c^2 = 2b^2 + bc,$$

整理得 $b^2 + c^2 - a^2 = -bc$, 所以 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}$,

又 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{2\pi}{3}$.

(2) 因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}b \cdot AD \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}c \cdot$

$$AD \sin \frac{\pi}{3},$$

所以 $bc = 3b + 3c$. 因为 $bc = 3b + 3c \geq 6\sqrt{bc}$, 即 $bc \geq 36$,

当且仅当 $b=c=6$ 时等号成立,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}bc \geq 9\sqrt{3}$, 故 $\triangle ABC$ 面积的最小值为 $9\sqrt{3}$.

课限时练(九)

1. B [因为等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = a_1 + d = 2$,

$$S_5 = 5a_4 - 10,$$

所以 $5a_1 + 10d = 5a_1 + 15d - 10$,

解得 $a_1 = 0, d = 2$, 则 $a_5 = 8$.

故选 B.]

2. B [由 $\left\{b_n + \frac{1}{2}\right\}$ 为“对奇数列”, 得 $b_{n+1} + \frac{1}{2} = 3\left(b_n +$

$$\frac{1}{2}\right) - 1, \text{可化为 } b_{n+1} = 3b_n,$$

由 $b_1 = 3$, 可得数列 $\{b_n\}$ 是首项和公比均为 3 的等比数列,

$$\text{则 } b_{2\,025} = 3 \times 3^{2\,024} = 3^{2\,025}.$$

故选 B.]

3. ABD [由题意得 $a_{n+1} + 2^{n+1} = 3a_n + 2^n + 2^{n+1} = 3a_n + 3 \cdot 2^n = 3(a_n + 2^n)$,

又 $a_1 + 2 = 4 \neq 0$, $\frac{a_{n+1} + 2^{n+1}}{a_n + 2^n} = 3$, 所以数列 $\{a_n + 2^n\}$ 是以 4 为首项, 3 为公比的等比数列,

所以 $a_n + 2^n = 4 \times 3^{n-1}$, $a_n = 4 \times 3^{n-1} - 2^n$, $S_n = \frac{4(1-3^n)}{1-3} - \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2(3^n - 2^n)$, 故 A 正确, C 错误, D 正确;

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} + 1 = \frac{3a_n + 2^n}{2^{n+1}} + 1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \left(\frac{a_n}{2^n} + 1 \right),$$

又因为 $\frac{a_1}{2^1} + 1 = 2 \neq 0$, 故数列 $\left\{ \frac{a_n}{2^n} + 1 \right\}$ 是以 2 为首项, $\frac{3}{2}$ 为公比的等比数列, B 正确. 故选 ABD.]

4. ACD [对于 A, 由 $a_3 = a_1 q^2$, $a_2 = a_1 q$, 可得 $2a_1 q^2 = a_1 + a_1 q$, 由于 $a_1 > 0$, 所以 $2q^2 - q - 1 = 0$, 得 $q = -\frac{1}{2}$ ($q = 1$ 舍去), A 正确;

对于 B, $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{2a_1}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right]$, 当 n 为偶数时, $0 < 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n < 1$, 又 $a_1 > 0$, 所以 $\frac{2a_1}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right] < \frac{2a_1}{3}$, B 错误;

对于 C, 因为 $S_{n+2} = S_n + a_{n+1} + a_{n+2}$, $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, 所以 $2S_{n+2} - S_{n+1} - S_n = a_{n+1} + 2a_{n+2} = a_{n+1}(1+2q)$, 由 A 可知, $q = -\frac{1}{2}$, 故 $a_{n+1}(1+2q) = 0$, 故 $2S_{n+2} = S_{n+1} + S_n$, C 正确;

对于 D, 记 $T_n = \sum_{k=1}^n S_k$, 由于 $S_k = \frac{2a_1}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^k \right]$, 则 $T_n = \frac{2na_1}{3} - \frac{2a_1}{3} \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2} \right)^k = \frac{2na_1}{3} + \frac{2a_1}{9} \left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right]$, 显然 $1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n > 0$, 故 $T_n > \frac{2na_1}{3}$, D 正确. 故选 ACD.]

5. $\frac{41}{78}$ [S_n, T_n 分别是等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和,

$$\text{则 } b_3 + b_{18} = b_6 + b_{15} = b_{10} + b_{11},$$

$$\text{故 } \frac{a_{10}}{b_3 + b_{18}} + \frac{a_{11}}{b_6 + b_{15}} = \frac{a_{10}}{b_{10} + b_{11}} + \frac{a_{11}}{b_{10} + b_{11}} = \frac{a_{10} + a_{11}}{b_{10} + b_{11}} = \frac{S_{20}}{T_{20}} = \frac{2 \times 20 + 1}{4 \times 20 - 2} = \frac{41}{78}.]$$

6. 2 或 6 [$\because$ 在等比数列中, $a_3 = 2, S_{12} = 4S_6$,

$$\therefore \text{若公比 } q = 1, \text{ 则 } S_{12} \neq 4S_6,$$

$$\therefore q \neq 1,$$

$$\therefore S_{12} = 4S_6,$$

$$\therefore \frac{a_1(1-q^{12})}{1-q} = 4 \times \frac{a_1(1-q^6)}{1-q},$$

$$\text{即 } 1 - q^{12} = 4(1 - q^6) = (1 + q^6)(1 - q^6),$$

$$\text{即 } (1 - q^6)(q^6 - 3) = 0,$$

$$\therefore q^6 = 1 \text{ 或 } q^6 = 3, \text{ 又 } q \neq 1,$$

$$\therefore q = -1 \text{ 或 } q^6 = 3,$$

$$\text{当 } q = -1 \text{ 时, } a_9 = a_3 q^6 = 2 \times 1 = 2,$$

$$\text{当 } q^6 = 3 \text{ 时, } a_9 = a_3 q^6 = 2 \times 3 = 6.]$$

7. 解: (1) 证明: 由 $a_{n+1} + a_n = 3 \times 2^n$, 可得 $a_{n+1} - 2^{n+1} = -(a_n - 2^n)$. 因为 $a_1 = 1$, 所以 $a_1 - 2 = -1$. 从而 $a_{n+1} - 2^{n+1} = -(a_n - 2^n) \neq 0$. 于是 $\frac{a_{n+1} - 2^{n+1}}{a_n - 2^n} = -1$, 所以 $\{a_n - 2^n\}$ 是首项和

公比均为 -1 的等比数列.

(2) 设数列 $\{a_n - 2^n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则 $T_n = \frac{(-1) \times [1 - (-1)^n]}{2} = \frac{(-1)^n - 1}{2}$. 故 $S_n = T_n + (2 + 2^2 + \cdots + 2^n) = \frac{(-1)^n - 1}{2} + 2^{n+1} - 2 = \frac{(-1)^n}{2} + 2^{n+1} - \frac{5}{2}$.

当 n 为偶数时, $S_n = \frac{1}{2} + 2^{n+1} - \frac{5}{2} = 2^{n+1} - 2$;

当 n 为奇数时, $S_n = \frac{-1}{2} + 2^{n+1} - \frac{5}{2} = 2^{n+1} - 3$.

综上所述, $S_n = \begin{cases} 2^{n+1} - 2, & n \text{ 为偶数,} \\ 2^{n+1} - 3, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$

课后限时练(十)

1. C [因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2}$,

$$\text{所以当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 \\ = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{n(n+1)},$$

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 1$ 也满足上式,

$$\text{所以 } a_n = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\text{则 } \{a_n\} \text{ 的前 6 项和为 } 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) \\ = 2 \left(1 - \frac{1}{7} \right) = \frac{12}{7}.$$

故选 C.]

2. ABD [在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_{n+2}$, $a_1 = 2, a_2 = 8$,

S_n 是数列 $\{\log_2 a_n\}$ 的前 n 项和.

$$\text{由 } a_n = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_{n+2}, \text{ 得 } a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n),$$

则数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是首项为 $a_2 - 2a_1 = 4$, 公比为 2 的等比数列, A 正确;

$$a_{n+1} - 2a_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}, \text{ 即 } a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}, \text{ 则 } \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} =$$

$$\frac{a_n}{2^n} + 1,$$

所以数列 $\left\{ \frac{a_n}{2^n} \right\}$ 是首项为 $\frac{a_1}{2^1} = 1$, 公差为 1 的等差数列, B 正确;

$$\frac{a_n}{2^n} = 1 + (n-1) \times 1 = n, \text{ 即 } \frac{a_n}{2^n} = 2^n,$$

$$\text{所以 } a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_{10}}{10} = 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{10} =$$

$$\frac{2(1-2^{10})}{1-2} = 2046, \text{ C 错误;}$$

$$\text{由 } \log_2 a_n = \log_2 (n \cdot 2^n) = n + \log_2 n,$$

$$\text{可得 } S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \log_2 (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5) = 15 + \log_2 120 < 15 + 7 = 22, \text{ D 正确.}$$

故选 ABD.]

3. $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$ [在数列 $\{a_n\}$ 中, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_2} + \frac{1}{3a_3} + \cdots + \frac{1}{na_n} = \frac{n(n+3)}{4}$,

课后限时练(十一)

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_2} + \frac{1}{3a_3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)a_{n-1}} \\ = \frac{(n-1)(n+2)}{4},$$

$$\text{两式相减得 } \frac{1}{na_n} = \frac{n+1}{2}, \text{ 解得 } a_n = \frac{2}{n(n+1)},$$

$$\text{而 } \frac{1}{a_1} = 1, \text{ 即 } a_1 = 1 \text{ 满足上式,}$$

$$\text{所以 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = \frac{2}{n(n+1)}.$$

$$4. \text{解: (1) 由题意可得 } \begin{cases} S_5 = 5a_3 = 15, \\ a_4^2 = a_2a_8, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} a_1 + 2d = 3, \\ (a_1 + 3d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 7d), \end{cases} \text{ 且 } d \neq 0, \text{ 解得 } a_1 = d =$$

$$1, \text{ 所以数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式 } a_n = 1 + n - 1 = n.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可得 } b_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数,} \\ 2^n, n \text{ 为偶数,} \end{cases} \text{ 所以 } T_{2n} = b_1 + b_2 + \cdots +$$

$$b_{2n} = (b_1 + b_3 + \cdots + b_{2n-1}) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_{2n}) = (1 +$$

$$3 + \cdots + 2n - 1) + (2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{2n}) = \frac{n(1+2n-1)}{2} +$$

$$\frac{4(1-4^n)}{1-4} = n^2 + \frac{4}{3}(4^n - 1), \text{ 所以 } T_{2n} = n^2 + \frac{4}{3}(4^n - 1).$$

$$5. \text{解: (1) 因为 } S_1 = 2a_2 - 3, \text{ 且 } S_1 = a_1 = \frac{3}{2}, \text{ 所以 } a_2 = \frac{9}{4},$$

$$\text{由 } S_n = 2a_{n+1} - 3, \text{ 可得 } S_{n-1} = 2a_n - 3 (n \geq 2),$$

$$\text{两式相减得 } a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_{n+1} - 2a_n,$$

$$\text{因为 } a_n \neq 0, \text{ 所以当 } n \geq 2 \text{ 时, } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{2},$$

$$\text{又 } \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{2}, \text{ 综上, 当 } n \geq 1 \text{ 时, } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{2},$$

$$\text{所以数列 } \{a_n\} \text{ 是首项和公比均为 } \frac{3}{2} \text{ 的等比数列, 即 } a_n =$$

$$a_1 q^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

$$(2) \text{ 由题意, } b_n = (n+1) \left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

$$\text{所以 } T_n = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^1 + 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \cdots + (n+1) \times \left(\frac{3}{2}\right)^n, \text{ ①}$$

$$\frac{3}{2} T_n = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \cdots + (n+1) \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}, \text{ ②}$$

$$\text{①} - \text{②, 得 } -\frac{1}{2} T_n = 3 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^n -$$

$$(n+1) \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$$

$$= 3 + \frac{\frac{9}{4} \times \left[1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right]}{1 - \frac{3}{2}} - (n+1) \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{9}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - (n+1) \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$$

$$= -\frac{3}{2} + (1-n) \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1},$$

$$\text{所以 } T_n = 3 + 2(n-1) \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}.$$

$$1. \text{AC } [\text{数列 } \{a_n\} \text{ 满足 } a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 2n,$$

$$\text{可得 } a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = 2 +$$

$$2 + 4 + \cdots + 2(n-1) = 2 + n(n-1) = n^2 - n + 2,$$

$$\text{对 } n=1 \text{ 上式也成立, 故 A 正确;}$$

$$b_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n,$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } b_n = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{n-1} -$$

$$a_n) = -2 - 6 - \cdots - 2(n-1) = -\frac{n^2}{2}, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } b_n = b_{n-1} + a_n = -\frac{(n-1)^2}{2} + n^2 - n +$$

$$2 = \frac{n^2 + 3}{2},$$

$$\text{由 } n \text{ 为奇数和偶数的通项公式 } b_n, \text{ 可得 } \{b_n\} \text{ 不存在周期性,}$$

$$\text{故 B 错误;}$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } b_n = \frac{n^2 + 3}{2},$$

$$\text{即有 } b_{2n-1} = \frac{(2n-1)^2 + 3}{2} = 2(n^2 - n + 1),$$

$$\text{可得 } \{b_n\} \text{ 的前 } 2n \text{ 项中奇数项的和为 } b_1 + b_3 + \cdots + b_{2n-1} =$$

$$2 \times \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{2} n(n+1) + n \right] = \frac{2n(n^2 + 2)}{3}, \text{ 故 D}$$

$$\text{错误.}$$

$$\text{故选 AC.}]$$

$$2. \text{BCD } [\text{对于 A, } a_1 = 1, \text{ 且 } a_{n+1} = 2a_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*), \text{ 则 } a_{n+1} +$$

$$1 = 2(a_n + 1) (n \in \mathbf{N}^*), \text{ 即数列 } \{a_n + 1\} \text{ 是以 } a_1 + 1 = 2 \text{ 为首}$$

$$\text{项, 2 为公比的等比数列, 故 } a_n + 1 = 2^n, \text{ 即 } a_n = 2^n - 1, \text{ 则}$$

$$a_{n+1} = 2^{n+1} - 1, \text{ 故 A 错误; 对于 B, } b_n = \log_2(a_n + 1) =$$

$$\log_2 2^n = n, \text{ 故 B 正确; 对于 C, 新数列 } \{c_n\} \text{ 为 } 1, 1, 1, 3, 2, 2, 2,$$

$$2, 7, \cdots, \text{ 因为 } \frac{2(1-2^9)}{1-2} = 1\ 022, \frac{2(1-2^{10})}{1-2} = 2\ 046, \text{ 所以数列}$$

$$\{c_n\} \text{ 从 } a_1 = 1 \text{ 到 } a_{10} = 1\ 023 \text{ 共有 } 1\ 022 + 10 = 1\ 032 \text{ (项), 到}$$

$$a_{11} \text{ 共有 } 2\ 046 + 11 = 2\ 057 \text{ (项). 又 } a_{10} \text{ 和 } a_{11} \text{ 之间有 } 2^{10} \text{ 个}$$

$$10, \text{ 故 } c_{2\ 024} = 10, \text{ 故 C 正确; 对于 D, 由 C 可得 } S_{2\ 024} =$$

$$\frac{2(1-2^{10})}{1-2} - 10 + (1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + \cdots + 9 \times 2^9) + (2\ 024 -$$

$$1\ 032) \times 10 = 2\ 036 + 8\ 194 + 9\ 920 = 20\ 150, \text{ 故 D 正确.}$$

$$\text{故选 BCD.}]$$

$$3. \text{D } [\text{依题意, 由 } a_1 = 1, a_2 = 2 \text{ 及 } a_n a_{n+1} a_{n+2} = 8, \text{ 可得当 } n=1$$

$$\text{时, } a_1 a_2 a_3 = 1 \times 2 \times a_3 = 8, \text{ 解得 } a_3 = 4, \text{ 当 } n=2 \text{ 时, } a_2 a_3 a_4 =$$

$$2 \times 4 \times a_4 = 8, \text{ 解得 } a_4 = 1, \text{ 当 } n=3 \text{ 时, } a_3 a_4 a_5 = 4 \times 1 \times a_5 =$$

$$8, \text{ 解得 } a_5 = 2, \text{ 当 } n=4 \text{ 时, } a_4 a_5 a_6 = 1 \times 2 \times a_6 = 8, \text{ 解得 } a_6 =$$

$$4, \cdots, \text{ 所以数列 } \{a_n\} \text{ 是以 3 为最小正周期的周期数列, 所以}$$

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 1 + 2 + 4 = 7, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 因为 } 2\ 025 \div 3 = 675,$$

$$\text{所以 } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2\ 025} = 7 \times 675 = 4\ 725. \text{ 故}$$

$$\text{选 D.}]$$

$$4. 819 \text{ } [\text{因为 } S_n = 2n^2 + 3n, \text{ 当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = 5; \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时,}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2 + 3n) - [2(n-1)^2 + 3(n-1)] = 4n + 1$$

$$(n \geq 2). \text{ 又 } a_1 = 5 \text{ 也满足 } a_n = 4n + 1, \text{ 所以 } a_n = 4n + 1.$$

$$\text{因为 } 2T_n = 3b_n - 3, \text{ 当 } n=1 \text{ 时, } 2b_1 = 3b_1 - 3, \text{ 解得 } b_1 = 3; \text{ 当}$$

$$n \geq 2 \text{ 时, } \begin{cases} 2T_n = 3b_n - 3, \\ 2T_{n-1} = 3b_{n-1} - 3, \end{cases} \text{ 两式相减, 得 } 2b_n = 3b_n - 3b_{n-1},$$

$$\text{即 } b_n = 3b_{n-1}, \text{ 所以 } \{b_n\} \text{ 是以 } b_1 = 3 \text{ 为首项, 3 为公比的等比}$$

数列, 则 $b_n = 3^n$. 因为 $b_1 = 3, b_2 = 9 = 4 \times 2 + 1 = a_2, b_3 = 27, b_4 = 81 = 4 \times 20 + 1 = a_{20}, b_5 = 243, b_6 = 729 = 4 \times 182 + 1 = a_{182}$, 所以 $c_1 = 9, c_2 = 81, c_3 = 729$, 故 $c_1 + c_2 + c_3 = 819$.]

5. 解: (1) 当 $n=1$ 时, $a_2 + a_1 = 12$, 所以 $a_2 = 8$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n + a_{n-1} = 8n - 4$, 所以 $a_{n+1} - a_{n-1} = 8$,

则当 n 为偶数时, $a_n = 8 + \frac{n-2}{2} \times 8 = 4n$;

当 n 为奇数时, $a_n = 4 + \frac{n-1}{2} \times 8 = 4n$,

综上, $a_n = 4n$.

(2) 设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 H_n ,

由 (1) 可知 $a_{200} = 800, b_9 = 2^9 = 512$,

当 $n \leq 200$ 时, $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项为 $4, 8, 16, \dots, 512$, 共 8 项, 所以数列 $\{c_n\}$ 的前 192 项和 $T_{192} = S_{200} - (H_9 - 2) =$

$$\frac{200 \times (4 + 800)}{2} - \left[\frac{2 \times (1 - 2^9)}{1 - 2} - 2 \right] = 80\,400 - 1\,020 = 79\,380.$$

课后限时练(十二)

1. B [∵ 几何体是从棱长为 2 的正方体中截去以正方体某个顶点为球心, 2 为半径的 $\frac{1}{8}$ 球后的剩余部分,

∴ 表面积 = 正方体表面积 - 三个半径为 2 的 $\frac{1}{4}$ 圆 + 2 为半径的 $\frac{1}{8}$ 球面,

$$\text{则 } S = 6 \times 2^2 - 3 \times \frac{1}{4} \times \pi \times 2^2 + \frac{1}{8} \times 4 \times \pi \times 2^2 = 24 - \pi.$$

故选 B.]

2. BCD [因为圆柱内有一个棱长为 2 的正方体, 正方体的各个顶点在圆柱的上、下底面圆周上, 所以作出示意图,

正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 和圆柱 O_1O_2 , 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的中心为 O .

对于选项 A, 由题意可知, $AC = 2\sqrt{2}, AA_1 = 2$,

所以圆柱的轴截面不为正方形,

故 A 错误;

对于选项 B, 因为正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的中心 O 也为圆柱 O_1O_2 的中心,

根据对称性可知, 过正方体中心的平面将圆柱分成体积相等的两部分, 故 B 正确;

对于选项 C, 可知圆柱的底面半径为 $\sqrt{2}$, 母线长为 2,

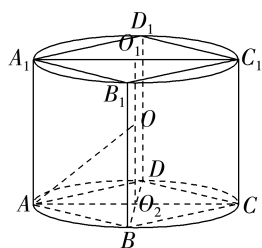
所以圆柱的表面积为 $2 \times \pi \times (\sqrt{2})^2 + 2\pi \times \sqrt{2} \times 2 = 4(\sqrt{2} + 1)\pi$, 故 C 正确;

对于选项 D, 可知该球的球心为 O ,

则 $OA = \sqrt{O_2A^2 + O_2O^2} = \sqrt{3}$, 即球的半径为 $\sqrt{3}$,

所以该球的体积是 $\frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3 = 4\sqrt{3}\pi$, 故 D 正确.

故选 BCD.]



3. D [设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 r , 圆心为 O_1 , 设外接球球心为 O , 半径为 R . 因为 $BC = \sqrt{3}, \angle BAC = \frac{\pi}{3}$, 在 $\triangle ABC$ 中, 由正

$$\text{弦定理有 } \frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 = 2r \Rightarrow r = 1,$$

$$\text{则 } O_1A = r = 1, OO_1 = \frac{1}{2}AA_1 = \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } R^2 = r^2 + OO_1^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow R = 2,$$

$$\text{所以外接球的体积 } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 2^3 = \frac{32\pi}{3}.$$

故选 D.]

4. AC [由题意可知 AB, AC, AP 两两垂直, 且 $PA = AB = AC = 2$,

∴ 三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径 R 满足 $(2R)^2 = AB^2 + AC^2 + AP^2 = 12$,

∴ 三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 $4\pi R^2 = 12\pi$,

∴ A 选项正确, B 选项错误;

由题意可得三棱锥 $P-ABC$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$,

三棱锥 $P-ABC$ 的表面积 $S = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 3 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{3}$,

设三棱锥 $P-ABC$ 内切球的半径为 r ,

$$\text{根据等体积法可得 } V = \frac{1}{3}Sr,$$

$$\therefore r = \frac{3V}{S} = \frac{4}{6 + 2\sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}, \therefore \text{C 选项正确, D 选项错误.}$$

故选 AC.]

5. C [如图, 过点 P 作 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 则 O 为正方形 $ABCD$ 的中心, 连接 OA . 因为 $AB = 6$, 所以 $OA = 3\sqrt{2}$, 所以 $OP = \sqrt{PA^2 - OA^2} = \sqrt{25 - 18} = \sqrt{7}$, 则四棱锥 $P-ABCD$

的体积 $V = \frac{1}{3} \times 6^2 \times \sqrt{7} = 12\sqrt{7}$, 四棱锥 $P-ABCD$ 的表面积

$$S = 6 \times 6 + \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{25 - 9} \times 4 = 84. \text{ 设四棱锥 } P-ABCD \text{ 内}$$

切球的半径为 r , 内切球的球心为 O' , 由 $V = V_{O'-ABP} + V_{O'-BCP} + V_{O'-CDP} + V_{O'-ADP} + V_{O'-ABCD}$, 可得 $V = \frac{1}{3}S \cdot r$, 即

$$12\sqrt{7} = \frac{1}{3} \times 84r, \text{ 解得 } r = \frac{3\sqrt{7}}{7}, \text{ 故四棱锥 } P-ABCD \text{ 内切球的}$$

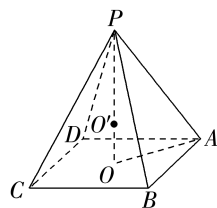
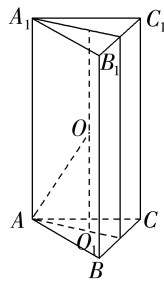
表面积是 $4\pi r^2 = \frac{36\pi}{7}$. 故选 C.]

6. $\frac{37\pi}{3}$ [设球 O 的半径为 R , 由题意知球 O 的表面积 $S = 4\pi R^2 = 100\pi$, 所以 $R = 5$.

设圆台的上底面圆半径为 $3r$, 则下底面圆半径为 $4r$.

易知圆台的外接球球心 O 必在其旋转轴上.

记圆台的旋转轴与上底面的交点为 M .



如图1,当球心 O 在圆台外时,设圆台的高为 h ,

$$\begin{cases} (3r)^2 + OM^2 = 5^2, \\ (4r)^2 + (OM-h)^2 = 5^2, \\ h^2 + (4r-3r)^2 = (\sqrt{2})^2, \end{cases}$$

消去 OM 和 h 得 $\sqrt{25-9r^2} = \sqrt{25-16r^2} + \sqrt{2-r^2}$,

解得 $r=1$,此时 $h=1$,圆台的体积为 $\frac{1}{3}\pi \times 1 \times (3^2 + 3 \times 4 + 4^2) = \frac{37\pi}{3}$.

如图2,当球心 O 在圆台内时,设圆台的高为 h' ,

$$\begin{cases} (3r)^2 + OM^2 = 5^2, \\ (4r)^2 + (h'-OM)^2 = 5^2, \\ h'^2 + r^2 = (\sqrt{2})^2, \end{cases}$$

可得 $\sqrt{25-16r^2} = \sqrt{2-r^2} - \sqrt{25-9r^2}$,该方程无解,不满足题意.

综上,该圆台的体积为 $\frac{37\pi}{3}$.

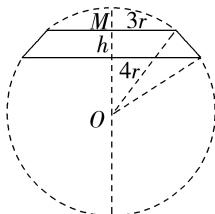


图1

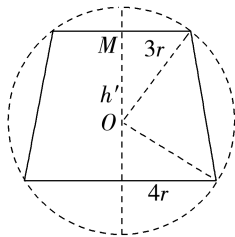


图2

课后限时练(十三)

1. D [在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $\angle A_1CA$ 是 A_1C 与平面 $ABCD$ 所成的角,

连接 AC ,

且 $AC \subset$ 平面 $ABCD$,

则 $AA_1 \perp AC$,

又 $AB=1, BC=2, AA_1=5$, 所以

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5}$,

在 $Rt\triangle A_1CA$ 中, $\tan \angle A_1CA = \frac{AA_1}{AC} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, 即 A_1C 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\sqrt{5}$.]

面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\sqrt{5}$.]

2. B [取 MN 的中点 E , 连接 OE, PE ,

因为 $OM=ON$,

所以 $OE \perp MN$,

因为 $PM=PN$,

所以 $PE \perp MN$,

所以 $\angle PEO$ 是二面角 $P-MN-O$ 的平面角,

因为 $PO \perp$ 平面 $OMN, OE \subset$ 平面 OMN ,

所以 $PO \perp OE$, 因为 $\angle MON = \frac{\pi}{3}, OM=2$,

所以 $OE = OM \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,

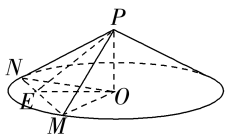
因为 $PO=1$,

所以 $PE = \sqrt{PO^2 + OE^2} = \sqrt{1+3} = 2$,

所以 $\cos \angle PEO = \frac{OE}{PE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以结合图知 $\angle PEO = \frac{\pi}{6}$.

所以二面角 $P-MN-O$ 的大小为 $\frac{\pi}{6}$.]



3. $\sqrt{2}$ [$\because PA \perp$ 平面 $ABC, BC \subset$ 平面 $ABC, \therefore PA \perp BC$.

$\because BC \perp AB$ 且 $AB \cap PA = A, \therefore BC \perp$ 平面 PAB ,

$\therefore BC \perp PB$.

$\because PA=AB=BC=2, \therefore AC=PB=2\sqrt{2}$.

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2, S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

设点 A 到平面 PBC 的距离为 h .

$\because V_{A-PBC} = V_{P-ABC}, \therefore \frac{1}{3} S_{\triangle PBC} \cdot h = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PA$, 解得

$h = \sqrt{2}$.

即点 A 到平面 PBC 的距离为 $\sqrt{2}$.]

4. 2 [如图, 连接 A_1C_1 , 分别交 EF, MN 于点 H, Q , 连接 AQ .

连接 AC 交 BD 于点 G , 连接 HG .

因为平面 $ABCD \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,

BD, EF 分别是平面 $ABCD$ 、平面

$A_1B_1C_1D_1$ 与平面 $BDEF$ 的交线,

所以 $EF \parallel BD$. 因为平面 $AMN \parallel$ 平面

$BDEF$,

平面 AMN 、平面 $BDEF$ 分别与

平面 $A_1B_1C_1D_1$ 交于直线 MN ,

EF , 与平面 ACC_1A_1 交于直线 AQ, GH , 所以 $EF \parallel MN$,

$AQ \parallel GH$,

则四边形 $AGHQ$ 为平行四边形, $AG = HQ$.

又因为 $EF = MN$, 所以点 M, F, E, N 分别为棱 A_1B_1 ,

B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1 的中点,

在 $Rt\triangle AQA_1$ 中, $AQ = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$,

平面 AMN 与平面 $BDEF$ 间的距离即为 Q 到平面 $BDEF$ 的距离, 即为 Q 到 GH 的距离, 设为 h ,

在平行四边形 $AGHQ$ 中, $AG \cdot AA_1 = AQ \cdot h$,

$h = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} \times 3}{\frac{9\sqrt{2}}{4}} = 2$, 即两个截面间的距离为 2.]

5. 证明: (1) 如图, 取 PC 的中点

E , 连接 ME, BE , 由 M 为

DP 的中点, N 为 AB 的中

点, 得 $ME \parallel DC, ME =$

$\frac{1}{2}DC$, 又 $BN \parallel CD, BN =$

$\frac{1}{2}CD$, 则 $ME \parallel BN, ME = BN$, 因此四边形 $BEMN$ 为平行

四边形, 于是 $MN \parallel BE$, 又 $MN \not\subset$ 平面 $PBC, BE \subset$ 平面

PBC , 所以 $MN \parallel$ 平面 PBC .

(2) 过点 P 作 $PQ \perp BC$, 垂足为 Q , 连接 DQ , 由 $\angle DCB =$

$\angle PCB = \frac{\pi}{4}, DC = PC, QC = QC$, 得 $\triangle QCD \cong \triangle QCP$,

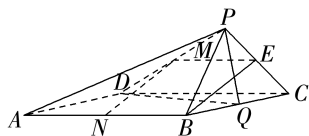
则 $\angle DQC = \angle PQC = \frac{\pi}{2}$, 即 $DQ \perp BC$, 而 $PQ = DQ = \sqrt{2}$,

$PQ^2 + DQ^2 = 4 = PD^2$,

因此 $PQ \perp DQ$, 又 $DQ \cap BC = Q, DQ, BC \subset$ 平面 $ABCD$, 则

$PQ \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $PQ \subset$ 平面 PBC ,

所以平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$.



课后限时练(十四)(A)

1. B [如图, 设 $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}, \overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, 棱长均为 1,

$$\text{则 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{2}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB_1} = \mathbf{a} + \mathbf{c}, \overrightarrow{BC_1} = \mathbf{b} - \mathbf{a} + \mathbf{c},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a} + \mathbf{c}) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} -$$

$$\frac{1}{2} + 1 = 1, |\overrightarrow{AB_1}| = \sqrt{(\mathbf{a} + \mathbf{c})^2} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c}^2} =$$

$$\sqrt{1+1+1} = \sqrt{3},$$

$$|\overrightarrow{BC_1}| = \sqrt{(\mathbf{b} - \mathbf{a} + \mathbf{c})^2} = \sqrt{1+1+1-1+1-1} = \sqrt{2},$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

$$\therefore \text{异面直线 } AB_1 \text{ 与 } BC_1 \text{ 所成角的余弦值为 } \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

故选 B.]

2. D [设 AE 的中点为点 O, 连接 OD_1, OB , 由题意知 $AD_1 = D_1E$, 所以 $OD_1 \perp AE$,

又平面 $AED_1 \perp$ 平面 $ABCE$, 平面 $AED_1 \cap$ 平面 $ABCE = AE$, 所以 $OD_1 \perp$ 平面 $ABCE$, 易知 $OB \perp AE$.

建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(1, 0, 0), B(0, \sqrt{3}, 0),$

$D_1(0, 0, \sqrt{3}),$

所以 $\overrightarrow{AB} = (-1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{BD_1} = (0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}).$

设平面 ABD_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z),$

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n} = -x + \sqrt{3}y = 0, \\ \overrightarrow{BD_1} \cdot \mathbf{n} = -\sqrt{3}y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases} \text{不妨设 } y = 1, \text{ 得 } \mathbf{n} = (\sqrt{3}, 1,$$

1) 为平面 ABD_1 的一个法向量.

易知平面 ABC 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$, 由图易知二面角 D_1-AB-C 为锐二面角,

所以二面角 D_1-AB-C 的余弦值为 $\frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$

3. $\frac{3\sqrt{17}}{17}$ [以 O 为坐标原点, $\overrightarrow{OB},$

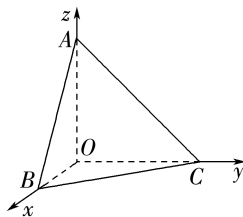
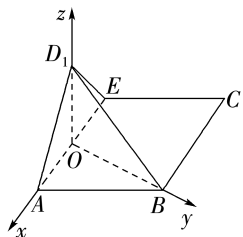
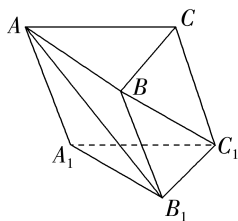
$\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}$ 分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向建立空间直角坐标系, 如图

所示, 则 $A(0, 0, 3), B(2, 0, 0),$

$C(0, 3, 0), \overrightarrow{AB} = (2, 0, -3), \overrightarrow{AC} =$

$(0, 3, -3), \overrightarrow{OB} = (2, 0, 0).$ 设 $\mathbf{m} = (x, y, z)$ 是平面 ABC 的法向量,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{m} = 2x - 3z = 0, \\ \overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{m} = 3y - 3z = 0, \end{cases} \text{令 } y = 1, \text{ 则 } \mathbf{m} = \left(\frac{3}{2}, 1, 1\right) \text{ 为平面}$$



ABC 的一个法向量, 所以 $|\cos \langle \overrightarrow{OB}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{OB} \cdot \mathbf{m}|}{|\overrightarrow{OB}| |\mathbf{m}|} =$

$$\frac{3}{2 \times \frac{\sqrt{17}}{2}} = \frac{3\sqrt{17}}{17}, \text{ 故直线 } OB \text{ 与平面 } ABC \text{ 所成角的正弦值}$$

$$\text{为 } \frac{3\sqrt{17}}{17}.]$$

4. 解: (1) 证明: 设 PC 的中点为 F , 连接 NF, BF ,

因为 N 为 PD 的中点, 所以 $NF \parallel DC$, 且 $NF = \frac{1}{2}DC$,

又 $AB \parallel CD$, 且 $AB = \frac{1}{2}CD$, 所以 $NF \parallel AB$, 且 $NF = AB$,

所以四边形 $ANFB$ 为平行四边形, 则 $AN \parallel BF$,

又 $AN \not\subset$ 平面 $PBC, BF \subset$ 平面 PBC ,

所以 $AN \parallel$ 平面 PBC .

(2) 记 CD 的中点为 E , 连

接 AE ,

因为 $AB \parallel CD, CE = \frac{1}{2}CD =$

$1 = AB, AB \perp BC$,

所以四边形 $ABCE$ 是矩形, 则

$AE = BC = 1, AE \perp AB$.

以 A 为原点, 以 AE, AB, AP 所

在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 如图,

则 $A(0, 0, 0), D(1, -1, 0), C(1, 1, 0), P(0, 0, 2),$

则 $\overrightarrow{CD} = (0, -2, 0), \overrightarrow{PD} = (1, -1, -2), \overrightarrow{AP} = (0, 0, 2),$

设平面 PAD 的法向量为 $\mathbf{n} = (a, b, c),$

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{AP} \perp \mathbf{n}, \\ \overrightarrow{PD} \perp \mathbf{n}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} \overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n} = 2c = 0, \\ \overrightarrow{PD} \cdot \mathbf{n} = a - b - 2c = 0, \end{cases}$$

令 $a = 1$, 则 $\mathbf{n} = (1, 1, 0)$ 为平面 PAD 的一个法向量,

设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{u} = (r, s, t),$

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{CD} \perp \mathbf{u}, \\ \overrightarrow{PD} \perp \mathbf{u}, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} \overrightarrow{CD} \cdot \mathbf{u} = -2s = 0, \\ \overrightarrow{PD} \cdot \mathbf{u} = r - s - 2t = 0, \end{cases}$$

令 $t = 1$, 则 $\mathbf{u} = (2, 0, 1)$ 为平面 PCD 的一个法向量,

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{u}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

由图可知, 二面角 $C-PD-A$ 为锐角,

所以二面角 $C-PD-A$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}.$

(3) 依题意, 设 $M(0, 0, k) (0 \leq k \leq 2)$, 则 $\overrightarrow{CM} = (-1, -1, k),$

又由(2)得平面 PAD 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, 1, 0),$

记直线 CM 与平面 PAD 所成的角为 $\beta,$

$$\text{所以 } \sin \beta = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{CM} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CM}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{CM}|}$$

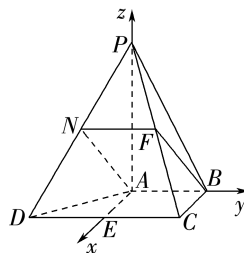
$$= \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+k^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

解得 $k = 1$ (负值舍去),

所以 $M(0, 0, 1)$, 则 $\overrightarrow{MP} = (0, 0, 1),$

而由(2)得平面 PCD 的一个法向量为 $\mathbf{u} = (2, 0, 1),$

$$\text{所以点 } M \text{ 到平面 } PCD \text{ 的距离为 } \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$



课后限时练(十四)(B)

1. 解: (1) 证明: 因为 $AB=BC$, O 为 AC 的中点, 所以 $BO \perp AC$,
因为平面 $PAC \perp$ 平面 ABC , 交线为 AC ,
 $BO \subset$ 平面 ABC ,
所以 $BO \perp$ 平面 PAC .

因为 $PA=AC=CP=2$,

所以 $PO \perp AC$, $AO=1$,

$$PO = \sqrt{AP^2 - AO^2} = \sqrt{3},$$

$$\text{故 } S_{\triangle OPA} = \frac{1}{2} OP \cdot AO = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

由勾股定理得 $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{2-1} = 1$,

又 $BO \perp$ 平面 PAC ,

$$\text{三棱锥 } B-OPA \text{ 的体积 } V = \frac{1}{3} S_{\triangle OPA} \cdot BO = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

(2) 由(1)知, $BO \perp$ 平面 PAC , OC ,

$OP \subset$ 平面 PAC ,

所以 $BO \perp OC$, $BO \perp OP$, 又 $PO \perp$

AC , 故 OB, OC, OP 两两垂直,

以 O 为坐标原点, OB, OC, OP 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $B(1, 0, 0), P(0, 0, \sqrt{3}), C(0, 1,$

$0), A(0, -1, 0)$,

$\overrightarrow{BP} = (-1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{PC} = (0, 1, -\sqrt{3})$,

设平面 BPC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{m} \perp \overrightarrow{BP}, \\ \mathbf{m} \perp \overrightarrow{PC}, \end{cases}$$

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BP} = (x, y, z) \cdot (-1, 0, \sqrt{3}) = -x + \sqrt{3}z = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PC} = (x, y, z) \cdot (0, 1, -\sqrt{3}) = y - \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$$

令 $z=1$, 得 $x=y=\sqrt{3}$, 故 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$ 为平面 BPC 的一个法向量,

易知平面 PCA 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$,

由图可知, 二面角 $B-PC-A$ 为锐角, 设其为 θ ,

$$\text{故 } \cos \theta = \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1) \cdot (1, 0, 0)}{\sqrt{3+3+1} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{21}{49}} = \frac{2\sqrt{7}}{7},$$

故二面角 $B-PC-A$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

2. 解: (1) 证明: 取线段 CE 的中点 H , 连接 FH, BH ,

在 $\triangle CDE$ 中, F 为 DE 的中点, 则 $FH \parallel CD, FH = \frac{1}{2} CD$.

因为 $AB \parallel CD, AB = 2OB = CD$,

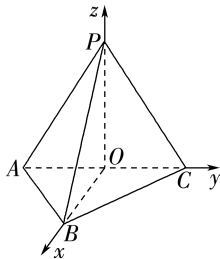
所以 $FH \parallel OB, FH = OB$,

所以四边形 $FHBO$ 为平行四边形,

则 $OF \parallel HB$,

因为 $OF \not\subset$ 平面 $BCE, HB \subset$ 平面 BCE ,

所以 $OF \parallel$ 平面 BCE .



(2) 连接 AE , 因为 AB 是圆 O 的

直径, 所以 $AE \perp BE$,

过点 E 作圆柱的母线 EQ , 则

$EQ \perp$ 平面 ABE ,

所以 AE, BE, EQ 两两垂直,

以 E 为原点, $\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EQ}$ 分别

为 x, y, z 轴的正方向, 建立如

图所示的空间直角坐标系,

不妨设 $AE=a (0 < a < 2), BE=b (0 < b < 2)$, 则 $a^2 + b^2 = 4$,

$E(0, 0, 0), C(0, b, 2), D(a, 0, 2)$,

所以 $\overrightarrow{EC} = (0, b, 2), \overrightarrow{ED} = (a, 0, 2)$,

设 $\mathbf{m} = (x, y, z)$ 为平面 CDE 的法向量,

$$\text{所以 } \begin{cases} \overrightarrow{ED} \cdot \mathbf{m} = ax + 2z = 0, \\ \overrightarrow{EC} \cdot \mathbf{m} = by + 2z = 0, \end{cases}$$

令 $z=ab$, 则 $\mathbf{m} = (-2b, -2a, ab)$,

易知直线 BE 的一个方向向量为 $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$,

记直线 BE 与平面 CDE 所成的角为 θ ,

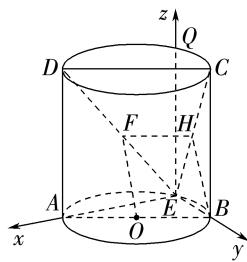
$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|}$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{4b^2 + 4a^2 + a^2b^2}} = \frac{2\sqrt{19}}{19},$$

化简得 $15a^2 = 4b^2 + a^2b^2$.

结合 $a^2 + b^2 = 4$, 解得 $a=1, b=\sqrt{3}$,

所以 $BE=\sqrt{3}$.



课后限时练(十五)(A)

1. 解: (1) 证明: 连接 OC , 则 $OC = \sqrt{OD^2 + CD^2}$

$$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3},$$

因为 $PC = \sqrt{13}, OP = OA = 1$,

所以 $OC^2 + OP^2 = PC^2$, 即 $OC \perp OP$,

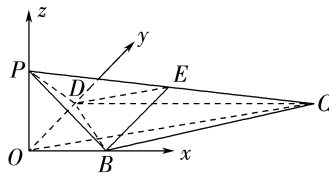
翻折前, $OA \perp OD$,

翻折后, $OP \perp OD$,

又 $OC \cap OD = O, OC, OD \subset$ 平面 $OBCD$,

所以 $PO \perp$ 平面 $OBCD$.

(2) 以 O 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $B(1, 0, 0), P(0, 0, 1), C(3, \sqrt{3}, 0), D(0, \sqrt{3}, 0)$,

所以 $\overrightarrow{PC} = (3, \sqrt{3}, -1), \overrightarrow{BP} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{DP} = (0, -\sqrt{3}, 1)$,

$\overrightarrow{DC} = (3, 0, 0)$,

设 $\overrightarrow{PE} = \lambda \overrightarrow{PC} = \lambda(3, \sqrt{3}, -1), \lambda \in [0, 1]$, 则 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PE} = (3\lambda - 1, \sqrt{3}\lambda, 1 - \lambda)$,

设平面 PDC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DP} = -\sqrt{3}y + z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DC} = 3x = 0, \end{cases}$$

取 $y=1$, 则 $x=0, z=\sqrt{3}$, 所以 $\mathbf{n} = (0, 1, \sqrt{3})$ 为平面 PDC 的一个法向量,

因为直线 BE 与平面 PDC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$,

$$\text{所以 } \frac{\sqrt{15}}{5} = |\cos \langle \overrightarrow{BE}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{BE} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{BE}| |\mathbf{n}|}$$

$$= \frac{|\sqrt{3}\lambda + \sqrt{3}(1-\lambda)|}{\sqrt{(3\lambda-1)^2 + (\sqrt{3}\lambda)^2 + (1-\lambda)^2} \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13\lambda^2 - 8\lambda + 2} \times 2},$$

整理得 $52\lambda^2 - 32\lambda + 3 = 0$,

$$\text{解得 } \lambda = \frac{1}{2} \text{ 或 } \lambda = \frac{3}{26},$$

所以 $\frac{PE}{PC}$ 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{26}$.

2. 解: (1) 证明: 取 CB_1 的中点 P , 连接 NP, MP ,

由 N 是 B_1C_1 的中点, 故 $NP \parallel CC_1$, 且 $NP = \frac{1}{2}CC_1$.

由 M 是 DD_1 的中点, 故 $D_1M = \frac{1}{2}DD_1 = \frac{1}{2}CC_1$, 且 $D_1M \parallel$

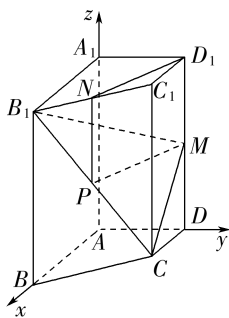
CC_1 , 则有 $D_1M \parallel NP, D_1M = NP$,

故四边形 D_1MPN 是平行四边形, 故 $D_1N \parallel MP$.

又 $MP \subset$ 平面 $CB_1M, D_1N \not\subset$ 平面 CB_1M ,

故 $D_1N \parallel$ 平面 CB_1M .

(2) 由题意知, AA_1, AB, AD 两两垂直, 以 A 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(0,0,0), B(2,0,0), B_1(2,0,2), M(0,1,1), C(1,1,0), C_1(1,1,2)$,

则有 $\overrightarrow{CB_1} = (1, -1, 2), \overrightarrow{CM} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{BB_1} = (0, 0, 2)$.

设平面 CB_1M 与平面 BB_1C_1C 的法向量分别为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则有 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CB_1} = x_1 - y_1 + 2z_1 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CM} = -x_1 + z_1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB_1} = x_2 - y_2 + 2z_2 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 2z_2 = 0, \end{cases}$$

分别取 $x_1 = x_2 = 1$, 则有 $y_1 = 3, z_1 = 1, y_2 = 1, z_2 = 0$,

即 $\mathbf{m} = (1, 3, 1), \mathbf{n} = (1, 1, 0)$ 分别为平面 CB_1M 与平面 BB_1C_1C 的一个法向量,

设平面 CB_1M 与平面 BB_1C_1C 的夹角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|}$$

$$= \frac{|1+3|}{\sqrt{1+9+1} \times \sqrt{1+1}} = \frac{2\sqrt{22}}{11},$$

所以平面 CB_1M 与平面 BB_1C_1C 夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{22}}{11}$.

(3) 由 $\overrightarrow{BB_1} = (0, 0, 2)$, 平面 CB_1M 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (1, 3, 1)$,

$$\text{则有 } \frac{|\overrightarrow{BB_1} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{2}{\sqrt{1+9+1}} = \frac{2\sqrt{11}}{11},$$

即点 B 到平面 CB_1M 的距离为 $\frac{2\sqrt{11}}{11}$.

课后限时练(十五)(B)

1. 解: (1) 证明: 在题图 1 中, 由题意可知四边形 $ABCD$ 为正方形, 且 $CD = DQ = AD = 2$,

则在题图 2 中, 有 $CD \perp PD, CD \perp AD$, 且 $PD \cap AD = D$, 则 $CD \perp$ 平面 PAD ,

又 $AB \parallel CD, \therefore AB \perp$ 平面 PAD , 而 $DM \subset$ 平面 PAD ,

则 $AB \perp DM$.

又 $PD = AD$, 且 M 为 PA 的中点,

$\therefore DM \perp PA$,

$\because AB \cap PA = A, AB, PA \subset$ 平面 PAB ,

$\therefore DM \perp$ 平面 PAB , 又 $PB \subset$ 平面 $PAB, \therefore DM \perp PB$.

(2) 由 (1) 知, $CD \perp$ 平面 PAD ,

$\because CD \subset$ 平面 $ABCD, \therefore$ 平面 $ABCD \perp$ 平面 PAD ,

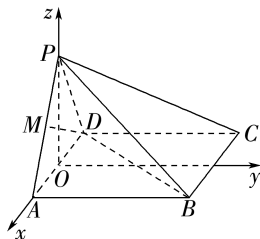
由已知可得 $\angle ADP$ 为二面角 $A-CD-P$ 的平面角, 则 $\angle ADP = 60^\circ$,

可得 $\triangle PAD$ 是等边三角形, 则 $PA = AD = PD = 2$.

取 AD 的中点为 O , 连接 PO , 则 $PO \perp AD$,

又平面 $ABCD \cap$ 平面 $PAD = AD, PO \subset$ 平面 PAD ,

$\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $PO = \sqrt{3}$.



以 O 为坐标原点, OA, OP 所在直线分别为 x, z 轴,

在平面 $ABCD$ 内, 过 O 作 AD 的垂线为 y 轴建立空间直角坐标系,

则 $O(0,0,0), P(0,0,\sqrt{3}), D(-1,0,0), B(1,2,0)$,

$C(-1,2,0), A(1,0,0)$,

则 $\overrightarrow{DB} = (2, 2, 0), \overrightarrow{DC} = (0, 2, 0), \overrightarrow{CP} = (1, -2, \sqrt{3}), \overrightarrow{BP} = (-1, -2, \sqrt{3})$.

设 $\overrightarrow{CN} = \lambda \overrightarrow{CP} = (\lambda, -2\lambda, \sqrt{3}\lambda) (0 \leq \lambda \leq 1)$,

则 $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = (\lambda, 2-2\lambda, \sqrt{3}\lambda)$,

设平面 BDN 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DN} = \lambda x + (2-2\lambda)y + \sqrt{3}\lambda z = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DB} = 2x + 2y = 0, \end{cases}$$

取 $y = \sqrt{3}\lambda$, 得 $\mathbf{m} = (-\sqrt{3}\lambda, \sqrt{3}\lambda, 3\lambda - 2)$,

记直线 PB 与平面 BDN 所成的角为 θ ,

则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{BP}, \mathbf{m} \rangle|$

$$= \left| \frac{\sqrt{3}\lambda - 2\sqrt{3}\lambda + 3\sqrt{3}\lambda - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{3\lambda^2 + 3\lambda^2 + (3\lambda - 2)^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{\sqrt{3}(\lambda - 1)}{\sqrt{2} \times \sqrt{15\lambda^2 - 12\lambda + 4}} \right| = \frac{1}{4},$$

即 $\frac{3(\lambda - 1)^2}{2(15\lambda^2 - 12\lambda + 4)} = \frac{1}{16}$, 解得 $\lambda = \frac{2}{3}$.

课后限时练(十六)

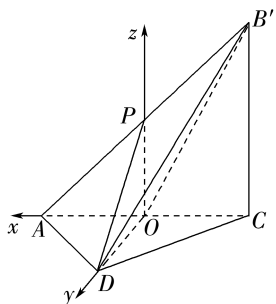
因此 $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$, 则 $\frac{CN}{CP} = \frac{2}{3}$.

(3) 由(2)知, $m = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$,

则平面 BDN 的一个法向量可以为 $n = (-1, 1, 0)$, 且 $\overrightarrow{BA} = (0, -2, 0)$,

则点 A 到平面 BDN 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot n|}{|n|} = \frac{|-2|}{\sqrt{1+1+0}} = \sqrt{2}$.

2. 解: (1) 证明: 在 $\triangle ACD$ 中, 由 $DA = DC = \sqrt{2}$, $\angle ADC = 90^\circ$, 得 $\angle CAD = 45^\circ$, $AC = 2$,
在 $\triangle AB'C$ 中, $\angle B'AC = \angle BAC = 105^\circ - 45^\circ = 60^\circ$, 而 $AB = AB' = 4$,
由余弦定理, 得 $B'C^2 = AB'^2 + AC^2 - 2AB' \cdot AC \cos 60^\circ = 12$,
则 $AC^2 + B'C^2 = AB'^2$,
即 $AC \perp B'C$, 由 $DB' = \sqrt{14}$,
得 $DB'^2 = DC^2 + B'C^2$, 则 $DC \perp B'C$,
又 $AC \cap DC = C$, $AC, DC \subset$ 平面 ACD ,
因此 $B'C \perp$ 平面 ACD , 而 $B'C \subset$ 平面 $B'AC$,
所以平面 $B'AC \perp$ 平面 ACD .
(2) 连接 OP , 由 O, P 分别为 AC, AB' 的中点, 得 $OP \parallel B'C$,
由(1)得 $OP \perp$ 平面 ACD ,
由 $DA = DC = \sqrt{2}$, 得 $OD \perp AC$, 则直线 OA, OD, OP 两两垂直,
以点 O 为原点, OA, OD, OP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,



则 $O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), C(-1, 0, 0), D(0, 1, 0), P(0, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{CA} = (2, 0, 0)$,

由点 M 在 PD 上, 令 $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OD} + (1-\lambda) \overrightarrow{OP} = (0, \lambda, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda), 0 \leq \lambda \leq 1$,

设平面 ACM 的法向量为 $n = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{CA} = 2x = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{OM} = \lambda y + (\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda)z = 0, \end{cases}$$

取 $z = \lambda$, 得 $n = (0, \sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}, \lambda)$ 为平面 ACM 的一个法向量, 易知平面 ACD 的一个法向量为 $m = (0, 0, 1)$,

$$|\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m||n|} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 3(\lambda - 1)^2}} = \frac{1}{2},$$

解得 $\lambda = \frac{1}{2}$, 于是 $n = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

而 $\overrightarrow{OP} = (0, 0, \sqrt{3})$,

$$\text{则点 } P \text{ 到平面 } ACM \text{ 的距离 } d = \frac{|\overrightarrow{OP} \cdot n|}{|n|} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以点 P 到平面 ACM 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. B [若直线 $2x + y - 2m = 0$ 与直线 $4x - my - 3 = 0$ 平行,

则 $m \neq 0$ 且 $\frac{4}{2} = \frac{-m}{1} \neq \frac{-3}{-2m}$, 解得 $m = -2$.

所以两条直线方程分别为 $2x + y + 4 = 0$ 与 $4x + 2y - 3 = 0$,
在直线 $2x + y + 4 = 0$ 上取点 $P(-2, 0)$, 点 P 到直线 $4x + 2y - 3 = 0$ 的距离 $d = \frac{|-8 + 0 - 3|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{11\sqrt{5}}{10}$,

所以直线 $2x + y + 4 = 0$ 与直线 $4x + 2y - 3 = 0$ 之间的距离为 $\frac{11\sqrt{5}}{10}$.

故选 B.]

2. C [因为 a, b, c 成等差数列, 所以 $2b = a + c, c = 2b - a$, 代入直线方程 $ax + by + c = 0$ 得

$ax + by + 2b - a = 0$, 即 $a(x - 1) + b(y + 2) = 0$, 令 $\begin{cases} x - 1 = 0, \\ y + 2 = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = -2, \end{cases}$

故直线恒过点 $(1, -2)$,

设 $P(1, -2)$.

圆化为标准方程得 $x^2 + (y + 2)^2 = 5$,

设圆心为 C , 画出直线与圆的图形, 由图可知, 当 $PC \perp AB$ 时, $|AB|$ 最小,

$|PC| = 1, |AC| = \sqrt{5}$, 此时 $|AB| =$

$$2|AP| = 2\sqrt{AC^2 - PC^2} = 2\sqrt{5 - 1} = 4.$$

故选 C.]

3. CD [A 项, 整理直线 $l: (m+1)x + 2y - 1 + m = 0 (m \in \mathbb{R})$,

可得出 $m(x+1) + x + 2y - 1 = 0$,

$$\text{解方程组 } \begin{cases} x + 1 = 0, \\ x + 2y - 1 = 0, \end{cases}$$

可得 $\begin{cases} x = -1, \\ y = 1, \end{cases}$ 直线 l 过定点 $A(-1, 1)$,

圆 $C: (x+2)^2 + y^2 = 4$ 的圆心为 $C(-2, 0)$, 半径 $r = 2$,

则 $|AC| = \sqrt{(-2+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2} < 2$,

所以点 A 在圆内, 即直线 l 过圆内一定点,

所以直线 l 与圆 C 一定相交, 故 A 错误;

B 项, 当 $m = 0$ 时, 直线 l 方程化为

$$x + 2y - 1 = 0,$$

此时圆心 $C(-2, 0)$ 到直线 l 的距

$$\text{离 } d = \frac{|-2 \times 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}, \text{ 且 } 1 <$$

$d < 2$,

因此圆 C 上只有两个点到直线 l 的距离等于 1, 故 B 错误;

C 选项, 因为 $(m+1) \times 2 - 2(m+1) = 0$,

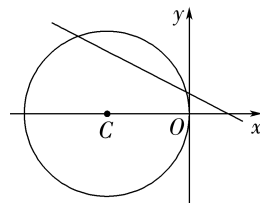
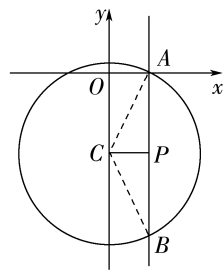
所以直线 l 与直线 $2x - (m+1)y = 0$ 垂直, 故 C 正确;

D 选项, 要使圆 C 与圆 $x^2 + y^2 - 2x + 8y + a = 0$ 恰有三条公切线, 则应满足两圆外切,

圆 $x^2 + y^2 - 2x + 8y + a = 0$ 可化为 $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 17 - a (a < 17)$,

圆心为 $M(1, -4)$, 半径为 $R = \sqrt{17 - a}$,

因为两圆外切, 所以 $|MC| = r + R$,



$$\text{即 } \sqrt{17-a}+2=\sqrt{(-2-1)^2+(0+4)^2}=5,$$

$$\text{整理可得 } \sqrt{17-a}=3, \text{ 化简可得 } 17-a=9,$$

解得 $a=8$, 故 D 正确.

故选 CD.]

4. BC [对于 A, 因为 $(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0$,

$$\text{即 } m(2x+y-7)+x+y-4=0,$$

$$\text{令 } \begin{cases} 2x+y-7=0, \\ x+y-4=0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=3, \\ y=1, \end{cases}$$

所以直线恒过定点 $(3,1)$, 又因为 $3^2+1^2>4$, 所以定点 $(3,1)$ 在圆 O 外, 所以直线 $(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0$ 与圆 O 可能相离、相切、相交, 即交点可能为 0 个、1 个、2 个, 故 A 错误.

对于 B, 因为圆 O 与动圆 C 有 4 条公切线, 所以圆 O 与圆 C 相离, 又因为圆 O 的圆心 $O(0,0)$, 半径 $r_1=2$, 圆 C 的圆心 $C(k, \sqrt{3}k)$, 半径 $r_2=2$, 所以 $|OC|>r_1+r_2$,

$$\text{即 } \sqrt{k^2+(\sqrt{3}k)^2}>4, \text{ 解得 } |k|>2, \text{ 故 B 正确.}$$

$$\text{对于 C, } S_{\text{四边形} PAOB} = 2S_{\triangle OAP} = 2 \times \frac{1}{2} \times |OA| \times |PA| = 2 \times \frac{1}{2} \times |OA| \times \sqrt{|OP|^2 - |OA|^2} = 2 \sqrt{|OP|^2 - 4}, \text{ 又因为点 } O \text{ 到点 } P \text{ 的距离的最小值为点 } O \text{ 到直线 } x+y-4=0 \text{ 的距离, 即 } |OP|_{\min} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, \text{ 所以四边形 } PAOB \text{ 的面积的最小值为 } 2\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 4} = 4, \text{ 故 C 正确.}$$

对于 D, 因为圆 O 的圆心 $O(0,0)$, 半径 $r_1=2$, 则圆心 O 到直线 $x+y-2=0$ 的距离为 $d = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 所以 $r_1-d = 2-\sqrt{2} < 1$, 所以圆 O 上存在两点到直线 $x+y-2=0$ 的距离为 1, 故 D 错误. 故选 BC.]

5. 0 [法一(几何法): 由题知圆心为 $(2,2)$, 半径为 2, 又直线与圆相切, 则圆心 $(2,2)$ 到直线 $ax+y=0$ 的距离等于半径, 即 $\frac{|2a+2|}{\sqrt{a^2+1}}=2$, 解得 $a=0$.

法二(判别式法): 由 $ax+y=0$, 得 $y=-ax$, 代入圆 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$, 化简, 整理, 得 $(a^2+1)x^2+(4a-4)x+4=0$. 因为直线与圆相切, 所以 $\Delta=(4a-4)^2-16(a^2+1)=0$, 解得 $a=0$.]

6. $[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}]$ [法一: 由题意知点 $A(-2,3)$ 关于直线 $y=a$ 的对称点为 $A'(-2, 2a-3)$,

$$\text{所以 } k_{A'B} = \frac{3-a}{2},$$

$$\text{所以直线 } A'B \text{ 的方程为 } y = \frac{3-a}{2}x + a,$$

$$\text{即 } (3-a)x - 2y + 2a = 0.$$

由题意知直线 $A'B$ 与圆 $(x+3)^2+(y+2)^2=1$ 有公共点, 易知圆心坐标为 $(-3, -2)$, 半径为 1,

$$\text{所以 } \frac{|-3(3-a)-2 \times (-2) + 2a|}{\sqrt{(3-a)^2+(-2)^2}} \leq 1,$$

$$\text{整理得 } 6a^2 - 11a + 3 \leq 0, \text{ 解得 } \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{3}{2}, \text{ 所以实数 } a \text{ 的取值范围是 } [\frac{1}{3}, \frac{3}{2}].$$

法二: 易知 $(x+3)^2+(y+2)^2=1$ 关于 y 轴对称的圆的方程为 $(x-3)^2+(y+2)^2=1$,

由题意知该对称圆与直线 AB 有公共点. 直线 AB 的方程为

$$y = \frac{a-3}{2}x + a, \text{ 即 } (a-3)x - 2y + 2a = 0,$$

又对称圆的圆心坐标为 $(3, -2)$, 半径为 1,

$$\text{所以 } \frac{|3(a-3)-2 \times (-2) + 2a|}{\sqrt{(a-3)^2+(-2)^2}} \leq 1,$$

$$\text{整理得 } 6a^2 - 11a + 3 \leq 0, \text{ 解得 } \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{3}{2},$$

$$\text{所以实数 } a \text{ 的取值范围是 } [\frac{1}{3}, \frac{3}{2}].$$

法三: 易知 $(x+3)^2+(y+2)^2=1$ 关于 y 轴对称的圆的方程为 $(x-3)^2+(y+2)^2=1$,

由题意知该对称圆与直线 AB 有公共点.

设直线 AB 的方程为 $y-3=k(x+2)$,

$$\text{即 } kx - y + 3 + 2k = 0,$$

因为对称圆的圆心坐标为 $(3, -2)$, 半径为 1,

$$\text{所以 } \frac{|5k+5|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} \leq 1, \text{ 解得 } -\frac{4}{3} \leq k \leq -\frac{3}{4},$$

$$\text{又 } k = \frac{a-3}{2}, \text{ 所以 } -\frac{4}{3} \leq \frac{a-3}{2} \leq -\frac{3}{4},$$

$$\text{解得 } \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{3}{2},$$

$$\text{所以实数 } a \text{ 的取值范围是 } [\frac{1}{3}, \frac{3}{2}].]$$

7. 1 [圆 $(x-a)^2+(y+a-2)^2=r^2$ 的圆心坐标为 $(a, 2-a)$, 半径为 r ;

圆 $x^2+y^2=1$ 的圆心坐标为 $(0,0)$, 半径 $R=1$,

由两圆有公共点,

$$\text{可得 } |r-1| \leq \sqrt{(a-0)^2+(2-a-0)^2} \leq r+1,$$

$$\text{先化简两圆圆心距 } d = \sqrt{a^2+(2-a)^2} = \sqrt{a^2+4-4a+a^2} = \sqrt{2a^2-4a+4} = \sqrt{2(a-1)^2+2},$$

当 $a=1$ 时, d 取得最小值 $\sqrt{2}$, 此时 r 取最小值 $\sqrt{2}-1$, 满足两圆有公共点的条件,

所以当 r 取最小值时 $a=1$.]

课后限时练(十七)

1. B [抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$,

根据抛物线的定义可知, 点 M 到点 F 的距离与到直线 $x=-\frac{p}{2}$ 的距离相等.

又点 M 到点 F 的距离与到直线 $y=-\frac{p}{2}$ 的距离相等,

$$\text{所以 } x_0 + \frac{p}{2} = 4 + \frac{p}{2}, \text{ 解得 } x_0 = 4, \text{ 即 } M(4, 4),$$

$$\text{所以 } 4^2 = 2p \times 4, \text{ 解得 } p = 2.$$

故选 B.]

2. A [双曲线 $C: \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{b^2} = 1(b>0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{2}{b}x$,

直线 $y=2x$ 是双曲线 $C: \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{b^2} = 1(b>0)$ 的一条渐近线,

$$\text{因此 } 2 = \frac{2}{b}, \text{ 故 } b = 1,$$

$$\text{故离心率为 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{4+b^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \text{ 故选 A.}]$$

3. D [由题意可得 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$,即 $4a=4\sqrt{3}$,可得 $a=\sqrt{3}$,

由题意可得 $M(-a,0), N(a,0)$,设 $A(x_1, y_1)$,可得 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$,可得 $y_1^2 = b^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)$,

$$\text{则 } k_{AM} \cdot k_{AN} = \frac{y_1}{x_1+a} \cdot \frac{y_1}{x_1-a} = \frac{y_1^2}{x_1^2-a^2} = \frac{b^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)}{x_1^2-a^2} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{2}{3}, \text{ 可得 } b^2 = \frac{2}{3}a^2 = \frac{2}{3} \times 3 = 2,$$

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$. 故选 D.]

4. ACD [由曲线 $C: mx^2 + ny^2 = 1$,

当 $m > n > 0$ 时,得 $\frac{x^2}{\frac{1}{m}} + \frac{y^2}{\frac{1}{n}} = 1$,此时 $\frac{1}{n} > \frac{1}{m} > 0$,曲线 C 是椭圆,其焦点在 y 轴上,故 A 正确;

若 $m = n > 0$,则 C 是圆,其半径为 $\sqrt{\frac{1}{n}}$,故 B 错误;

若 $mn < 0$,则 C 是双曲线,当 $m > 0, n < 0$ 时,方程化为 $\frac{x^2}{\frac{1}{m}} - \frac{y^2}{\frac{1}{n}} = 1$,

$$\frac{y^2}{\frac{1}{n}} = 1,$$

则 $a = \sqrt{\frac{1}{m}}, b = \sqrt{-\frac{1}{n}}$,渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{-\frac{m}{n}}x$,

当 $m < 0, n > 0$ 时,方程化为 $\frac{y^2}{\frac{1}{n}} - \frac{x^2}{\frac{1}{m}} = 1$,

则 $a = \sqrt{\frac{1}{n}}, b = \sqrt{-\frac{1}{m}}$,渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{-\frac{m}{n}}x$,

综上所述,其渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{-\frac{m}{n}}x$,故 C 正确;

若 $m = 0, n > 0$,则方程化为 $y^2 = \frac{1}{n}$,即 $y = \pm \sqrt{\frac{1}{n}}$, C 是两条直线,故 D 正确.

故选 ACD.]

5. BC [对于 A 选项,双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的实轴长为 $2a$,

双曲线 $C_2: \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 的实轴长为 $2b$, $\therefore$ A 选项错误;

对于 B 选项, $\because$ 双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 和 $C_2: \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 的焦距均为 $2c = 2\sqrt{a^2+b^2}$, $\therefore$ B 选项正确;

对于 C 选项,双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

双曲线 $C_2: \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

$\therefore$ C 选项正确;

对于 D 选项,双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为 $e_1 =$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a},$$

双曲线 $C_2: \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 的离心率为 $e_2 = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$,

$\because a \neq b, \therefore e_1 \neq e_2$,故 D 选项错误. 故选 BC.]

6. 20 [由椭圆的定义得 $|AF_1| + |AF_2| = 2a = 10, |BF_1| + |BF_2| = 2a = 10$,所以 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $|AF_1| + |AF_2| + |BF_1| + |BF_2| = 4a = 20$.]

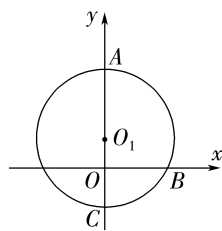
7. $x^2 = -5y$ [因为圆心在 y 轴上移动,且该圆过点 $A(0,5)$ 和 $C(0,y)$,则线段 AC 是圆的直径,圆心

$O_1\left(0, \frac{y+5}{2}\right)$,而点 $B(x,0)$ 在圆上,

则 $|O_1B| = \frac{1}{2}|AC|$,

即 $\sqrt{x^2 + \left(\frac{y+5}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}|y-5|$,化简

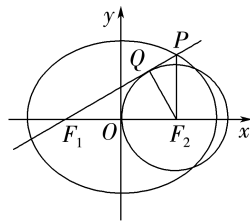
整理得 $x^2 = -5y$,所以点 $M(x,y)$ 的轨迹方程为 $x^2 = -5y$.]



课后限时练(十八)

1. B [由题意, $|F_2Q| = c, |F_1F_2| = 2c$,

因为直线 F_1P 与以 F_2 为圆心、 OF_2 为半径的圆相切,所以 $\angle F_2QF_1 = 90^\circ$,



因此由勾股定理可得 $|F_1Q| = \sqrt{4c^2 - c^2} = \sqrt{3}c$,

又 $\overrightarrow{F_1Q} = 3\overrightarrow{QP}$,所以 $|QP| = \frac{\sqrt{3}}{3}c$,因此 $|F_1P| = \sqrt{3}c + \frac{\sqrt{3}}{3}c = \frac{4\sqrt{3}}{3}c$,

由勾股定理可得 $|PF_2| = \sqrt{\frac{3c^2}{9} + c^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}c$,

根据椭圆定义得 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$,得 $\frac{4\sqrt{3}}{3}c + \frac{2\sqrt{3}}{3}c = 2a$,

则 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选 B.]

2. B [由椭圆的定义得 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$,

又 $|PF_1| = \frac{3}{2}|PF_2|$,所以 $|PF_1| = \frac{6a}{5}, |PF_2| = \frac{4a}{5}$,

由 $|PF_1| - |PF_2| = \frac{2a}{5} \leq 2c$,得 $e = \frac{c}{a} \geq \frac{1}{5}$,

又椭圆的离心率 $0 < e < 1$,则 $e \in \left[\frac{1}{5}, 1\right)$.

故选 B.]

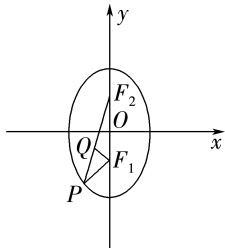
3. D [由已知,点 P 是以 OA_2 为直径的圆 $x(x-a) + y^2 = 0$

与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的交点,解得 $x_P = \frac{ab^2}{c^2} < a$,所

以 $b^2 < c^2$,即 $a^2 - c^2 < c^2$,即 $\frac{c^2}{a^2} > \frac{1}{2}, \frac{c}{a} > \frac{\sqrt{2}}{2}$,又椭圆的离心

率 $e \in (0, 1)$,所以得 $e \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.]

4. C [因为 $\overrightarrow{PQ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{PF_2}$, 则 $\frac{|PQ|}{|QF_2|} = \frac{2}{3}$,



由角平分线的性质可得 $\frac{|PF_1|}{|F_1F_2|} = \frac{2}{3}$,

因为 $|F_1F_2| = 2c$,

所以 $|PF_1| = \frac{4}{3}c$,

由椭圆的定义可知 $|PF_2| = 2a - |PF_1| = 2a - \frac{4}{3}c$,

在 $\triangle PF_1F_2$ 中, $\angle PF_1F_2 = 120^\circ$,

由余弦定理可得 $|PF_2|^2 = |F_1F_2|^2 + |PF_1|^2 - 2|F_1F_2| \cdot |PF_1| \cos \angle PF_1F_2$,

即 $(2a - \frac{4}{3}c)^2 = (2c)^2 + (\frac{4}{3}c)^2 - 2 \cdot 2c \cdot \frac{4}{3}c \cdot (-\frac{1}{2})$,

整理可得 $5e^2 + 4e - 3 = 0$, 解得 $e = \frac{-2 \pm \sqrt{19}}{5}$,

因为 $e \in (0, 1)$, 所以 $e = \frac{\sqrt{19} - 2}{5}$. 故选 C.]

5. A [椭圆 C 以 A, B 为焦点,

即 $c = 1, b^2 = a^2 - 1$,

故可设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1 (a > 1)$,

$$\text{联立方程} \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1, \\ y = x + 3, \end{cases}$$

消去 y 得 $(2a^2 - 1)x^2 + 6a^2x + 10a^2 - a^4 = 0$,

由题意易知 $\Delta = 36a^4 - 4(2a^2 - 1)(10a^2 - a^4) \geq 0$,

即 $a^4 - 6a^2 + 5 \geq 0$,

得 $a^2 \geq 5$ 或 $a^2 \leq 1$ (舍去), 解得 $a \geq \sqrt{5}$,

所以 $0 < e = \frac{c}{a} = \frac{1}{a} \leq \frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以 e 的最大值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

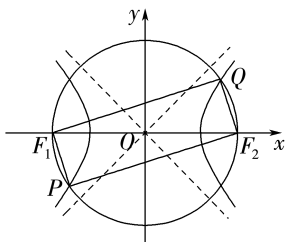
故选 A.]

6. (1, 2) [若 $\triangle ABE$ 是锐角三角形, 只需 $\angle AEF < 45^\circ$, 在

$\text{Rt}\triangle AFE$ 中, $|AF| = \frac{b^2}{a}$, $|FE| = a + c$, 则 $\frac{b^2}{a} < a + c$, 即 $b^2 <$

$a^2 + ac$, 即 $2a^2 - c^2 + ac > 0$, 则 $e^2 - e - 2 < 0$, 解得 $-1 < e < 2$, 又 $e > 1$, 则 $1 < e < 2$.]

7. (1, $\sqrt{5}$) [如图,



由题意知, 四边形 PF_1QF_2 为矩形, 所以 $|PF_2| = |F_1Q|$, 且

$PF_1 \perp PF_2$, 所以 $|PF_2| \geq 2|PF_1|$,

$$\text{因为} \begin{cases} |PF_2| - |PF_1| = 2a, \\ |PF_2|^2 + |PF_1|^2 = 4c^2, \end{cases}$$

$$\text{所以} \begin{cases} |PF_1| = \sqrt{2c^2 - a^2} - a, \\ |PF_2| = \sqrt{2c^2 - a^2} + a, \end{cases}$$

所以 $\sqrt{2c^2 - a^2} + a \geq 2(\sqrt{2c^2 - a^2} - a)$, 即 $\sqrt{2c^2 - a^2} \leq 3a$,

所以 $2c^2 - a^2 \leq 9a^2$, 即 $2c^2 \leq 10a^2$, 所以 $e^2 \leq 5$, 又 $e > 1$, 所以

$1 < e \leq \sqrt{5}$.]

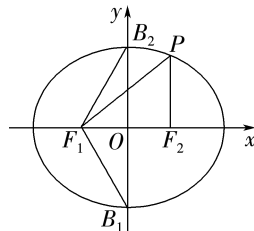
课后限时练(十九)

1. 解: (1) 由题意可知 $S_{\triangle F_1B_1B_2} = \frac{1}{2} \times 2b \times c = bc = \sqrt{3}$, 且

$$|B_1B_2| = 2b = 2\sqrt{3},$$

所以 $b = \sqrt{3}, c = 1$, 则 $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 2$,

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.



(2) 设点 $P(x, y)$, 则 $-2 \leq x \leq 2, y^2 = 3 - \frac{3x^2}{4}, F_1(-1, 0)$,

$F_2(1, 0)$,

易知 $|PF_1| \in [1, 3]$,

设 $t = |PF_1|$, 则 $1 \leq t \leq 3$,

且 $|PF_2| = 2a - |PF_1| = 4 - t$,

所以 $|PF_1| \cdot |PF_2| = t(4 - t) = -t^2 + 4t = -(t - 2)^2 + 4$,

因为函数 $f(t) = -(t - 2)^2 + 4$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 在 $[2, 3]$ 上单调递减,

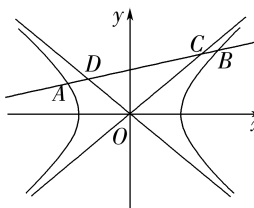
所以 $f(t)_{\max} = f(2) = 4, f(t)_{\min} = f(1) = f(3) = 3$,

故 $|PF_1| \cdot |PF_2|$ 的最小值为 3, 最大值为 4.

2. 解: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$,

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1, \\ y = kx + 2, \end{cases} \text{可得} (1 - k^2)x^2 - 4kx - 6 = 0,$$

$\therefore 1 - k^2 \neq 0, \Delta = 16k^2 + 24(1 - k^2) > 0$, 又 $k > 0$,



解得 $k \in (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$,

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{4k}{1 - k^2}, x_1 x_2 = -\frac{6}{1 - k^2},$$

双曲线 E 的渐近线方程为 $y = \pm x$, 不妨设 C 为直线 $y = x$ 与直线 l 的交点,

$$\text{联立} \begin{cases} y = x, \\ y = kx + 2, \end{cases} \text{可得} x_3 = -\frac{2}{k - 1}, \text{同理} x_4 = -\frac{2}{k + 1},$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{|AB|}{|CD|} &= \frac{|x_1 - x_2|}{|x_3 - x_4|} = \frac{\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}}{|x_3 - x_4|} \\ &= \frac{\sqrt{\left(\frac{4k}{1-k^2}\right)^2 + \frac{24}{1-k^2}}}{\left|-\frac{2}{k-1} + \frac{2}{k+1}\right|} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3-k^2}}{\left|\frac{4}{k^2-1}\right|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3-k^2},\end{aligned}$$

$$\therefore k \in (0, 1) \cup (1, \sqrt{3}),$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3-k^2} \in (0, 1) \cup \left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right),$$

$$\therefore \frac{|AB|}{|CD|} \text{ 的取值范围为 } (0, 1) \cup \left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

3. 解: (1) 设 C 的半焦距为 $c (c > 0)$,

因为椭圆的长轴长为 $2\sqrt{3}$, $\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值为 $\frac{3}{2}$,

$$\text{所以 } a = \sqrt{3}, \frac{1}{2} \times 2c \times b = bc = \frac{3}{2},$$

$$\text{解得 } b^2 = \frac{3}{2},$$

$$\text{则椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{3} + \frac{2y^2}{3} = 1.$$

(2) 证明: 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = px + q, \\ x^2 + 2y^2 = 3, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并整理得 } (2p^2 + 1)x^2 + 4pqx + 2q^2 - 3 = 0,$$

$$\text{此时 } \Delta = 16p^2q^2 - 4(2p^2 + 1)(2q^2 - 3) = 4(6p^2 - 2q^2 + 3) > 0,$$

$$\text{由根与系数的关系得 } x_1 + x_2 = -\frac{4pq}{2p^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{2q^2 - 3}{2p^2 + 1},$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0,$$

$$\text{所以 } x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + (px_1 + q)(px_2 + q) = (p^2 + 1) \cdot$$

$$x_1x_2 + pq(x_1 + x_2) + q^2 = (p^2 + 1) \cdot \frac{2q^2 - 3}{2p^2 + 1} - \frac{4p^2q^2}{2p^2 + 1} +$$

$$q^2 = 0,$$

$$\text{整理得 } q^2 = p^2 + 1,$$

此时满足 $\Delta > 0$, 证毕.

课后限时练(二十)

1. 解: (1) 点 A 的横坐标为 $2\sqrt{2}$, 代入圆 O 得 $y = 2$,

$$\text{所以 } A(2\sqrt{2}, 2),$$

代入抛物线方程解得 $p = 2$, 所以抛物线的方程为 $x^2 = 4y$.

(2) 证明: 抛物线 $C: y = \frac{x^2}{4}$,

$$\text{则 } y' = \frac{x}{2}, \text{ 设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2),$$

$$\text{所以切线 } PM \text{ 的方程为 } y - y_1 = \frac{x_1}{2}(x - x_1),$$

$$\text{即 } y = \frac{x_1}{2}x - \frac{x_1^2}{4},$$

$$\text{同理切线 } PN \text{ 的方程为 } y = \frac{x_2}{2}x - \frac{x_2^2}{4},$$

$$\text{联立解得点 } P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1x_2}{4}\right).$$

设直线 MN 的方程为 $y = kx + 1$, 代入 $x^2 = 4y$,

$$\text{得 } x^2 - 4kx - 4 = 0, \text{ 所以 } x_1x_2 = -4,$$

所以点 P 在定直线 $y = -1$ 上, 结论得证.

2. 解: (1) 因为 $2b = 2\sqrt{3}$, 所以 $b = \sqrt{3}$,

$$\text{将 } \left(1, \frac{3}{2}\right) \text{ 代入 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1, \text{ 得 } \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4} = 1,$$

$$\text{解得 } a^2 = 4,$$

$$\text{故椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 证明: 由(1)可得 $F(1, 0)$,

由题意可设 $l: x = ty + 1, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} x = ty + 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 可得 } (3t^2 + 4)y^2 + 6ty - 9 = 0,$$

易知 $\Delta > 0$,

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = -\frac{6t}{3t^2 + 4}, y_1y_2 = -\frac{9}{3t^2 + 4},$$

因为 $A(-2, 0)$,

$$\text{所以直线 } AP \text{ 的方程为 } y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2),$$

$$\text{令 } x = 4, \text{ 则 } y = \frac{6y_1}{x_1 + 2},$$

$$\text{故 } M\left(4, \frac{6y_1}{x_1 + 2}\right), \text{ 同理可得 } N\left(4, \frac{6y_2}{x_2 + 2}\right).$$

$$\text{所以 } k_1 = \frac{\frac{6y_1}{x_1 + 2}}{4 - 1} = \frac{6y_1}{3(ty_1 + 3)} = \frac{2y_1}{ty_1 + 3},$$

$$k_2 = \frac{\frac{6y_2}{x_2 + 2}}{4 - 1} = \frac{6y_2}{3(ty_2 + 3)} = \frac{2y_2}{ty_2 + 3},$$

$$\text{故 } k_1k_2 = \frac{4y_1y_2}{(ty_1 + 3)(ty_2 + 3)}$$

$$= \frac{4y_1y_2}{t^2y_1y_2 + 3t(y_1 + y_2) + 9}$$

$$= \frac{-\frac{36}{3t^2 + 4}}{-\frac{9t^2}{3t^2 + 4} - \frac{18t^2}{3t^2 + 4} + 9} = -1. \text{ 得证.}$$

3. 解: (1) 因为 $A(2, 0), B(0, 1)$ 分别为椭圆 C 的右顶点和上顶点,

$$\text{所以 } a = 2, b = 1, \text{ 所以椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

(2) 证明: 由题意知, 直线 MN 的斜率存在. 设直线 MN 的方程为 $y = mx + n$, 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), P(x_0, y_0)$, 由条件得 $k_{AB} = -\frac{1}{2}, k_{AB} \cdot k_{MP} = -1$, 直线 AB 的方程为 $y =$

$$-\frac{1}{2}x + 1, \text{ 即 } x + 2y - 2 = 0.$$

所以点 M, P 关于直线 AB 对称, 则

$$\begin{cases} \frac{x_1 + x_0}{2} + 2 \cdot \frac{y_1 + y_0}{2} = 2, \\ \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = 2, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x_0 = \frac{4 + 3x_1 - 4y_1}{5}, \\ y_0 = \frac{8 - 4x_1 - 3y_1}{5}, \end{cases}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AP} = (x_0 - 2, y_0), \overrightarrow{AN} = (x_2 - 2, y_2),$$

$$\text{且 } \overrightarrow{AN} \parallel \overrightarrow{AP},$$

$$\text{所以 } y_2 \cdot \left(\frac{4 + 3x_1 - 4y_1}{5} - 2\right) = (x_2 - 2) \cdot \frac{8 - 4x_1 - 3y_1}{5},$$

$$\text{又 } y_1 = mx_1 + n, y_2 = mx_2 + n,$$

$$\begin{aligned} & \text{所以 } (mx_2 + n) \cdot \left(\frac{4 + 3x_1 - 4mx_1 - 4n}{5} - 2 \right) \\ &= (x_2 - 2) \cdot \frac{8 - 4x_1 - 3mx_1 - 3n}{5}, \end{aligned}$$

$$\text{整理得 } (-4m^2 + 6m + 4)x_1x_2 - (4mn + 6m + 8 - 3n)(x_1 + x_2) - 4(n^2 + 3n - 4) = 0,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = mx + n, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得 } (4m^2 + 1)x^2 + 8mnx + 4n^2 - 4 = 0,$$

$$0, \Delta > 0, \text{ 即 } 4m^2 - n^2 + 1 > 0.$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{-8mn}{4m^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{4n^2 - 4}{4m^2 + 1},$$

$$\text{所以 } (-4m^2 + 6m + 4) \cdot \frac{4n^2 - 4}{4m^2 + 1} - (4mn + 6m + 8 - 3n) \cdot$$

$$\frac{-8mn}{4m^2 + 1} - 4(n^2 + 3n - 4) = 0,$$

$$\text{化简得 } 20m^2 + 3n^2 + 16mn - 6m - 3n = 0, \text{ 即 } (2m + n) \cdot [10m + 3(n - 1)] = 0, \text{ 则 } n = -2m \text{ 或 } 10m + 3n = 3.$$

若 $n = -2m$, 则点 M 与点 A 重合, 不符合题意(舍);

$$\text{若 } 10m + 3n = 3, \text{ 则直线 } MN \text{ 过点 } \left(\frac{10}{3}, 1 \right).$$

课后限时练(二十一)

1. D [从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数, 共有 $C_7^2 =$

21(种)不同的取法,

若两数不互质, 不同的取法有 $(2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (4, 6), (4, 8), (6, 8)$, 共 7 种,

故所求概率 $P = \frac{21-7}{21} = \frac{2}{3}$. 故选 D.]

2. AB $\left[\left(\frac{2}{x} - x^2 \right)^5 \right]$ 的展开式的通项为

$$T_{k+1} = C_5^k 2^{5-k} (-1)^k x^{3k-5},$$

由 $n=5$, 得各二项式系数之和为 $2^5 = 32$, 故 A 正确;

令 $x=1$, 则各项系数的和为 1, 故 B 正确;

又展开式一共有 6 项, 则二项式系数最大的是第 3 项和第 4 项, 故 C 错误;

当 $3k-5=4$, 则 $k=3$, 则 x^4 的系数为 $C_5^3 2^2 (-1)^3 = -40$, 故 D 错误. 故选 AB.]

3. ACD [记“从甲袋中取出 2 个球有 i 个红球”为事件 $A_i, i=0, 1, 2$, “从乙袋中取出 2 个球均为红球”为事件 B , 则

$$P(A_0) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}, P(A_1) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}, P(A_2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10},$$

$$P(B|A_0) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}, P(B|A_1) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}, P(B|A_2) =$$

$$\frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{2}{5}.$$

对于 A, 从甲袋中任取 2 个球是 1 个红球 1 个白球的概率为

$$P(A_1) = \frac{3}{5}, \text{ 故 A 正确;}$$

对于 B, 从甲、乙两袋中取出的 2 个球均为红球的概率为

$$P(A_2)P(B|A_2) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{25}, \text{ 故 B 错误;}$$

对于 C, 从乙袋中取出的 2 个球是红球的概率 $P(B) =$

$$\sum_{i=0}^2 P(A_i)P(B|A_i) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{15} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{37}{150}, \text{ 故}$$

C 正确;

对于 D, 从乙袋中取出的是 2 个红球, 则从甲袋中取出的也是

$$2 \text{ 个红球的概率为 } P(A_2|B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{10}}{\frac{37}{150}} = \frac{18}{37}, \text{ 故 D 正确. 故选 ACD.}]$$

4. A [对于 A, $P(AB) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$, 故 A 错误;

$$\text{对于 B, } P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{9}, \text{ 故 B}$$

正确;

对于 C, 事件 B 可分为两种情况:

第一位出场的是男生且第二位出场的是女生; 第一位出场的是女生且第二位出场的是女生,

$$\therefore P(B) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{3}{5}, \therefore P(A) = P(B), \text{ 故 C}$$

正确;

$$\text{对于 D, } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} -$$

$$\frac{1}{3} = \frac{13}{15}, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 A.]

5. 90 [将 6 个人平均分成三组, 有 $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3}$ 种方法,

再进行全排, 有 $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3} \times A_3^3 = C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 15 \times 6 = 90$ (种) 排法.]

6. $\frac{1}{2}$ [记事件 A = “考生答对”, 事件 B = “考生知道答案”,

由全概率公式得 $P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot$

$$P(A|\bar{B}) = \frac{1}{5} \times 1 + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{5}, \text{ 他答对了, 则他确实知道正}$$

$$\text{确答案的概率 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}.]$$

课后限时练(二十二)(A)

1. C [由题意可知, X 的所有可能取值为 0, 1, 2,

$$\text{则 } P(X=0) = \frac{C_1^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1}{C_8^4} = \frac{8}{35},$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 C_3^2 C_2^1 C_2^1}{C_8^4} = \frac{24}{35},$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2}{C_8^4} = \frac{3}{35},$$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{8}{35} + 1 \times \frac{24}{35} + 2 \times \frac{3}{35} = \frac{6}{7}.$$

故选 C.]

2. AD [对于 A, B, 由分布列的性质, 可得 $a + b + \frac{1}{6} = 1$ ①, 因

$$\text{为 } E(\xi) = \frac{5}{3}, \text{ 所以 } a + 2b + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3} \text{ ②, 联立 ① ②, 解得}$$

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, \text{ 故 A 正确, B 错误; 对于 C, D, 因为 } \eta = 3\xi + 1,$$

所以 $E(\eta) = 3E(\xi) + 1 = 6, D(\eta) = 9D(\xi) = 9 \times \frac{5}{9} = 5$, 故 C 错误, D 正确. 故选 AD.]

3. ABC [由分布列的性质可得 $m + n + 0.3 + 0.2 = 1$, 则 $m + n = 0.5$, 故 A 正确;

由 $E(X) = 2.7$, 则 $E(3X - 1) = 3E(X) - 1 = 8.1 - 1 = 7.1$, 故 B 正确;

由 $E(X) = m + 0.6 + 3n + 0.8 = 2.7$, 得 $m + 3n = 1.3$, 又 $m + n = 0.5$,

解得 $m = 0.1, n = 0.4$, 则 $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0.4 + 0.2 = 0.6$, 故 D 错误;

$D(X) = (1 - 2.7)^2 \times 0.1 + (2 - 2.7)^2 \times 0.3 + (3 - 2.7)^2 \times 0.4 + (4 - 2.7)^2 \times 0.2 = 0.81$, 故 C 正确.

故选 ABC.]

4. $\frac{35}{12}$ [随机变量 X 的分布列为 $P(X = k) = \frac{1}{6}, k = 1, 2, 3, 4$,

5, 6, 则 $E(X) = \frac{7}{2}, \sum_{k=1}^6 \left(k^2 \times \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6}$,

所以 $D(X) = \sum_{k=1}^6 \left(k^2 \times \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$.]

5. 解: (1) 设“游戏停止时小队有人投中”为事件 A ,

由题意得 $P(\bar{A}) = (1 - p)(1 - q)(1 - r) = 0.336$,

则游戏停止时小队有人投中的概率为 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0.664$.

(2)(i) X 的所有可能取值为 1, 2, 3,

$P(X = 1) = p, P(X = 2) = (1 - p)q$,

$P(X = 3) = (1 - p)(1 - q)$,

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	p	$(1 - p)q$	$(1 - p)(1 - q)$

$E(X) = p + 2q(1 - p) + 3(1 - p)(1 - q) = 3 - 2p - q + pq$.

(ii) 设采用方案二所需派出的人员数目为 Y , 同理可得 $E(Y) = 3 - 2r - p + rp$,

因为 $1 > p > q > r > 0$, 所以 $E(Y) - E(X) = 2(p - r) + (q - p) + p(r - q) = 2(p - r) + (q - r) + (r - p) + p(r - q) = (p - r) + (1 - p)(q - r) > 0$,

所以 $E(Y) > E(X)$, 所以采用方案一可使所需派出人员数目的期望更小.

课后限时练(二十二)(B)

1. 解: (1) 设甲学校在三个项目中获胜的事件依次记为 A, B, C , 所以甲学校获得冠军的概率为

$P = P(ABC) + P(\bar{A}BC) + P(A\bar{B}C) + P(ABC) = 0.5 \times 0.4 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.8 + 0.5 \times 0.6 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.2 = 0.16 + 0.16 + 0.24 + 0.04 = 0.6$.

(2) 依题意可知, X 的可能取值为 0, 10, 20, 30,

$P(X = 0) = 0.5 \times 0.4 \times 0.8 = 0.16$,

$P(X = 10) = 0.5 \times 0.4 \times 0.8 + 0.5 \times 0.6 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.2 = 0.44$,

$P(X = 20) = 0.5 \times 0.6 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4 \times 0.2 + 0.5 \times 0.6 \times 0.2 = 0.34$,

$P(X = 30) = 0.5 \times 0.6 \times 0.2 = 0.06$.

所以 X 的分布列为

X	0	10	20	30
P	0.16	0.44	0.34	0.06

$E(X) = 0 \times 0.16 + 10 \times 0.44 + 20 \times 0.34 + 30 \times 0.06 = 13$.

2. 解: (1) 依题意有, $P(C) = C_3^1 \times \frac{13}{15} \times \left(1 - \frac{13}{15}\right)^2 = \frac{52}{1125}$,

$P(D) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \times C_2^1 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32}$.

又事件 C 与 D 相互独立,

则 $P(CD) = P(C)P(D) = \frac{52}{1125} \times \frac{3}{32} = \frac{13}{3000}$.

(2) 设 A 组中服用甲种中药康复的人数为 X_1 , 则 $X_1 \sim B\left(3, \frac{13}{15}\right)$,

所以 $E(X_1) = 3 \times \frac{13}{15} = \frac{13}{5}$,

设 A 组的积分为 X_2 , 则 $X_2 = 2X_1$,

所以 $E(X_2) = E(2X_1) = 2E(X_1) = \frac{26}{5}$.

设 B 组中服用乙种中药康复的人数为 Y_1 , 则 Y_1 的可能取值为 0, 1, 2, 3,

$P(Y_1 = 0) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{160}$,

$P(Y_1 = 1) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \times C_2^1 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32}$,

$P(Y_1 = 2) = C_2^1 \times \frac{9}{10} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{63}{160}$,

$P(Y_1 = 3) = \frac{9}{10} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{81}{160}$,

故 Y_1 的分布列为

Y_1	0	1	2	3
P	$\frac{1}{160}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{63}{160}$	$\frac{81}{160}$

所以 $E(Y_1) = 0 \times \frac{1}{160} + 1 \times \frac{3}{32} + 2 \times \frac{63}{160} + 3 \times \frac{81}{160} = \frac{12}{5}$,

设 B 组的积分为 Y_2 , 则 $Y_2 = 2Y_1$,

所以 $E(Y_2) = E(2Y_1) = 2E(Y_1) = \frac{24}{5}$.

因为 $\frac{26}{5} > \frac{24}{5}$, 所以甲种中药药效更好.

课后限时练(二十三)

1. B [盲盒中有大小相同的 3 个红球、2 个黑球, 随机有放回地摸两次球, 记 X 为摸到黑球的个数,

则 $X \sim B\left(2, \frac{2}{5}\right)$,

所以 $E(X) = 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}, D(X) = 2 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$,

随机无放回地摸两次球, 记 Y 为摸到黑球的个数, 则 Y 的所有可能取值为 0, 1, 2,

则 $P(Y = 0) = \frac{C_3^2 C_2^0}{C_5^2} = \frac{3}{10}$,

$P(Y = 1) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}$,

$P(Y = 2) = \frac{C_3^0 C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$,

$$\text{所以 } E(Y) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5},$$

$$D(Y) = \left(0 - \frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{3}{10} + \left(1 - \frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} + \left(2 - \frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{25},$$

$$\text{所以 } E(X) = E(Y), D(X) > D(Y).$$

故选 B.]

2. BCD [设样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$, 则 $x_1 + 1, x_2 + 1, \dots, x_n + 1$ 的平均数等于 $\bar{x} + 1$, 故 A 错误;

$$\text{样本数据 } 1, 1, 1, 0, 2 \text{ 的均值为 } \frac{1+1+1+0+2}{5} = 1,$$

$$\text{故其方差为 } \frac{(1-0)^2 + (1-2)^2}{5} = 0.4, \text{ 标准差为 } \sqrt{0.4} > 0.4,$$

故 B 正确;

$$D(\xi) = 9 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 2, \text{ C 正确};$$

$$\text{根据正态曲线的对称性有 } P(\xi \geq 4) = P(\xi \leq 0) = 0.21,$$

$$\text{因此 } P(\xi > 0) = 1 - P(\xi \leq 0) = 0.79, \text{ 故 D 正确},$$

故选 BCD.]

3. ACD [由题意得 $E(X) = 3, D(X) = 1, E(Y) = 6 \times \frac{1}{2} = 3,$

$$D(Y) = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \text{ 故 A 正确, B 错误};$$

$$\text{又根据正态曲线的对称性可得该曲线关于 } \mu = 3 \text{ 对称, 则 } P(X \leq 1) = P(X \geq 5), \text{ 故 C 正确};$$

$$\text{又 } P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = C_6^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + C_6^1 \times$$

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{7}{64},$$

$$P(Y \geq 5) = P(Y = 5) + P(Y = 6)$$

$$= C_6^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \frac{1}{2} + C_6^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{7}{64},$$

$$\text{则 } P(Y \leq 1) = P(Y \geq 5), \text{ 故 D 正确}.$$

故选 ACD.]

4. 2.1 [∵ $X \sim N(90, \sigma^2)$, 且 $P(X < 70) = 0.2$,

$$\therefore P(X > 110) = 0.2,$$

$$\therefore P(90 \leq X \leq 110) = 0.5 - 0.2 = 0.3,$$

$$\therefore Y \sim B(10, 0.3),$$

$$Y \text{ 的方差为 } 10 \times 0.3 \times (1 - 0.3) = 2.1.]$$

5. 0.26 0.98 [设 A = “甲中靶”, B = “乙中靶”, 则 $\bar{A}$ = “甲脱靶”, $\bar{B}$ = “乙脱靶”. 由于两个人射击的结果互不影响, 所以 A 与 B 相互独立, A 与 $\bar{B}$, $\bar{A}$ 与 B , $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 都相互独立. 由已知可得, $P(A) = 0.8, P(B) = 0.9, P(\bar{A}) = 0.2, P(\bar{B}) = 0.1$. “恰好有一人中靶” = $A\bar{B} \cup \bar{A}B$, 且 $A\bar{B}$ 与 $\bar{A}B$ 互斥, 根据概率的加法公式和事件的独立性定义, 得 $P(A\bar{B} \cup \bar{A}B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) = 0.8 \times 0.1 + 0.2 \times 0.9 = 0.26$. 事件 “至少有一人中靶” = $AB \cup A\bar{B} \cup \bar{A}B$, 且 $AB, A\bar{B}$ 与 $\bar{A}B$ 两两互斥, 所以 $P(AB \cup A\bar{B} \cup \bar{A}B) = P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(AB) + P(A\bar{B} \cup \bar{A}B) = 0.72 + 0.26 = 0.98$.]

6. 解: (1) 样本中一共有 $3 + 4 + 7 + 5 + 1 = 20$ (件) 产品, 包装质量在 $[495, 510]$ 克的产品有 $4 + 7 + 5 = 16$ (件), 故从该流水线任取一件产品为一等品的概率 $P = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$.

(2) 依题意 X 的可能取值为 $0, 1, 2$,

$$P(X=0) = \frac{C_4^2}{C_{20}^2} = \frac{3}{95}, P(X=1) = \frac{C_{16}^1 C_4^1}{C_{20}^2} = \frac{32}{95}, P(X=2) =$$

$$\frac{C_{16}^2}{C_{20}^2} = \frac{12}{19},$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{3}{95}$	$\frac{32}{95}$	$\frac{12}{19}$

$$(3) \text{ 由 (2) 可得 } E(X) = 0 \times \frac{3}{95} + 1 \times \frac{32}{95} + 2 \times \frac{12}{19} = \frac{8}{5}.$$

依题意 $Y \sim B\left(2, \frac{4}{5}\right)$, 则 Y 的可能取值为 $0, 1, 2$,

$$P(Y=2) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25},$$

$$P(X=1) = C_2^1 \times \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{8}{25},$$

$$P(X=0) = \left(1 - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{1}{25},$$

故 Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{16}{25}$

$$\text{所以 } E(Y) = 2 \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5}.$$

$$\text{所以 } E(Y) = E(X).$$

课限时练(二十四)

1. 解: (1) 零假设为

H_0 : 这次考核结果与经验丰富无关.

$$\text{由题意得 } \chi^2 = \frac{500 \times (200 \times 50 - 150 \times 100)^2}{350 \times 150 \times 300 \times 200}$$

$$\approx 3.968 < 6.635 = x_{0.01},$$

根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 没有充分证据推断 H_0 不成立, 因此可以认为 H_0 成立, 即认为这次考核结果与经验丰富无关.

$$(2) \text{ 由题意, } 10 \text{ 名教师中经验丰富的教师人数为 } 10 \times \frac{300}{500} = 6,$$

$$\text{经验不丰富的教师人数为 } 10 \times \frac{200}{500} = 4,$$

则 X 的所有可能取值为 $0, 1, 2, 3, 4$,

$$P(X=0) = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{14},$$

$$P(X=1) = \frac{C_6^3 C_4^1}{C_{10}^4} = \frac{8}{21},$$

$$P(X=2) = \frac{C_6^2 C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{7},$$

$$P(X=3) = \frac{C_6^1 C_4^3}{C_{10}^4} = \frac{4}{35},$$

$$P(X=4) = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210},$$

X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{14} + 1 \times \frac{8}{21} + 2 \times \frac{3}{7} + 3 \times \frac{4}{35} + 4 \times \frac{1}{210} \\ = \frac{8}{5}.$$

2. 解: (1) 设样本平均数的估计值为 $\bar{x}$, 则 $\bar{x} = 10(40 \times 0.01 + 50 \times 0.02 + 60 \times 0.03 + 70 \times 0.024 + 80 \times 0.012 + 90 \times 0.004) = 62$.

所以样本平均数的估计值为 62.

(2) 由题图可知, 前三组的频率和为 $0.1 + 0.2 + 0.3 = 0.6$, 第四组的频率为 0.24 , 所以样本的 80% 分位数为 $65 + \frac{0.8 - 0.6}{0.24} \times 10 = 65 + \frac{25}{3} \approx 73$.

(3) 由(1)可知, 样本平均数的估计值 $\mu = 62$,

所以 $\mu + 2\sigma \approx 62 + 2 \times 14 = 90$,

$$\text{则 } P(X \geq 90) = P(X \geq \mu + 2\sigma) = \frac{1}{2}(1 - 0.9545) = 0.02275.$$

所以估计能参加复试的人数为 $2000 \times 0.02275 \approx 46$.

3. 解: (1) 每个小组投进的次数之和不少于 3 的称为“神投小组”,

则可能的情况有①甲投中一次, 乙投中两次; ②甲投中两次, 乙投中一次; ③甲投中两次, 乙投中两次.

$$\therefore p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{他们在第一轮游戏中获得“神投小组”称号的概率为 } C_2^1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times C_2^1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

(2)(i) 由题意得他们在一轮游戏中获得“神投小组”称号的概率为 $P = C_2^1 \cdot p_1(1-p_1)p_2^2 + p_1^2 C_2^1 \cdot p_2(1-p_2) + p_1^2 \cdot p_2^2 = 2p_1p_2(p_1+p_2) - 3p_2^2p_1^2$.

$$\therefore p_1 + p_2 = \frac{6}{5}, \therefore P = \frac{12}{5}p_1p_2 - 3p_2^2p_1^2.$$

$$\text{又 } 0 \leq p_1 \leq 1, 0 \leq p_2 \leq 1, p_1 + p_2 = \frac{6}{5}, \therefore \frac{1}{5} \leq p_1 \leq 1.$$

$$\text{令 } m = p_1p_2 = -p_1^2 + \frac{6}{5}p_1 = -\left(p_1 - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{9}{25},$$

$$\text{则 } m \in \left[\frac{1}{5}, \frac{9}{25}\right],$$

$$\therefore P = f(m) = -3m^2 + \frac{12}{5}m$$

$$= -3\left(m - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{12}{25}.$$

$$\therefore f(m) = -3m^2 + \frac{12}{5}m \text{ 在 } \left[\frac{1}{5}, \frac{9}{25}\right] \text{ 上单调递增,}$$

$$\therefore P_{\max} = f(m)_{\max} = f\left(\frac{9}{25}\right) = \frac{297}{625},$$

$$\text{此时 } p_1 = p_2 = \frac{3}{5}.$$

(ii) 他们小组在 n 轮游戏中获得“神投小组”称号的次数 ξ 满足 $\xi \sim B\left(n, \frac{297}{625}\right)$,

$$\therefore np = 297, \text{ 则 } n = \frac{297}{\frac{297}{625}} = 625,$$

$\therefore$ 他们平均要进行 625 轮游戏.

4. 解: (1) 由答对概率 $p = \frac{2}{3}$, 得答错概率为 $1 - p = \frac{1}{3}$, X 的可能取值为 3, 4, 5, 6,

$$P(X=3) = C_3^0 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

$$P(X=4) = C_3^1 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9},$$

$$P(X=5) = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9},$$

$$P(X=6) = C_3^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27},$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	3	4	5	6
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{27} + 4 \times \frac{2}{9} + 5 \times \frac{4}{9} + 6 \times \frac{8}{27} = 5.$$

(2)(i) 证明: 对 $n \geq 2$, 得分 $n+1$ 的事件是答最后一题之前, 已得 n 分且最后一题答错的事件与答最后一题之前已得 $n-1$ 分且最后一题答对的事件和, 则 $P_{n+1} = \frac{2}{3}P_n + \frac{1}{3}P_{n-1}$.

$$\text{于是 } P_{n+1} - P_n = -\frac{1}{3}(P_n - P_{n-1}), \text{ 而 } P_1 = \frac{2}{3}, P_2 = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}, \text{ 即 } P_2 - P_1 = \frac{1}{9},$$

所以 $\{P_{n+1} - P_n\}$ 是以 $\frac{1}{9}$ 为首项, $-\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列.

$$(ii) \text{ 由 (i) 得, 当 } n \geq 2 \text{ 时, } P_n = P_1 + \sum_{k=2}^n (P_k - P_{k-1}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1},$$

$$\text{而 } P_1 = \frac{2}{3} \text{ 满足上式, 因此 } P_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1},$$

当 n 为正偶数时, $P_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{12} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}-1}$, 数列 $\{P_n\}$ 递减, 因此 $P_n \leq P_2$;

当 n 为正奇数时, $P_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}$, 数列 $\{P_n\}$ 递增,

$$\text{因此 } P_1 \leq P_n < \frac{3}{4}, \text{ 而 } P_2 = \frac{7}{9} > \frac{3}{4},$$

所以 P_n 的最大值为 $\frac{7}{9}$.

小题满分练(一)

1. C [因为 $i(z-1)=1$, 所以 $z = \frac{1}{i} + 1 = 1 - i$, 故选 C.]

2. A [根据题意, 集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 < 0\} = (1, 2)$, $B = \{x | 0 < x < 6\} = (0, 6)$, 则 $A \cap B = (1, 2)$. 故选 A.]

3. B [因为 $a=5, b=4, C=\frac{\pi}{3}$, 由余弦定理可得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 25 + 16 - 2 \times 5 \times 4 \times \frac{1}{2} = 21$, 所以 $c = \sqrt{21}$. 故选 B.]

4. C [设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

由题意可知 A_2B_2 为 $\triangle FA_1B_1$ 的中位线,

$$\text{则 } |A_1B_1| = 2|A_2B_2| = |y_1 - y_2| = 4,$$

过 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线方程为 $y = \sqrt{3}\left(x - \frac{p}{2}\right)$, 联

$$\text{立 } \begin{cases} y = \sqrt{3}\left(x - \frac{p}{2}\right), \\ y^2 = 2px, \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 整理得 } y^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}py - p^2 = 0,$$

$$\Delta > 0, \text{ 则 } y_1 + y_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}p, y_1y_2 = -p^2,$$

$$\text{则 } |y_1 - y_2| = 4 = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = \sqrt{\frac{4p^2}{3} + 4p^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}p, \text{ 解得 } p = \sqrt{3}, \text{ 故选 C.]}$$

5. C [设事件 D 为这个人患流感, 事件 A_1, A_2, A_3 表示这个人来自 A, B, C 三个地区,

$$\text{这三个地区人口数量的比为 } 3:2:1, P(A_1) = \frac{3}{3+2+1} =$$

$$\frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{2}{3+2+1} = \frac{1}{3}, P(A_3) = \frac{1}{3+2+1} = \frac{1}{6},$$

$$\text{又 } P(D|A_1) = 6\%, P(D|A_2) = 5\%, P(D|A_3) = 4\%,$$

$$\text{故 } P(D) = P(A_1) \cdot P(D|A_1) + P(A_2) \cdot P(D|A_2) + P(A_3) \cdot$$

$$P(D|A_3) = 6\% \times \frac{1}{2} + 5\% \times \frac{1}{3} + 4\% \times \frac{1}{6} = \frac{4}{75}. \text{ 故选 C.]}$$

6. B [根据题意, $\cos \frac{\pi}{3} = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = \frac{1}{2}$, 由于 $0 \leq \varphi < \pi$,

$$\text{所以 } \frac{2\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3} + \varphi < \frac{5\pi}{3}, \text{ 所以 } \frac{2\pi}{3} + \varphi = \frac{5\pi}{6}, \text{ 解得 } \varphi = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{所以 } f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } -\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 所以函数 } f(x) \text{ 的单调递}$$

$$\text{增区间为 } \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{当 } k=0 \text{ 时, 一个单调递增区间为 } \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right], \text{ 当 } k=1 \text{ 时, 一}$$

$$\text{个单调递增区间为 } \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right], \text{ 当 } k=-1 \text{ 时, 一个单调递增区}$$

$$\text{间为 } \left[-\frac{4\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}\right]. \text{ 故选 B.]}$$

7. B [设 $N(x, y), P(x_0, y_0)$, 点 $F(0, 1)$,

$$\text{由 } N \text{ 为 } PF \text{ 的中点, 则可得 } \begin{cases} 2x = x_0, \\ 2y = y_0 + 1, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x_0 = 2x, \\ y_0 = 2y - 1. \end{cases}$$

又因为 $P(x_0, y_0)$ 在圆 M :

$$x^2 + (y+1)^2 = 1 \text{ 上,}$$

$$\text{所以 } (2x)^2 + (2y-1)^2 = 1, \text{ 即}$$

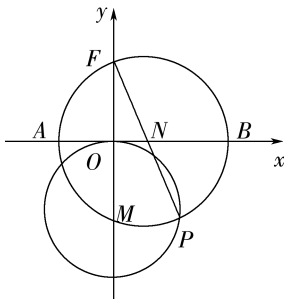
$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, \text{ 即圆心 } N \text{ 的轨迹}$$

是以 $(0, 0)$ 为圆心, $\frac{1}{2}$ 为半径的

圆, 而 $M(0, -1)$, 则 $|MN|$ 的取

$$\text{值范围为 } \left[|MO| - \frac{1}{2},$$

$$|MO| + \frac{1}{2}\right], \text{ 即 } \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right],$$

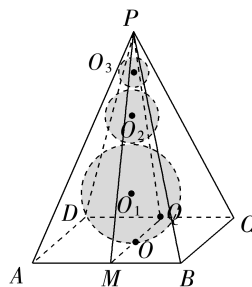


又当 $P(0, 0)$ 时, 圆心 $N\left(0, \frac{1}{2}\right)$, 半径为 $\frac{1}{2}$, 此时圆 N 与 x 轴相切, 不符合题意, 此时 $|MN| = \frac{3}{2}$.

故 $|MN|$ 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

故选 B.]

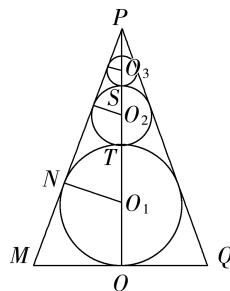
8. B [在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, 令各棱长为 2, O 为正方形 $ABCD$ 的中心, M, Q 分别为边 AB, CD 的中点, 过点 P, M, Q 的平面截正四棱锥 $P-ABCD$ 得等腰 $\triangle PMQ$, 截球 O_1 、球 O_2 、球 O_3 , 得对应球的截面大圆, 如图所示.



显然 $OM=1, PM=\sqrt{PA^2-AM^2}=\sqrt{3}$,

令 N 为圆 O_1 与 PM 相切的切点, 则 $O_1N \perp PM$, 设球 O_1 的半径为 R_1 , 即 $O_1N=R_1$,

$$\text{因为 } \sin \angle MPO = \frac{NO_1}{PO_1} = \frac{OM}{PM} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$



$$\text{则 } PO_1 = \sqrt{3}R_1,$$

$$\text{显然, } PO = PO_1 + OO_1 = (\sqrt{3} + 1)R_1,$$

$$\text{设球 } O_1 \text{ 与球 } O_2 \text{ 相切于点 } T, \text{ 则 } PT = PO - 2R_1 = (\sqrt{3} - 1)R_1,$$

$$\text{设球 } O_2 \text{ 的半径为 } R_2, \text{ 同理可得 } PT = (\sqrt{3} + 1)R_2, \text{ 即 } (\sqrt{3} - 1)R_1 = (\sqrt{3} + 1)R_2,$$

$$\text{即 } R_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}R_1, \text{ 即 } R_2 = (2-\sqrt{3})R_1,$$

设球 O_2 与球 O_3 相切于点 S ,

$$\text{则 } PS = PT - 2R_2 = (3\sqrt{3} - 5)R_1,$$

$$\text{设球 } O_3 \text{ 的半径为 } R_3, \text{ 同理可得 } PS = (\sqrt{3} + 1)R_3,$$

$$\text{即 } R_3 = (7 - 4\sqrt{3})R_1,$$

$$\text{所以 } S_3 = 4\pi R_3^2 = 4\pi(97 - 56\sqrt{3})R_1^2,$$

$$\text{所以 } \frac{S_3}{S_1} = \frac{4\pi(97 - 56\sqrt{3})R_1^2}{4\pi R_1^2} = 97 - 56\sqrt{3}. \text{ 故选 B.]}$$

9. AB [A 项, 将原来 30 个数从小到大排列, $30 \times 22\% = 6.6$,

则 30 个数的 22% 分位数为 30 个数中的第 7 个数,

去掉其中最大和最小两个数据后, $28 \times 22\% = 6.16$, 故剩下的 28 个数据的 22% 分位数为 28 个数中的第 7 个数,

也是 30 个数中的第 8 个数, 故两者不相等, 故 A 项正确;

4. C [平均数 $\bar{x} = \frac{40}{100} \times 30 + \frac{60}{100} \times 25 = 27$,

方差 $s^2 = \frac{40}{100} [18 + (30 - 27)^2] + \frac{60}{100} [12 + (25 - 27)^2] = 20$.

4. 故选 C.]

5. A [函数的定义域为 $(-1, 1)$, 因为 $f(x) = (2x + a) \cdot \left| \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right|$ 是奇函数,

所以 $f(-x) = (-2x + a) \left| \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right| = -(2x - a) \cdot \left| -\ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right| = -(2x + a) \cdot \left| \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right| = -f(x)$ 恒成立, 所以 $a = -a$, 解得 $a = 0$. 故选 A.]

6. C [当 $n=0$ 时, m, l 可以是任意向量, 因此是不充分条件; 当 $m \parallel l$ 时, 若 $l=0$, 显然 $m \cdot (n \cdot l) = (m \cdot n) \cdot l$ 成立; 当 $l \neq 0$ 时, 因为 $m \parallel l$, 所以 $m = kl$, 因此 $m \cdot (n \cdot l) = kl \cdot (n \cdot l) = k(n \cdot l) \cdot l, (m \cdot n) \cdot l = (kl \cdot n) \cdot l = k(l \cdot n) \cdot l$, 又 $n \cdot l = l \cdot n$, 因此 $m \cdot (n \cdot l) = (m \cdot n) \cdot l$ 成立. 故“ $m \cdot (n \cdot l) = (m \cdot n) \cdot l$ ”是“ $m \parallel l$ ”的必要条件. 故选 C.]

7. A [作出示意图如图所示, 根据题意可得圆锥的内切球和外接球球心重合且在高线 SH 上, H 为底面圆的圆心, 记球心为 O , 则 $\angle OSA = \angle OAS = \angle OAH = 30^\circ$, 所以外接球半径 $R = OA = OS = 2OH$,

因为 $\frac{3}{2}R = SH = 3\sqrt{3}$, 所以 $R = 2\sqrt{3}$.

因此圆锥外接球的表面积为 48π .

故选 A.]

8. D [如图所示,

设 $l: y = \frac{1}{2}x + m$,

$\therefore C(-2m, 0), D(0, m)$,

由题意得 $B\left(-m, \frac{m}{2}\right)$,

$A(2m, 2m)$,

$\therefore \begin{cases} \frac{m^2}{a^2} - \frac{m^2}{4b^2} = 1, \\ \frac{4m^2}{a^2} - \frac{4m^2}{b^2} = 1, \end{cases}$

$\therefore \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4b^2} = \frac{4}{a^2} - \frac{4}{b^2}, \therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{5}{4},$

$\therefore e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{9}{4}, \therefore e = \frac{3}{2}.$

9. ABD [由题意得 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

$P(AB) = P(AC) = P(BC) = P(ABC) = \frac{1}{4}$, 所以 $P(AB) = P(A)P(B), P(AC) = P(A)P(C), P(BC) = P(B)P(C), P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$. 故选 ABD.]

10. BD [因为 $S_n = 3^n + r$,

所以 $a_n = \begin{cases} S_1 = 3 + r, n=1, \\ S_n - S_{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}, n \geq 2. \end{cases}$

当 $r=3$ 时, $a_1 = a_2 = 6$, 所以数列 $\{a_n\}$ 不是递增数列;

若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则 $3+r=2$, 所以 $r=-1$;

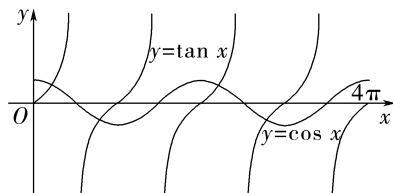
因为 $a_{2n} = 2 \cdot 3^{2n-1}$, 所以数列 $\{a_{2n}\}$ 一定是等比数列;

当 $r \neq -1$ 时, 数列 $\{a_{2n-1}\}$ 不是等比数列. 故选 BD.]

11. ABD [因为 $\tan x_1 = \cos x_1$, 所以 $\sin x_1 = \cos^2 x_1 = 1 -$

$\sin^2 x_1$, 解得 $\sin x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 故 A 选项正确;

作出函数 $y = \tan x$ 与 $y = \cos x$ 的图象,



通过图象可以得到这两个函数有 4 个交点, 故 B 选项正确;

又 4 个交点关于点 $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$ 两两对称,

所以 $\sum_{i=1}^n x_i = 2 \times \frac{3\pi}{2} + 2 \times \frac{3\pi}{2} = 6\pi$,

$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = 6\pi + 0 = 6\pi$, 因此 D 选项正确, C 选项错误. 故选 ABD.]

12. 2 [由题意得焦点坐标 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 准线方程 $x = -\frac{p}{2}$, 焦点关

于准线方程对称点的坐标为 $\left(-\frac{3p}{2}, 0\right)$, 因此 $-\frac{3p}{2} = -3$, 所以 $p = 2$.]

13. $2 + \sqrt{3}$ [由随机变量 $\xi \sim N(2, 4)$, 得正态曲线关于直线 $x = 2$ 对称, $P(\xi \geq a) + P(\xi > 2b) = 1$, 因为 $1 - P(\xi \geq a) = P(\xi < a)$, 所以 $P(\xi > 2b) = P(\xi < a)$, 所以 $\frac{a+2b}{2} = 2$, 得 $a+2b=4$, 又 $a > 0, b > 0$,

则 $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = \frac{1}{4}(a+2b)\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(8 + \frac{4b}{a} + \frac{3a}{b}\right) \geq 2 + \sqrt{3},$

当且仅当 $\frac{4b}{a} = \frac{3a}{b}$, 即 $a = 2\sqrt{3} - 2, b = 3 - \sqrt{3}$ 时取等号,

所以 $\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$ 的最小值为 $2 + \sqrt{3}$.]

14. $(3\sqrt{2} - 3, 3\sqrt{3} - 3)$ [因为 $A = 2B$,

则 $\sin A = \sin 2B = 2\sin B \cos B$, 所以 $a = 2b \cos B$.

由 $a+b=3$ 得, $b = \frac{3}{2\cos B + 1}$,

又 $\sin C = \sin(\pi - A - B) = \sin(\pi - 3B) = \sin 3B$

$= \sin B \cos 2B + \cos B \sin 2B$

$= \sin B(1 - 2\sin^2 B) + 2\sin B(1 - \sin^2 B) = 3\sin B - 4\sin^3 B,$

所以 $c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{3(3\sin B - 4\sin^3 B)}{(2\cos B + 1)\sin B} = \frac{3(4\cos^2 B - 1)}{2\cos B + 1}$, 化简

得 $c = 6\cos B - 3$,

由锐角 $\triangle ABC$, 得 $\begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < A = 2B < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < C = \pi - 3B < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$

可得 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{4}$, 即 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos B < \frac{\sqrt{3}}{2}$,

因此边 c 的取值范围是 $(3\sqrt{2} - 3, 3\sqrt{3} - 3)$.]

小题满分练(三)

1. B [由 $A \cap B = B$, 得 $B \subseteq A$,

因为 $B = \{1, m\}$, 所以 $m \neq 1$,

因为集合 $A = \{1, 2, \sqrt{m}\}$,

所以 $m = 2$ 或 $m = \sqrt{m}$,

解得 $m = 2$ 或 $m = 0$ ($m = 1$ 不合题意舍去),

所以 $m = 0$ 或 2 .

故选 B.]

2. B [$\because z(1-i) = |1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$,

$$\therefore z = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i.$$

故选 B.]

3. D [由 $a_2 + a_6 = 15 - a_{10}$ 可得 $3a_6 = 15$, 即 $a_6 = 5$, 则 $S_{11} =$

$$\frac{11(a_1 + a_{11})}{2} = 11a_6 = 11 \times 5 = 55. \text{ 故选 D.}]$$

4. C [成绩落在 $[60, 70)$ 的频率为 $0.01 \times 10 = 0.1$,

成绩落在 $[70, 80)$ 的频率为 $0.03 \times 10 = 0.3$,

成绩落在 $[80, 90)$ 的频率为 $0.04 \times 10 = 0.4$,

因为 $0.1 + 0.3 = 0.4 < 0.5$, $0.1 + 0.3 + 0.4 = 0.8 > 0.5$, 所以中位数落在 $[80, 90)$ 内,

设中位数为 x , 则 $0.1 + 0.3 + (x - 80) \times 0.04 = 0.5$, 解得 $x = 82.5$. 故选 C.]

5. B [由共面向量的基本定理可知, 若三个非零向量 a, b, c 满足 $c = \lambda a + \mu b$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$), 则 a, b, c 共面, 反之, 若三个非零向量 a, b, c 共面, 当 a, b 共线, c 与 a, b 不共线时, 就不存在实数 λ, μ 使得 $c = \lambda a + \mu b$,

故“ a, b, c 共面”是“ $c = \lambda a + \mu b$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$)”的必要不充分条件.

故选 B.]

6. B [设上底面的半径为 r , 则下底面的半径为 $2r$, 母线长为 $3r$,

故 $4 = \sqrt{9r^2 - (2r - r)^2} = 2\sqrt{2}r$, 故 $r = \sqrt{2}$, 故圆台的体积为

$$\frac{1}{3} \times 4 \times [\pi(\sqrt{2})^2 + \pi(2\sqrt{2})^2 + \pi \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}] = \frac{56\pi}{3}.$$

故选 B.]

7. A [由题意得 $t > 0$, 令 $f(x) = 0$,

$$\text{则 } e^{x+\ln t} + 2(x + \ln t) = e^{\ln x} + 2\ln x,$$

$$\text{令 } g(x) = e^x + 2x,$$

因为函数 $y = e^x, y = 2x$ 均在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

所以由 $g(x + \ln t) = g(\ln x)$, 得 $x + \ln t = \ln x$,

$$\text{即 } \ln t = \ln x - x,$$

$$\text{令 } h(x) = \ln x - x, x > 0, \text{ 则 } h'(x) = \frac{1-x}{x},$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

所以 $h(x)_{\max} = h(1) = -1$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$,

所以 $\ln t \leq -1$, 解得 $0 < t \leq \frac{1}{e}$, 即 t 的取值范围为 $(0, \frac{1}{e}]$.

故选 A.]

8. C [设 $|AB| = |AF_1| = m$,

$$\text{则 } |AF_2| = m - 2a, |BF_2| = 2a.$$

$$\text{因为 } |BF_1| - |BF_2| = 2a,$$

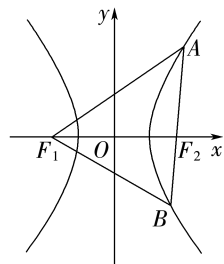
所以 $|BF_1| = 4a$, 在 $\triangle ABF_1$ 中,

$$\cos \angle BAF_1 = \frac{m^2 + m^2 - 16a^2}{2m^2}$$

$$= \frac{7}{8}, \text{ 解得 } m = 8a.$$

$$\text{在 } \triangle AF_1F_2 \text{ 中, } \cos \angle BAF_1 = \frac{64a^2 + 36a^2 - 4c^2}{2 \times 8a \times 6a} = \frac{7}{8}, \text{ 解得 } c^2 =$$

$$4a^2, \text{ 所以离心率 } e = \frac{c}{a} = 2. \text{ 故选 C.}]$$



9. AD [由题图可知, $A = 2, \frac{T}{4} = \frac{\pi}{4}$, 得 $T = \pi$,

所以 $\omega = 2$,

$$\text{即 } f(x) = 2\sin(2x + \varphi),$$

将点 $(\frac{\pi}{6}, 2)$ 代入可得 $2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 又 $|\varphi| <$

$$\frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{所以 } f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{对于 A, 当 } x = \frac{13\pi}{6} \text{ 时, } f(x) = 2\sin\left(2 \times \frac{13\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = 2, \text{ 故 } y =$$

$f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{13\pi}{6}$ 对称, 故 A 正确;

$$\text{对于 B, 当 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 时, } 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right],$$

$$\text{则 } 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in [-1, 2], \text{ 故 B 错误;}$$

$$\text{对于 C, 当 } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ 时, } 2x + \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right),$$

正弦函数在 $\left(-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ 上不单调, 故 C 错误;

$$\text{对于 D, } y = f\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) = 2\sin\left(2x + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = -2\sin 2x, \text{ 易}$$

知是奇函数, 故 D 正确. 故选 AD.]

10. BD [由题意知直线 AB 的斜率存在, 设直线 AB 的方程为 $y = kx + 3, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + 3, \\ x^2 = 2py, \end{cases} \text{ 可得 } x^2 - 2pkx - 6p = 0, \Delta > 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = 2pk, x_1x_2 = -6p, \text{ 故 } y_1y_2 = \frac{x_1^2x_2^2}{4p^2} = 9, \text{ 因}$$

$$\text{为 } |AF| = 2, |BF| = 10,$$

$$\text{所以 } y_1 = 2 - \frac{p}{2}, y_2 = 10 - \frac{p}{2},$$

$$\text{则 } \left(2 - \frac{p}{2}\right)\left(10 - \frac{p}{2}\right) = 9, \text{ 解得 } p = 2 \text{ 或 } p = 22,$$

因为 $2 - \frac{p}{2} > 0$, 所以 $p = 2$, 则 E 的准线方程为 $y = -1$, 故 B

正确, A 错误;

又 $y_1 = 1, y_2 = 9$, 不妨取 $A(-2, 1), B(6, 9)$, 所以 $|AB| =$

$$\sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2},$$

$$\frac{S_{\triangle BFC}}{S_{\triangle AFC}} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{y_2}{y_1} = 9, \text{ 故 C 错误, D 正确.}$$

故选 BD.]

11. ABD [对于 A, 因为 $f(x-1)$ 为奇函数,

故 $f(-x-1)+f(x-1)=0$, 令 $x=0$, 则 $f(-1)=0$,

因为 $g(x)=(x+1)f(x)$,

故 $g'(x)=f(x)+(x+1)f'(x)$,

故 $g'(-1)=f(-1)+0=0$, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $f(-x-1)+f(x-1)=0$, 则 $-f'(-x-1)+f'(x-1)=0$,

故 $f'(x-1)=f'(-x-1)$, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $g(x-1)=xf(x-1)$,

$g(-x-1)=-xf(-x-1)=xf(x-1)$,

故 $g(x-1)=g(-x-1)$,

故 $g'(x-1)=-g'(-x-1)$, 故 C 错误;

对于 D, 因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

故 $f'(x) \geq 0$,

而 $f(-1)=0$, 故当 $x > -1$ 时, $f(x) > 0$, 当 $x < -1$ 时, $f(x) < 0$,

故当 $x > -1$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x < -1$ 时, $g'(x) < 0$,

故 $g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增,

而 $g(x-1)=g(-x-1)$, 故 $x=-1$ 为 $g(x)$ 的图象的对称轴,

故 $g(-1-\sqrt{1.04})=g(-1+\sqrt{1.04})$,

设 $s(x)=-1+\sqrt{1+2x}-\ln(1+x)$, 其中 $0 < x < 1$,

$$s'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+2x}}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-\sqrt{1+2x}}{(x+1)\sqrt{1+2x}} \\ =\frac{\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{1+2x}}{(x+1)\sqrt{1+2x}} > 0,$$

故 $s'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

故 $s(x) > s(0)=0$,

故 $-1+\sqrt{1+2x} > \ln(1+x)$, 故 $-1+\sqrt{1+2 \times 0.02}$

$> \ln(1+0.02)$, 故 $-1+\sqrt{1.04} > \ln 1.02$,

故 $g(\ln 1.02) < g(-1+\sqrt{1.04})$,

即 $g(\ln 1.02) < g(-1-\sqrt{1.04})$, 故 D 正确.

故选 ABD.]

12. $-\frac{1}{9}$ [依题意, $\tan \alpha \tan \beta = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = 2$, 则 $\sin \alpha \sin \beta = 2 \cos \alpha \cos \beta$,

由 $\cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{3}$, 得 $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}$,

解得 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{9}$,

所以 $\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = -\cos \alpha \cos \beta = -\frac{1}{9}$.]

13. $\frac{2}{5}$ [由题意可知从甲袋中任取 2 个球有两种情况, 2 个白球或 1 个白球 1 个红球.

①从甲袋中取出 2 个白球的概率为 $\frac{C_4^2}{C_5^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$,

放入乙袋后, 乙袋此时有 4 个白球, 2 个红球, 取到红球的概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

②从甲袋中取出 1 个白球 1 个红球的概率为 $\frac{C_4^1 C_1^1}{C_5^2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$,

放入乙袋后, 乙袋此时有 3 个白球, 3 个红球, 取到红球的概率为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,

综上两种情况可知, 从甲袋中任取 2 个球放入乙袋, 再从乙袋中任取一球为红球的概率 $P = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$.]

14. -4 [设 F, G 分别为 BC, DE 的中点, 连接 AF, FG ,

因为正三角形 ABC 和正方形 $BCDE$ 的边长均为 4,

所以 $AF \perp BC, AF = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$,

在正方形 $BCDE$ 中, $FG \parallel CD$,

$FG \perp BC, FG = CD = 4$,

所以 $\angle AFG$ 为二面角 $A-BC-D$

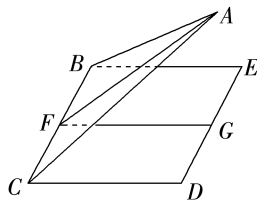
的平面角,

又因为二面角 $A-BC-D$ 的大小

为 $\frac{\pi}{6}$,

所以 $\angle AFG = \frac{\pi}{6}$, 所以 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FG})$

$$= \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{FG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{FG} = 2\sqrt{3} \times 4 \times (-\cos \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2} \times 4^2 = -4.]$$



小题满分练(四)

1. D [因为 $i(-2-3i) = 3-2i$, 所以对应的点为 $(3, -2)$, 在第四象限. 故选 D.]

2. A [由 $x^2 - x - 12 < 0$, 得 $-3 < x < 4$, 所以 $B = \{x | -3 < x < 4\}$.

由 $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, 得 $A \cap B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. 故选 A.]

3. B [根据 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = -1, \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$ 可得 $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AC}|^2 = 2$, 解得 $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$,

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理可知 $\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$,

$$\text{即 } \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \angle ACB \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因为 $\sqrt{2} < 2$, 即 $AC < AB$, 所以 $\angle ABC < \angle ACB$, 所以 $\angle ABC$ 为锐角, 所以 $\angle ABC$ 的最大值为 $\frac{\pi}{4}$. 故选 B.]

4. A [因为 $\tan(\alpha-2\beta) = 1, \tan(\alpha+2\beta) = 2$,

所以 $\tan 2\alpha = \tan[(\alpha-2\beta) + (\alpha+2\beta)]$

$$= \frac{\tan(\alpha-2\beta) + \tan(\alpha+2\beta)}{1 - \tan(\alpha-2\beta) \cdot \tan(\alpha+2\beta)} = \frac{1+2}{1-1 \times 2} = -3. \text{ 故选 A.}]$$

5. A [由题意有 $a = 3^{0.2} > 1, b = \log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5}, c = \log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3}$,

又 $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $1 < \log_2 3 < \log_2 5$, 所以 $1 > \frac{1}{\log_2 3} > \frac{1}{\log_2 5}$, 所以 $1 > c > b$,

所以 $a > 1 > c > b$, 即 $a > c > b$. 故选 A.]

6. B [由题意知, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 可得 $a > 1$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减,

可得 $f'(x) = 3x^2 - 6x + a \geq 0$ 在 $(-\infty, 1]$ 上恒成立,

即 $a \geq -3x^2 + 6x = -3(x-1)^2 + 3$ 在 $(-\infty, 1]$ 上恒成立,
 又当 $x=1$ 时, $-3(x-1)^2 + 3$ 取最大值为 3, 所以 $a \geq 3$,
 又 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + ax + 2a - 5, & x \leq 1, \\ a \log_a x + 2a, & x > 1 \end{cases}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数,
 所以 $1 - 3 + a + 2a - 5 \leq 2a$, 解得 $a \leq 7$,
 综上, 实数 a 的取值范围为 $[3, 7]$, 故选 B.]

7. C [设 $|AF_2| = m$,

则 $|BF_2| = m$, 由双曲线定义可知 $|AF_1| = m + 2a$, $|BF_1| = m - 2a$,

则 $|AB| = |AF_1| - |BF_1| = 4a$,
 又 $\triangle ABF_2$ 为等腰直角三角形,

则 $|AB| = \sqrt{2}|AF_2|$,

即 $4a = \sqrt{2}m$, 得 $m = 2\sqrt{2}a$,

则 $|AF_2| = 2\sqrt{2}a$, $|AF_1| = (2\sqrt{2} + 2)a$,

在 $\triangle AF_1F_2$ 中, 由余弦定理的推论得

$$\cos \angle F_1AF_2 = \frac{|AF_1|^2 + |AF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|AF_1| \cdot |AF_2|},$$

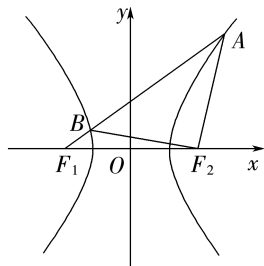
$$\text{即 } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{[(2\sqrt{2} + 2)a]^2 + (2\sqrt{2}a)^2 - 4c^2}{2 \cdot (2\sqrt{2} + 2)a \cdot 2\sqrt{2}a},$$

整理可得 $c^2 = 3a^2$, 所以 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 3$, $e = \sqrt{3}$. 故选 C.]

8. B [函数 $y = x^3$, $y = x$ 均为奇函数且为增函数, 则函数 $f(x) = x^3 + x$ 为奇函数且为增函数, 由数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 得 $a_1 + a_{2025} = 2a_{1013} < 0$, 即 $a_1 < -a_{2025}$,
 于是 $f(a_1) < f(-a_{2025}) = -f(a_{2025})$,
 即 $f(a_1) + f(a_{2025}) < 0$, 同理 $f(a_2) + f(a_{2024}) < 0$,
 $f(a_3) + f(a_{2023}) < 0, \dots, f(a_{1012}) + f(a_{1014}) < 0$,
 $f(a_{1013}) < 0$,
 因此 $f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + \dots + f(a_{2024}) + f(a_{2025}) < 0$.
 故选 B.]

9. ABD [给定数据由小到大排列为 5.5, 5.5, 8.0, 8.0, 8.5, 8.5, 8.5, 9.0, 对于 A, 平均数 $\bar{x} = \frac{5.5 + 2 \times 8.0 + 3 \times 8.5 + 9.0}{7} = 8.0$, 中位数为 8.5, A 正确;
 对于 B, 由 $7 \times 80\% = 5.6$, 得这组数据的 80% 分位数为 8.5, B 正确;
 对于 C, 这组数据的众数为 8.5, C 错误;
 对于 D, 新数据组的平均数为 $\frac{2 \times 8.0 + 3 \times 8.5}{5} = 8.3$, D 正确.
 故选 ABD.]

10. AC [由题意知, 等边 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$,
 等边 $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, 又正三棱台容器 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 2, 所以正三棱台容器 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{1}{3} \times 2 \times (9\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{9\sqrt{3} \times \sqrt{3}}) = \frac{26\sqrt{3}}{3}$,
 故 A 正确;



设 BC 的中点为 M , B_1C_1 的中点为 M_1 , $\triangle ABC$ 的中心为 O , $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心为 O_1 , 则 MM_1 为侧面梯形的高, 如图所示,

在截面 AA_1M_1M 中, $OO_1 = 2$,

$AM = 3\sqrt{3}$, $A_1M_1 = \sqrt{3}$, 又

$\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{A_1O_1} = 2\overrightarrow{O_1M_1}$,

所以 $MM_1 = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

所以正三棱台容器 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面积为 $3 \times \frac{1}{2} \times$

$(2+6) \times \frac{4\sqrt{3}}{3} = 16\sqrt{3}$, 故 B 错误;

设等边 $\triangle DEF$ 的边长为 x , 由 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, 所以

$\frac{2 - \frac{3}{2}}{\frac{x-2}{6-2}} = \frac{x-2}{6-2}$, 解得 $x=3$, 即 $DE=3$, 故 C 正确;

等边 $\triangle DEF$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$, 正三棱台

$ABC-DEF$ 的高为 $\frac{3}{2}$,

所以水的体积 $V_{\text{正三棱台 } ABC-DEF} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \left(9\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{4} + \sqrt{9\sqrt{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{4}}\right) = \frac{63\sqrt{3}}{8}$, 故 D 错误.

故选 AC.]

11. BCD [如图, $P(x_0, y_0)$ 是正方形

$ABCD$ 边上的动点, 故 $|OP| \leq \sqrt{2}$,

又 $a > 2$,

所以 $P(x_0, y_0)$ 在圆: $x^2 + y^2 = a$

的内部, 即 $x_0^2 + y_0^2 < a$,

所以圆心 $(0, 0)$ 到直线 $l: x_0x +$

$y_0y = a$ 的距离 $d = \frac{a}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$

$> \sqrt{a}$,

所以直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = a$ 相离, 故 A 错误;

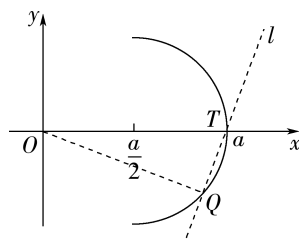
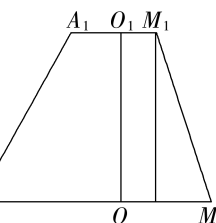
若 $P(1, 0)$, 此时 $l: x = a$,

当 $x_0 = 1, -1 \leq y_0 \leq 1$ 且 $y_0 \neq 0$ 时, 直线 $l: x + y_0y = a$ 过定点 $T(a, 0)$,

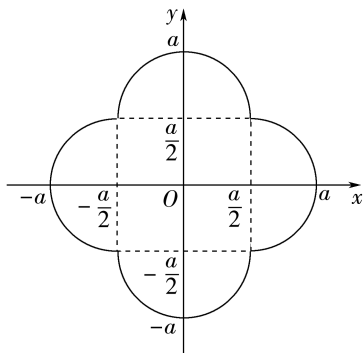
由 $-1 \leq y_0 \leq 1$ 且 $y_0 \neq 0$, 可得 $-\frac{1}{y_0} \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$,

所以直线 l 的倾斜角的取值范围为 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$,

因为 OQ 与直线 l 垂直, 所以曲线 Γ 是以 $OT = a$ 为直径的右半圆, 如图所示,



其余类型同理可得,故曲线 Γ 如图所示:



故曲线 Γ 的周长为 $2a\pi$, 面积为 $a^2 + 2 \times \pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)a^2$, 故 BC 正确;

又 O 与曲线 Γ 上点的距离 $d \geq \frac{\sqrt{2}}{2}a$, 且 $a > 2$,

故 $d > \sqrt{a}$, 故圆 $O: x^2 + y^2 = a$ 与曲线 Γ 没有公共点, D 正确. 故选 BCD.]

12. -1 [由题意有 $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$

$$\ln\left(\frac{4}{-x-2} - a\right) = -\ln\left(\frac{4}{x-2} - a\right),$$

$$\text{所以 } \ln\left(-\frac{4}{x+2} - a\right) + \ln\left(\frac{4}{x-2} - a\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\ln\left[\left(-\frac{4}{x+2} - a\right)\left(\frac{4}{x-2} - a\right)\right] = 0,$$

$$\text{即 } \left(-\frac{4}{x+2} - a\right)\left(\frac{4}{x-2} - a\right) = 1,$$

化简整理得 $(a+1)[(x^2-4)a - (x^2+12)] = 0$, 解得 $a = -1$. 经验证, 当 $a = -1$ 时, 原函数定义域为 $x > 2$ 或 $x < -2$, 关于原点对称, 满足题意, 故 $a = -1$.]

13. 1 [$f(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x = 2\left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3}\right) =$

$$2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{当 } x \in [0, \pi] \text{ 时, } x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right],$$

所以由余弦函数的性质可知, 当 $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ 时, 即 $x = 0$ 时, 有 $f(x)_{\max} = 1$.]

14. 12 [设编号为 n 的蓝色珠子为 A_n , 编号为 n 的绿色珠子为 B_n ,

当同一个颜色的珠子取出个数为 3 个时, 例如: A_1, A_2, A_3, B_1 , 无论怎么排列均无法满足相同颜色不相邻, 舍去, 所以取出的珠子中蓝色和绿色的个数均为 2 个,

当选取的蓝色和绿色珠子编号为两组相同编号时, 例如: A_1, A_2, B_1, B_2 时, 当满足相同颜色不相邻时, 无法满足相同编号不相邻, 舍去, 所以取出的珠子一定为两个蓝色两个绿色珠子, 且蓝色和绿色珠子只有一个编号相同, 例如: A_1, A_2, B_1, B_3 , 所有取出情况如下:

$A_1, A_2, B_1, B_3; A_1, A_2, B_2, B_3; A_1, A_3, B_1, B_2; A_1, A_3, B_2, B_3; A_2, A_3, B_1, B_3; A_2, A_3, B_1, B_2$.

即共有 6 种取出方式, 排列例如: $A_1 B_2 A_3 B_1, B_1 A_3 B_2 A_1$, 相同编号只能在最前和最后,

一种选取方式下共有 $C_2^1 = 2$ 种排列方式, 所以总的排列方式有 $6 \times 2 = 12$ 种.]

小题满分练(五)

1. C [$\because \sqrt{x} < 2, \therefore 0 \leq x < 4$,

$\therefore M = \{x | 0 \leq x < 4\}$, 又 $N = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $\therefore M \cap N = \{0, 1, 2\}$. 故选 C.]

2. D [因为 $z(1+i) = 2i$, 所以 $z = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1+i$,

所以 $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. 故选 D.]

3. D [因为 $b \perp (b-4a)$, 所以 $b \cdot (b-4a) = 0$,

所以 $b^2 - 4a \cdot b = 0$, 即 $4 + x^2 - 4x = 0$, 解得 $x = 2$, 故选 D.]

4. C [由于 $\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, $\sin(\alpha-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$,

那么 $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = 3 \sin \alpha \cos \beta - 3 \cos \alpha \sin \beta$,

所以 $4 \cos \alpha \sin \beta = 2 \sin \alpha \cos \beta$, 则 $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = 2$. 故选 C.]

5. B [对于 A, $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, 因为 $f\left(\frac{1}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$f\left(\frac{5}{6}\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2},$$

所以函数 $f(x) = \sin \pi x$ 在 $(0, 1)$ 内不单调递增, 故 A 错误;

$$\text{对于 B, } f(x+2) = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \pi\right)\right| = \left|\sin \frac{\pi}{2}x\right| = f(x),$$

所以函数 $f(x)$ 的周期为 2,

$$\text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } f(x) = \left|\sin \frac{\pi}{2}x\right| = \sin \frac{\pi}{2}x, \text{ 因为 } 0 < \frac{\pi}{2}x < \frac{\pi}{2},$$

函数 $y = \sin x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增,

所以函数 $f(x) = \left|\sin \frac{\pi}{2}x\right|$ 在 $(0, 1)$ 内单调递增, 故 B 正确;

$$\text{对于 C, 因为 } f\left(\frac{1}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = \cos \pi = -1,$$

所以函数 $f(x) = \cos 2\pi x$ 在 $(0, 1)$ 内不单调递增, 故 C 错误;

对于 D, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $\pi x \in (0, \pi)$, 又 $\pi x \neq \frac{\pi}{2}$, 所以函数 $f(x) = \tan \pi x$ 不满足题意, 故 D 错误.

故选 B.]

6. C [设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 则把点 $(1,$

$$1) \text{ 的坐标代入方程, 得 } \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \quad \text{①}.$$

因为渐近线的方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 且双曲线的两条渐近线的夹角为 60° , 所以渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 的倾斜角为 30° 或 60° .

$$\text{若倾斜角为 } 30^\circ, \text{ 则 } \frac{b}{a} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, a = \sqrt{3}b \quad \text{②},$$

$$\text{把②代入①, 得 } -\frac{2}{3b^2} = 1, \text{ 无解;}$$

$$\text{若倾斜角为 } 60^\circ, \text{ 则 } \frac{b}{a} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, b = \sqrt{3}a \quad \text{③},$$

$$\text{把③代入①, 得 } \frac{2}{3a^2} = 1, \text{ 所以 } a^2 = \frac{2}{3}, \text{ 所以 } b^2 = 3a^2 = 2, \text{ 所以}$$

$$\text{离心率 } e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 2. \text{ 故选 C.}]$$

7. C [设圆锥底面半径为 r , 由题意可得

$$2\pi r = 2\sqrt{3}\pi,$$

$$\text{解得 } r = \sqrt{3},$$

如图, 作出图形的轴截面, 其中 E, B 分别为圆台的上、下底面圆的圆心,

$$\text{则 } CB = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 3,$$

$$\frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{3}, \text{ 可得 } CE = 1, BE = 2,$$

$$V = \frac{1}{3} \times \left(\pi \times 3 + \pi \times \frac{1}{3} + \sqrt{\pi \times 3 \times \pi \times \frac{1}{3}} \right) \times 2 = \frac{26\pi}{9}. \text{ 故选 C.]}$$

8. B [法一: 由曲线 $y = e^{x-1}$ 与曲线 $y = a \ln x + a (a > 0)$ 只有一个公共点,

得方程 $e^{x-1} = a(\ln x + 1)$ 只有一个实数解, 而 $a > 0$, 则只考虑 $x > \frac{1}{e}$, 即 $a = \frac{e^{x-1}}{\ln x + 1}$, 令 $f(x) = \frac{e^{x-1}}{\ln x + 1} (x > \frac{1}{e})$,

$$\text{则 } f'(x) = \frac{e^{x-1} \left(1 + \ln x - \frac{1}{x} \right)}{(\ln x + 1)^2} \left(x > \frac{1}{e} \right),$$

而 $u(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}$ 在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty \right)$ 上单调递增, 且 $u(1) = 0$,

所以当 $x \in \left(\frac{1}{e}, 1 \right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

而 $x \rightarrow \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 所以 $a = f(1) = 1$.

法二: 由曲线 $y = e^{x-1}$ 与曲线 $y = a \ln x + a (a > 0)$ 只有一个公共点,

则曲线 $y = e^{x-1}$ 与曲线 $y = a \ln x + a (a > 0)$ 只有一个公切点, 设其坐标为 (x_0, y_0) ,

$$\text{所以 } \begin{cases} y_0 = e^{x_0-1} = a \ln x_0 + a, \\ e^{x_0-1} = \frac{a}{x_0}, \end{cases}$$

$$\text{即 } \frac{a}{x_0} = a \ln x_0 + a, \text{ 所以 } \frac{1}{x_0} = \ln x_0 + 1,$$

设 $h(x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1$, 则 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 而 $h(1) = 0$,

所以 $x_0 = 1$, 所以 $a = 1$.

法三: 由于函数 $y = e^{x-1}$ 的反函数为 $y = \ln x + 1$, 两函数关于 $y = x$ 对称,

由于 $y' = e^{x-1}$, 令 $e^{x-1} = 1$, 则 $x = 1$, 即函数 $y = e^{x-1}$ 与函数 $y = x$ 相切于点 $(1, 1)$,

同理, $y' = \frac{1}{x}$, 令 $\frac{1}{x} = 1$, $x = 1$, 即函数 $y = \ln x + 1$ 与函数 $y = x$ 也相切于点 $(1, 1)$,

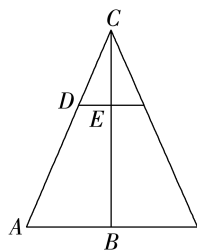
于是函数 $y = e^{x-1}$ 与函数 $y = \ln x + 1$ 相切于点 $(1, 1)$, 由选项可知, $a = 1$.

故选 B.]

9. BCD [由题表中的数据可知

$$\bar{x} = \frac{12+14+16+18+20}{5} = 16,$$

$$\bar{y} = \frac{17+16+14+13+11}{5} = 14.2.$$



对于 A,

$$\text{由 } r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}},$$

知样本相关系数的正负取决于分子, 又

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (-4) \times 2.8 + (-2) \times 1.8 + 0 \times (-0.2) + 2 \times (-1.2) + 4 \times (-3.2) = -30 < 0, \text{ 故 A 错误;}$$

由变量 x 与 y 的平均值, 得样本点中心为 $(16, 14.2)$, 经验回归直线必过样本中心点 $(16, 14.2)$, 故 B 正确;

将 $(16, 14.2)$ 代入 $\hat{y} = \hat{b}x + 26.2$ 中,

得 $14.2 = \hat{b} \times 16 + 26.2$, 解得 $\hat{b} = -0.75$,

所以 $\hat{b} = -0.75 < 0$, 故 C 正确;

因为 $\hat{b} = -0.75$, 所以经验回归方程为 $\hat{y} = -0.75x + 26.2$, 当 $x = 22$ 时, $\hat{y} = -0.75 \times 22 + 26.2 = 9.7$, 所以若该产品的零售价定为 22 元, 则可预测销售量是 9.7 万件, 故 D 正确. 故选 BCD.]

10. AC [∵ $f(-x) = \frac{\cos(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{\cos x}{x^2 + 1} = f(x)$, 且定义域关于原点对称, ∴ $f(x)$ 是偶函数, 故 A 正确;

由 $f(x) = 0$, 得 $\cos x = 0$, $x = \pm \frac{\pi}{2}$,

∴ $f(x)$ 有 2 个零点, 故 B 错误;

$$\because -1 \leq \cos x \leq 1, 0 < \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1, \therefore -1 \leq -\frac{1}{x^2 + 1} \leq$$

$$\frac{\cos x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1,$$

即 $-1 \leq f(x) \leq 1$, 函数 $f(x)$ 的最大值出现在分子 $\cos x$ 取最大值 1 且分母 $x^2 + 1$ 取最小值 1 时, 即 $x = 0$.

此时 $f(0) = 1$.

当 $x = -\pi$ 时, $\cos x = -1$, $x^2 + 1 = 1$ 不能同时成立, 取不到 -1 , 得 $-1 < f(x) \leq 1$, 故 C 正确, D 错误.

故选 AC.]

11. AD [对于 A 选项, 设 $P(x, y)$, 由动点 P 到 F_1 的距离和它到直线 $l: x = -4$ 的距离的比是常数 $\frac{1}{2}$, 得

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}{|x+4|} = \frac{1}{2}, \text{ 化简得曲线 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1,$$

故 A 正确;

对于 B 选项, 假设存在 $\angle F_1 P F_2 = 90^\circ$,

$$\text{则 } |PO| = \frac{1}{2} |F_1 F_2| = 1,$$

因为 PO 的最小值为 $b = \sqrt{3} > 1$, 与假设矛盾, 所以假设不成立,

即不存在点 P , 使得 $\angle F_1 P F_2 = 90^\circ$, 故 B 错误;

对于 C 选项, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 联立得方程

$$\begin{cases} y = 2x, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$$

消去 y 并化简得, $19x^2 - 12 = 0$, 由根与系数的关系可得,

$$x_1 + x_2 = 0, x_1 \cdot x_2 = -\frac{12}{19}, \text{ 所以 } |AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot$$

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{4\sqrt{285}}{19} \neq \frac{13\sqrt{3}}{6}, \text{ 故 C 错误;}$$

对于 D 选项, 由题知 A, B 关于原点对称,

设 $A(x_1, y_1)$, 则 $B(-x_1, -y_1)$,

设 $P(x_0, y_0) (x_0 \neq \pm x_1)$,

因为点 $A(x_1, y_1), P(x_0, y_0)$ 是曲线 C 上的点,

$$\text{所以 } y_1^2 = 3 - \frac{3}{4}x_1^2, y_0^2 = 3 - \frac{3}{4}x_0^2,$$

$$\text{由 } k_1 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}, k_2 = \frac{y_0 + y_1}{x_0 + x_1},$$

$$\text{得 } k_1 \cdot k_2 = \frac{y_0^2 - y_1^2}{x_0^2 - x_1^2}$$

$$= \frac{3 - \frac{3x_0^2}{4} - \left(3 - \frac{3x_1^2}{4}\right)}{x_0^2 - x_1^2} = \frac{-\frac{3}{4}(x_0^2 - x_1^2)}{x_0^2 - x_1^2}$$

$$= -\frac{3}{4},$$

故 D 正确.

故选 AD.]

$$12. 240 \quad \left[\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^6 \text{ 的展开式的通项 } T_{k+1} = C_6^k (2x)^{6-k} \cdot \right.$$

$$\left. \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = 2^{6-k} C_6^k x^{6-3k}, \right.$$

$$\text{令 } 6-3k=0, \text{ 得 } k=2, \text{ 故常数项为 } T_3 = 2^4 C_6^2 = 240.]$$

$$13. 6 \quad [\text{设等比数列 } \{a_n\} \text{ 的公比为 } q, \text{ 由于 } a_1 a_3 = a_2^2 = 9, \text{ 则}$$

$$a_2 = \pm 3,$$

$$\text{若 } a_2 = -3, \text{ 则 } a_4 = 12 = a_2 q^2 = -3q^2, q^2 = -4 < 0 \text{ 矛盾,}$$

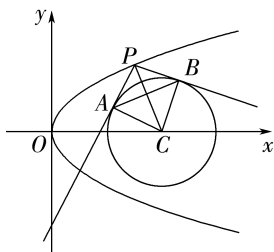
$$\text{则 } a_2 = 3, \text{ 此时 } a_4 = 6, q^2 = \frac{a_4}{a_2} = 2 \text{ 符合.}$$

$$\text{所以 } a_4 = 6.]$$

$$14. \sqrt{6} \quad [\text{设 } P(x_0, y_0), \text{ 则 } y_0^2 = 4x_0, \text{ 圆 } C \text{ 的圆心 } C(4, 0), \text{ 半径}$$

为 r ,

由 PA, PB 切圆 C 于点 A, B , 得 $PC \perp AB, PA \perp AC, PB \perp BC$,



$$\text{则 } |AB| \cdot |PC| = 2S_{\text{四边形}PACB} = 4S_{\triangle PAC} = 2|PA| \cdot |AC|$$

$$= 2r \sqrt{|PC|^2 - r^2}$$

$$= 2r \sqrt{(x_0 - 4)^2 + y_0^2 - r^2}$$

$$= 2r \sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 16 - r^2}$$

$$= 2r \sqrt{(x_0 - 2)^2 + 12 - r^2} \geq 2r \sqrt{12 - r^2},$$

$$\text{当且仅当 } x_0 = 2 \text{ 时, 等号成立,}$$

$$\text{可知 } |AB| \cdot |PC| \text{ 的最小值为 } 2r \cdot \sqrt{12 - r^2} = 12,$$

$$\text{整理可得 } r^4 - 12r^2 + 36 = 0, \text{ 解得 } r^2 = 6,$$

$$\text{又 } r > 0, \text{ 所以 } r = \sqrt{6}.]$$

小题满分练(六)

$$1. C \quad [\text{因为 } A = \{x \mid |x| < 3, x \in \mathbf{Z}\}, B = \{x \mid 3x^2 - 8x - 3 < 0\},$$

$$\text{所以 } A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, B = \left\{x \mid -\frac{1}{3} < x < 3\right\}, \text{ 故 } A \cap$$

$$B = \{0, 1, 2\}.$$

故选 C.]

$$2. A \quad [\because z = \frac{5}{2+i} = \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)} = 2-i,$$

$$\therefore \bar{z} = 2+i, |z - \bar{z}| = |-2i| = 2.$$

故选 A.]

$$3. A \quad [\text{依题意, 可得 } \tan \alpha = 2, \text{ 所以 } \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} =$$

$$\frac{4}{1-4} = -\frac{4}{3}. \text{ 故选 A.}]$$

$$4. D \quad [\because \text{每名教师抽到问题 A 的概率为 } \frac{C_8^2}{C_9^3} = \frac{1}{3},$$

$$\text{由题意可知 } X \sim B\left(6, \frac{1}{3}\right), \therefore E(X) = 6 \times \frac{1}{3} = 2. \text{ 故选 D.}]$$

$$5. B \quad [\text{由题意得 } |b| \cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a|} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 > 0, \therefore b \text{ 在 } a \text{ 上}$$

$$\text{的投影向量为 } |b| \cos \langle a, b \rangle \cdot \frac{a}{|a|} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} a = \frac{4\sqrt{3}}{3} a. \text{ 故选 B.}]$$

$$6. A \quad [\text{由题意, 设 } F_1(0, -\sqrt{2}), F_2(0, \sqrt{2}), P(-1, \sqrt{2}),$$

$$\text{则 } |F_1 F_2| = 2c = 2\sqrt{2},$$

$$|PF_1| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{2})^2} = 3,$$

$$|PF_2| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{2})^2} = 1,$$

$$\text{则 } 2a = |PF_1| + |PF_2| = 4, \text{ 则 } e = \frac{2c}{2a} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以椭圆}$$

$$\text{的离心率为 } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故选 A.]

$$7. B \quad [\text{设该圆锥的底面半径为 } r, \text{ 因为该圆锥的轴截面为直角}$$

$$\text{三角形,}$$

$$\text{所以该圆锥的高为 } r, \text{ 则该圆锥的体积为 } \frac{1}{3} \pi r^3.$$

$$\text{设球 } O \text{ 的半径为 } R, \text{ 则 } R^2 = (|R-r|)^2 + r^2 = (R-r)^2 + r^2,$$

$$\text{解得 } R=r, \text{ 则球 } O \text{ 的体积为 } \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} r^3.$$

$$\text{所以该圆锥与球 } O \text{ 的体积之比为 } \frac{\frac{1}{3} \pi r^3}{\frac{4\pi}{3} r^3} = \frac{1}{4}.]$$

$$8. D \quad [\text{法一: 由题意可知, } 0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1.$$

$$\text{则 } \frac{a}{b} = \frac{\log_3 2}{\log_5 4} = \frac{\lg 2}{\lg 3} \times \frac{\lg 5}{\lg 4} = \frac{\lg 2}{\lg 3} \times \frac{\lg 5}{2 \lg 2} = \frac{\lg 5}{2 \lg 3} = \frac{\lg 5}{\lg 9} < 1, \text{ 所}$$

$$\text{以 } a < b.$$

$$\text{则 } \frac{b}{c} = \frac{\log_5 4}{\log_9 8} = \frac{\lg 4}{\lg 5} \times \frac{\lg 9}{\lg 8} = \frac{2 \lg 2}{\lg 5} \times \frac{\lg 9}{3 \lg 2} = \frac{2 \lg 9}{3 \lg 5} = \frac{\lg 81}{\lg 125} <$$

$$1, \text{ 所以 } b < c. \text{ 所以 } a < b < c.$$

故选 D.

$$\text{法二: } a = \frac{1}{\log_2 3}, b = \frac{1}{\log_4 5} = \frac{1}{\log_2 \sqrt{5}}, c = \frac{1}{\log_8 9} = \frac{1}{\log_2 \sqrt[3]{9}}, \text{ 易知}$$

$$a < b < c.]$$

$$9. BCD \quad [A \text{ 选项, } 10 \times (3a + 5a + 8a + 3a + a) = 1,$$

$$\text{解得 } a = 0.005, \text{ 故 A 错误;}$$

$$B \text{ 选项, 由频率分布直方图可知, 估计该年级学生物理成绩的均值为}$$

$$0.005 \times 10 \times (3 \times 55 + 5 \times 65 + 8 \times 75 + 3 \times 85 + 1 \times 95) = 72,$$

故 B 正确;

C 选项, $\therefore$ 成绩在 $[50, 70)$ 的频率为 $10 \times (3+5) \times 0.005 = 0.4 < 0.5$,
成绩在 $[50, 80)$ 的频率为 $10 \times (3+5+8) \times 0.005 = 0.8 > 0.5$,

$\therefore$ 估计该年级学生物理成绩的中位数为 $70 + \frac{0.5-0.4}{8 \times 0.005 \times 10} \times 10 = 72.5$, 故 C 正确;

D 选项, 估计该年级物理成绩在 80 分及以上的学生人数为 $0.005 \times 10 \times (3+1) \times 1200 = 240$, 故 D 正确. 故选 BCD.]

10. AB [对于 A, 因为函数 $f(x) = \sin x \cos 2x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 又 $f(-x) = \sin(-x) \cos(-2x) = -\sin x \cos 2x = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为奇函数.

又因为 $f(2\pi + x) = \sin(2\pi + x) \cos(4\pi + 2x) = \sin x \cos 2x = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为周期函数, 故选项 A 正确;

对于 B, 若函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 则 $f(\pi - x) = f(x)$ 成立,

因为 $f(\pi - x) = \sin(\pi - x) \cos(2\pi - 2x) = \sin x \cos 2x = f(x)$, 所以 $f(\pi - x) = f(x)$, 故选项 B 正确;

对于 C, 因为函数 $f(x) = \sin x \cos 2x = \sin x - 2\sin^3 x$, 令 $\sin x = t (-1 \leq t \leq 1)$, 则函数可化为 $y = g(t) = t - 2t^3$, $g'(t) = 1 - 6t^2$, 令 $g'(t) > 0$, 解得 $-\frac{\sqrt{6}}{6} < t < \frac{\sqrt{6}}{6}$,

所以 $y = g(t)$ 在 $\left[-1, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, 1\right]$ 上单调递减, 在 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 内单调递增, 又因为 $g(-1) = 1$, $g\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{6} - 2 \times \frac{\sqrt{6}}{36} = \frac{\sqrt{6}}{9} < 1$, 所以函数 $f(x)$ 的最大值为 1, 故选项 C 错误;

对于 D, 因为 $f'(x) = \cos x \cos 2x - 2\sin x \sin 2x$, 若函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增, 则 $f'(x) \geq 0$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内恒成立, 取 $x = \frac{\pi}{4}$, 则 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 = -\sqrt{2} < 0$, 故选项 D 错误.

故选 AB.]

11. AC [对于 A, 根据题意, $a = 2, b =$

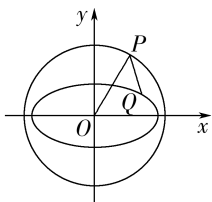
1, 则 $c = \sqrt{3}$, 故 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 A

正确; 对于 B, C, 设 $Q(x, y)$, $-2 \leq x \leq 2$, 则 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 而圆 $O: x^2 +$

$y^2 = 5$ 的圆心 $O(0, 0)$, 半径 $r = \sqrt{5}$, 则 $|OQ| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 1 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1}$, 因为 $-2 \leq x \leq 2$, 所以 $0 \leq x^2 \leq$

4, 则 $1 \leq \frac{3}{4}x^2 + 1 \leq 4$, 所以 $1 \leq \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1} \leq 2$, 即 $1 \leq |OQ| \leq 2$, 所以 $|PQ|$ 的最小值为 $r - 2 = \sqrt{5} - 2$, 最大值为

$r + 2 = \sqrt{5} + 2$, 故 B 错误, C 正确; 对于 D, 设 $P(x_0, y_0)$, $x_0^2 + y_0^2 = 5$, 过点 P 的直线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$, 联立 $\begin{cases} y - y_0 = k(x - x_0), \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8k$



$(y_0 - kx_0)x + 4(y_0 - kx_0)^2 - 4 = 0$, 根据直线与椭圆相切, 则 $\Delta = [8k(y_0 - kx_0)]^2 - 4(1 + 4k^2)[4(y_0 - kx_0)^2 - 4] = 0$, 化简可得, $(x_0^2 - 4)k^2 - (2x_0y_0)k + y_0^2 - 1 = 0$, 可知

k_1, k_2 是方程的两个根, 所以 $k_1k_2 = \frac{y_0^2 - 1}{x_0^2 - 4} = \frac{4 - x_0^2}{x_0^2 - 4} = -1$,

所以 $k_1^2 + k_2^2 \geq 2|k_1k_2| = 2$, 当且仅当 $|k_1| = |k_2|$ 时取等号, 故 D 错误. 故选 AC.]

12. 0 [$\because f(2) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$, $\therefore f(f(2)) = f(-1) = 0$.]

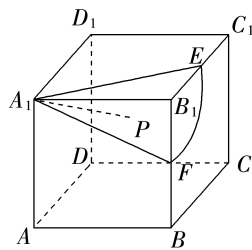
13. $\frac{\pi}{2}$ [如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $DC \parallel A_1B_1$, 直

线 A_1P 与 DC 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$,

即直线 A_1P 与直线 A_1B_1 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$, 故动点 P 所围成

的图形是高为 $\sqrt{3}$, 底面半径为 1, 母线长为 2 的圆锥侧面的四分之一. 即动点 P 所围成的图

形的面积为 $\frac{1}{4} \times \pi \times 1 \times 2 = \frac{\pi}{2}$.]



14. $\frac{5}{21}$ [和为 5 有 2 种组合, 和为 6 有 2 种组合, 和为 7 有 3 种组合, 和为 8 有 3 种组合, 和为 9 有 4 种组合, 和为 10 有 4 种组合, 和为 11 有 5 种组合, 和为 12 有 4 种组合, 和为 13 有 4 种组合, 和为 14 有 3 种组合, 和为 15 有 3 种组合, 和为 16 有 2 种组合, 和为 17 有 2 种组合, 所以 $P = \frac{4 \times (C_2^2 + C_3^2 + C_4^2) + C_5^2}{C_{10}^4} = \frac{5}{21}$.]

小题满分练(七)

1. D [对于 A, 数据全部为 6, 相等, 没有波动, 所以方差为 0.

对于 B, 平均数为 $\frac{5+5+6+7+7}{5} = 6$, 方差 $s^2 = \frac{2 \times (5-6)^2 + (6-6)^2 + 2 \times (7-6)^2}{5} = 0.8$.

对于 C, 平均数为 $\frac{4+5+6+7+8}{5} = 6$,

方差 $s^2 = \frac{(4-6)^2 + (5-6)^2 + (6-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2}{5} = 2$.

对于 D, 平均数为 $\frac{4+4+6+8+8}{5} = 6$, 方差 $s^2 = \frac{2 \times (4-6)^2 + (6-6)^2 + 2 \times (8-6)^2}{5} = 3.2$.

通过比较可知, 选项 D 的方差最大. 故选 D.]

2. D [由 $4x^2 - y^2 = 4$, 得 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$,

所以 $a^2 = 1, b^2 = 4$, 得 $c^2 = a^2 + b^2 = 5$,

所以双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$.

故选 D.]

3. B [在四边形 ABCD 中, 若 $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$, 则四边形 ABCD 为平行四边形,

若 $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$, 则平行四边形 $ABCD$ 为菱形, 但不一定为正方形,

当四边形 $ABCD$ 是正方形时, 必有 $AC \perp BD$, 即有 $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$,

故“ $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ ”是“四边形 $ABCD$ 是正方形”的必要不充分条件.

故选 B.]

4. A [因为 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$,

$$\text{所以 } \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5},$$

$$\text{因此 } \sin \alpha = \sin[(\alpha + \frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4}]$$

$$= \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \cos \frac{\pi}{4} - \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

故选 A.]

5. A [由题意有 $T_{k+1} = C_4^k (1-2x)^{4-k} \cdot (-y)^k$

$$= C_4^k (-1)^k (1-2x)^{4-k} y^k,$$

当 $k=1$ 时, 有 $(1-2x)^3 y$, $(1-2x)^3$ 中 x^2 的系数为

$$C_3^2 (-2x)^2 = 12x^2,$$

所以 $x^2 y$ 的系数为 $C_4^1 (-1)^1 \times 12 = -48$.

故选 A.]

6. A [由 $(1+i)z=i$, 得 $z = \frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i-i^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$,

$$\text{则 } |z| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.]$$

7. D [取 BC 的中点 Q , 连接 B_1Q, DQ .

因为正方形 BB_1C_1C 中,

$$CQ = B_1P = \frac{1}{2}, CQ \parallel B_1P,$$

所以四边形 B_1PCQ 是平行四边形, 可得 $CP \parallel B_1Q$,

所以 $\angle DB_1Q$ (或其补角) 就是异面直线 CP 与 B_1D 所成的角,

$$\text{Rt}\triangle PC_1C \text{ 中, } CP = \sqrt{PC_1^2 + CC_1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{同理可得 } DQ = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

在 $\triangle B_1DQ$ 中, $B_1D = \sqrt{3}$, 由余弦定理的推论得

$$\cos \angle DB_1Q = \frac{3 + \frac{5}{4} - \frac{5}{4}}{2 \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

所以异面直线 CP 与 B_1D 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$. 故选 D.]

8. C [由题意可知, 数列 $\{a_n\}$: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, ...,

数列 $\{b_n\}$: 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, ...,

将集合 A 中的元素由小到大进行排序, 构成数列 $\{c_n\}$: 5, 17, 29, ...,

易知数列 $\{c_n\}$ 是首项为 5, 公差为 12 的等差数列, 则 $c_n = 5 + 12(n-1) = 12n - 7$,

$$\text{由 } c_n = 12n - 7 \leq 2026, \text{ 可得 } n \leq \frac{2033}{12} = 169 \frac{5}{12},$$

因此, 集合 $A \cap \{n | n \leq 2026, n \in \mathbf{N}^*\}$ 中元素的个数为 169. 故选 C.]

9. AB [$f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{4})\cos(x + \frac{\pi}{4})$

$$= \sin 2(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$$

$$= \cos 2x, \therefore f(x)_{\max} = 1, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{最小正周期 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi, \text{ 故 B 正确;}$$

$$\text{当 } x \in (0, \frac{\pi}{2}) \text{ 时, } t = 2x \in (0, \pi),$$

$$\therefore y = \cos t \text{ 在 } (0, \pi) \text{ 内单调递减,}$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } (0, \frac{\pi}{2}) \text{ 内单调递减, 故 C 错误;}$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0, x = \frac{\pi}{4} \text{ 不是函数 } f(x) \text{ 的图象的对称轴,}$$

故 D 错误. 故选 AB.]

10. ABD [由题设 $a_{n+1} - a_n = d$ 为定值, 则 $\frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}} = 2^{a_{n+1} - a_n} =$

$$2^d > 0 \text{ 且为定值, A 正确;}$$

$$\text{若 } \{b_n\} \text{ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 则 } T_n = \frac{1-2^n}{1-2} =$$

$$2^n - 1, \text{ B 正确;}$$

对于数列 $\{\frac{S_n}{n-1}\}$, $n=1$ 时无意义, 故不可能为等差数列, C 错误;

若 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 则 $\{b_n^2\}$ 是首项为 b_1^2 , 公比为 q^2 的等比数列, D 正确. 故选 ABD.]

11. AC [$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$, $\forall a \in \mathbf{R}$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 1$,

$$\text{当 } x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \text{ 时, } f'(x) > 0, f(x) \text{ 单调递增; 当 } x \in$$

$$(1, +\infty) \text{ 时, } f'(x) > 0, f(x) \text{ 单调递增; 当 } x \in$$

$$(-\frac{1}{3}, 1) \text{ 时, } f'(x) < 0, f(x) \text{ 单调递减,}$$

$$\forall a \in \mathbf{R}, f(x) \text{ 都有两个极值点 } -\frac{1}{3}, 1, \text{ 故 A 选项正确;}$$

因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 所以函数 $f(x)$ 至少有一个零点,

$$f(x) \text{ 的极大值 } f(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + a = \frac{5}{27} + a (a$$

$$\in \mathbf{R}), f(x) \text{ 的极小值 } f(1) = 1 - 1 - 1 + a = -1 + a (a \in \mathbf{R}),$$

$$\text{当 } a + \frac{5}{27} < 0, \text{ 即 } a < -\frac{5}{27} \text{ 时, } a - 1 < 0,$$

所以函数 $f(x)$ 与 x 轴仅有一个交点,

不满足 $\forall a \in \mathbf{R}, f(x)$ 都有三个零点, 故选项 B 错误;

函数 $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ 是开口向上的二次函数, 且为轴对称, 此时对称轴的横坐标即为函数 $f(x)$ 对称中心的横坐标,

$$\text{令 } t(x) = f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, t'(x) = 6x - 2 = 0, x = \frac{1}{3},$$

$$\forall a \in \mathbf{R}, (\frac{1}{3}, a - \frac{11}{27}) \text{ 是曲线 } C \text{ 的对称中心, 故选项 C}$$

正确;

由三次函数图象的性质知 $\forall a \in \mathbf{R}$, 曲线 C 没有对称轴, 选项 D 错误. 故选 AC.]

12. $\frac{32}{3}$ [由已知, 将三棱锥放在长方体中, 如图所示.

所以三棱锥 $A-BCD$ 的外接球即为长方体的外接球,

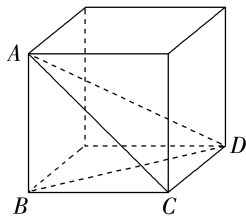
设三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的半径为 R ,

因为三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的表面积为 48π , 所以 $4\pi R^2 = 48\pi$, 解得 $R = 2\sqrt{3}$,

因为 $BC = CD = 4$,

所以 $2\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 4^2 + AB^2}$, 解得 $AB = 4$,

所以该鳖臑的体积为 $V_{A-BCD} = \frac{1}{3}S_{\triangle BCD} \cdot AB = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 4 = \frac{32}{3}$.]



13. $\frac{1}{5}$ [6 个人拿 6 把钥匙共有 A_6^6 种不同的拿法, 记甲、乙恰好对门为事件 A , 则事件 A 包括甲、乙拿了 301 与 302, 其余 4 人随意拿, 共 $2A_4^4$ 种;

甲、乙拿了 303 与 304, 其余 4 人随意拿, 共 $2A_4^4$ 种;

甲、乙拿了 305 与 306, 其余 4 人随意拿, 共 $2A_4^4$ 种,

所以甲、乙两人恰好对门的拿法共有 $6A_4^4$ 种.

则甲、乙两人恰好对门的概率 $P(A) = \frac{6A_4^4}{A_6^6} = \frac{1}{5}$.]

14. $2\sqrt{3}$ [如图, 因为抛物线 C 的焦点

$F(1, 0)$, 所以 $\frac{p}{2} = 1$, 解得 $p = 2$,

则抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$, 准线方程为 $x = -1$, $T(-1, 0)$,

易知直线 l 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y = k(x + 1)$, $A(x_1, y_1)$,

$B(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = k(x + 1), \end{cases}$ 整理得 $k^2x^2 + (2k^2 - 4)x + k^2 = 0$,

$\Delta > 0$,

由根与系数的关系得 $x_1 + x_2 = -\frac{2k^2 - 4}{k^2}$, $x_1x_2 = 1$,

又 $|FA| = x_1 + 1$, $|FB| = x_2 + 1$,

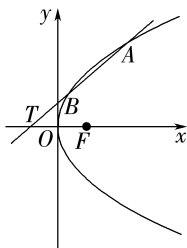
且 $|FA| = 3|FB|$,

所以 $x_1 + 1 = 3(x_2 + 1)$, 即 $x_1 = 3x_2 + 2$, 代入 $x_1x_2 = 1$,

整理得 $3x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0$, 解得 $x_2 = \frac{1}{3}$ 或 $x_2 = -1$ (舍),

所以 $x_1 = 3$, $y_1^2 = 4x = 12$, 所以 $|y_1| = 2\sqrt{3}$,

$S_{\triangle TFA} = \frac{1}{2}|TF||y_1| = 2\sqrt{3}$.]



小题满分练(八)

1. B [由 $\lg x < 1$ 得, $\lg x < \lg 10$, 所以 $0 < x < 10$, 所以 $A = \{x | 0 < x < 10\}$,

对于集合 B , 因为 $k \in \mathbf{Z}$, 所以当 $k = 0$ 时, $x = 1$;

当 $k = 1$ 时, $x = 5$; 当 $k = 2$ 时, $x = 9$,

所以 $A \cap B = \{1, 5, 9\}$. 故选 B.]

2. A [由 $z = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$, 则 $\bar{z} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$,

所以 $z \cdot \bar{z} = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right)\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right) = \frac{1}{5}$.

故选 A.]

3. B [由抛物线方程可知, 抛物线焦点在 y 轴正半轴, 且 $2p = 8$, 所以所求准线方程为 $y = -\frac{p}{2} = -2$.]

4. C [三种颜色的涂法有两种, 即 A 与 D 同色或 B 与 C 同色, 所以恰好使用 3 种颜色的涂法有 $C_4^3 \cdot (A_3^3 + A_3^3) = 48$ 种. 故选 C.]

5. A [已知等比数列 $\{a_n\}$, 则 $a_1a_8 = a_4a_5 = 2a_4$,

因为 $a_4 \neq 0$, 所以 $a_5 = 2$, 则 $a_3a_7 = a_5^2 = 4$,

又 $a_3 + a_7 = \frac{17}{2}$, 所以 $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_7 = 8$ 或 $a_7 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 8$,

因为等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 则 $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_7 = 8$, 且公比 $q > 0$,

所以 $\frac{a_7}{a_3} = q^4 = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$, 则 $q = 2$,

故 $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{1}{8}$.

故选 A.]

6. B [因为 $f(x) = e^x - a \ln(ax - a) + a > 0$ ($a > 0$) 恒成立, 所

以 $\frac{e^x}{a} > \ln(x-1) + \ln a - 1$, 所以 $e^{x-\ln a} + x - \ln a > \ln(x-1) + x - 1$, 即 $e^{x-\ln a} + x - \ln a > e^{\ln(x-1)} + \ln(x-1)$.

令 $g(x) = e^x + x$, 易得 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $x - \ln a > \ln(x-1)$, 则有 $-\ln a > \ln(x-1) - x$. 因为 $\ln(x-1) - x \leq x - 2 - x = -2$, 所以 $-\ln a > -2$, 解得 $0 < a < e^2$. 所以实数 a 的取值范围为 $(0, e^2)$.]

7. C $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式的通项公式 $T_{k+1} = C_6^k x^{6-k} x^{-\frac{k}{2}} =$

$C_6^k x^{6-\frac{3k}{2}}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, 取 $k = 3$, 可得 $T_4 = C_6^3 x^{\frac{3}{2}}$,

令 $6 - \frac{3k}{2} = 2$, 则 $k = \frac{8}{3} \notin \mathbf{N}$, 即 $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 中不含平方项,

所以 $(\sqrt{x} - 2)\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中 x^2 的系数为 $C_6^3 = 20$.

故选 C.]

8. B [函数 $f(x) = x^3 - 6x + 7$, 对其求导得 $f'(x) = 3x^2 - 6$.

设切点为 $(a, f(a))$, 则切线斜率为 $f'(a) = 3a^2 - 6$.

又 $f(a) = a^3 - 6a + 7$,

所以切线方程为 $y - (a^3 - 6a + 7) = (3a^2 - 6)(x - a)$,

化简得 $y = (3a^2 - 6)x - 2a^3 + 7$.

将切线 l 方程和曲线 $y = f(x)$ 方程联立得

$x^3 - 6x + 7 = (3a^2 - 6)x - 2a^3 + 7$,

整理得 $x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$,

因式分解得 $(x - a)^2(x + 2a) = 0$,

解得 $x = a$ 或 $x = -2a$,

因为切线 l 与曲线 $y = f(x)$ 有且只有一个公共点,

所以 $a = -2a$, 解得 $a = 0$,

此时切线方程为 $y = -6x + 7$, 对应唯一一条满足条件的直线.

故选 B.]

9. **ABC** [对于 A, 由周期公式可得最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 正确;

对于 B, 由 $x \in (0, \frac{\pi}{6})$, 则 $2x - \frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$, 由正弦函数的

的单调性可知 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{6})$ 内单调递增, 正确;

对于 C, 当 $x = \frac{7\pi}{12}$ 时, $f(\frac{7\pi}{12}) = \sin(2 \times \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{6}) = 0$, 正确;

对于 D, $f(x)$ 图象上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后, 得

到 $g(x) = \sin[2(x + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{6}] = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象, 显

然图象关于 y 轴不对称, 错误. 故选 ABC.]

10. **BD** [对于 A, 依题意, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = -4$,
 $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = 2\sqrt{2}$,

则 $\cos \angle AOB = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}|} = -\frac{1}{2}$, 而 $0 \leq \angle AOB \leq \pi$, 解

得 $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$, A 错误;

对于 B, $|AB| = 2|\vec{OA}| \cos \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{6}$, 圆心 O 到直线 AB 的
 距离为 $|\vec{OA}| \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{2}$,

因此点 P 到直线 AB 距离的最大值为 $3\sqrt{2}$, $\triangle PAB$ 面积的
 最大值为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{3}$, B 正确;

对于 C, 由 $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, 得 $x_1 - x_2 = -(y_1 - y_2)$, 直线
 l 的斜率 $k = -1$,

设直线 l 的方程为 $y = -x + m$, 则圆心 O 到直线 l 的距离
 为 $\frac{|m|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 解得 $m = \pm 2$, 由 $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 > 0$,

因此 $m = 2$, 直线 l 的方程为 $y = -x + 2$, C 错误;

对于 D, 由圆 O 半径为 $2\sqrt{2}$, 圆心 O 到直线 AB 的距离
 为 $\sqrt{2}$,

得圆 O 上到直线 AB 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点有且仅有 3 个, 因此
 符合条件的点 P 有且仅有 3 个, D 正确. 故选 BD.]

11. **ACD** [对于 A, $k = 8$ 时, 甲的位置确定后, 乙需在剩余 7 个
 位置中选择同一组的 1 个位置, 概率为 $\frac{1}{7}$, 故 A 正确;

对于 B, 当 $k = 16$ 时, 甲、乙在第 2 轮相遇, 则甲、乙需在第一
 轮不相遇且在第一轮均晋级, 概率为 $\frac{14}{15} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{30}$, 又在第 2

轮同一组的概率为 $\frac{1}{7}$, 故所求概率为 $\frac{7}{30} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{30}$, 故 B

错误;

对于 C, 当 $k = 2^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$ 且 $n \geq 4$) 时, 甲、乙两人在第 m 轮
 比赛中相遇的概率为 $\frac{1}{2^{m-1}(k-1)}$,

所以甲、乙两人在第 4 轮比赛中相遇的概率为 $\frac{1}{2^{4-1}(k-1)} =$

$\frac{1}{8(2^n-1)}$, 故 C 正确;

对于 D, 当 $k = 2^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 时, 甲、乙两人在比赛中相遇的概
 率为

$$\frac{1}{2^n-1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2^n-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ 故 D 正确. 故}$$

选 ACD.]

12. 88 [10 个数据从小到大排列为 80, 87, 88, 89, 91, 92, 93,
 95, 95, 96,

则 $10 \times 25\% = 2.5$, 故这组数据的下四分位数为 88.]

$$13. \frac{1}{9} \quad \left[\text{由 } \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta} = 3, \right.$$

则 $\sin \alpha \cos \beta = 3 \cos \alpha \sin \beta$,

由 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, 得 $\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}$,

则 $2 \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}$,

即 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}$, $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}$,

所以 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$,

则 $\cos(2\alpha + 2\beta) = 1 - 2\sin^2(\alpha + \beta) = 1 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.]

14. $\sqrt{5}$ [“飘带”函数 $y = \frac{3x}{4} - \frac{1}{x}$ 的渐近线为 $y = \frac{3}{4}x$ 与 y 轴,

设两渐近线夹角为 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$),

则 $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{3}{4}$, 解得 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$,

$$\text{又 } \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}, \text{ 整理得 } 2 \tan^2 \frac{\alpha}{2} + 3 \tan \frac{\alpha}{2} - 2 = 0,$$

由 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 解得 $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$,

所以旋转之前双曲线 C_1 的一条渐近线的斜率为

$$k = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = 2,$$

所以双曲线 C_1 的离心率 $e =$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

小题满分练(九)

1. **B** [由题意可得, $z = (1+i)(2+i) = 2+i+2i+i^2 = 1+3i$,
 所以复数 z 的虚部为 3. 故选 B.]

2. **C** [因为 $A = \{x | x^2 = x\} = \{0, 1\}$, 全集 $U = \{-1, 0, 1, 2\}$,
 故 $\complement_U A = \{-1, 2\}$. 故选 C.]

3. **B** [由题知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 中, $2a = 4$,
 $2b = 6$,

所以 $a = 2, b = 3$, 双曲线焦点在 x 轴上,

所以双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{3}{2}x$. 故选 B.]

4. **C** [由题图知 $\frac{\pi}{2\omega} = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$, 解得 $\omega = 2$, 又由题图知

$$\begin{cases} f(0) = A \tan \varphi = 1, \\ f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = A \tan\left(2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi\right) = 0, \end{cases}$$

由 $A \tan\left(\frac{5\pi}{6} + \varphi\right) = 0$, 得 $\varphi = -\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $k=1, \varphi = \frac{\pi}{6}$,

由 $A \tan \frac{\pi}{6} = 1$, 得 $A = \sqrt{3}$,

所以 $f(x) = \sqrt{3} \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

所以 $f\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \sqrt{3} \tan\left(2 \times \frac{13\pi}{12} + \frac{\pi}{6}\right)$
 $= \sqrt{3} \tan \frac{7\pi}{3} = 3$.

故选 C.]

5. A [根据题意, 设 $F(x) = f(x) - 1$,

由于函数 $y = f(x) - 1$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 则 $F(x) + F(-x) = 0$, 即 $f(x) - 1 + f(-x) - 1 = 0$,

所以 $f(x) + f(-x) = 2$, 则有 $f(2) + f(-2) = 2$.

又由 $F(0) = f(0) - 1 = 0$, 所以 $f(0) = 1$,

故 $f(-2) + f(0) + f(2) = 2 + 1 = 3$. 故选 A.]

6. C [由题意, 向量 $\overrightarrow{OM} = (1, 1), \overrightarrow{ON} = (-3, -2)$ 分别表示两个力 F_1, F_2 ,

可得 $F_1 + F_2 = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = (1, 1) + (-3, -2) = (-2, -1)$,

所以 $|F_1 + F_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

故选 C.]

7. B [因为直线 $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的倾斜角为 30° , 所以圆心在两切

线所成角的角平分线 $y = \sqrt{3}x$ 上,

设圆心 $C(a, \sqrt{3}a)$, 则圆 C 的方程为 $(x-a)^2 + (y-\sqrt{3}a)^2 = a^2$, 将点 $P(2, \sqrt{3})$ 代入圆的方程, 得 $(2-a)^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{3}a)^2 = a^2$,

整理得 $3a^2 - 10a + 7 = 0$, 解得 $a = 1$ 或 $a = \frac{7}{3}$,

所以圆 C 的直径为 2 或 $\frac{14}{3}$.

故选 B.]

8. D [$\because a = \log_3 2 = \frac{\lg 2}{\lg 3}, b = \log_{15} 10 = \frac{\lg 10}{\lg 15} = \frac{\lg 2 + \lg 5}{\lg 3 + \lg 5}$,

$\therefore b - a = \frac{\lg 2 + \lg 5}{\lg 3 + \lg 5} - \frac{\lg 2}{\lg 3}$

$= \frac{\lg 5(\lg 3 - \lg 2)}{(\lg 3 + \lg 5)\lg 3} > 0, \therefore b > a$,

$\because a = \log_3 2 > \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}, c = \sin \frac{1}{2} < \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \therefore a > c$,

$\therefore b > a > c$. 故选 D.]

9. AC [对于 A, 根据线面垂直的定义, 可得经过平面外一点作已知平面的垂线, 有且只有一条, 故 A 正确;

对于 B, 过平面外一点可以作一个平面与已知平面平行, 在这个平行平面内的经过已知点作直线, 它就和已知平面平行, 故过平面外一点有无数条直线与这个平面平行, 故 B 错误;

对于 C, 由直线与平面垂直的性质, 得

过直线外一点只能作一个平面与这条直线垂直, 故 C 正确;

对于 D, 由线面平行判定定理, 得

过直线外一点, 有无数个平面与这条直线平行, 故 D 错误. 故选 AC.]

10. ABD [因为 $a = \sqrt{13}, b = 3, A = \frac{\pi}{3}$,

所以由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 9 + c^2 - 2 \times 3c \cos \frac{\pi}{3} = 13$, 即 $c^2 - 3c - 4 = 0$, 解得 $c = 4$ 或 $c = -1$ (舍去),

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $7 + \sqrt{13}$, 故 A 正确, B 正确;

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $\frac{\sqrt{13}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{4}{\sin C}$, 解得 $\sin C =$

$\frac{2\sqrt{39}}{13}$, 故 C 错误;

设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R , 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} =$

$\frac{\sqrt{13}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2R$,

所以 $R = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{39}}{3}$, $\triangle ABC$ 外接圆的面积为 $\pi R^2 = \frac{13\pi}{3}$,

故 D 正确. 故选 ABD.]

11. AD [易知 $F(2, 0), C(-2, 0)$, 设直线 l 的方程为 $x = ky - 2, A(x_1, y_1)(x_1 > 0, y_1 > 0), B(x_2, y_2)(x_2 > 0, y_2 > 0)$,

联立 $\begin{cases} x = ky - 2, \\ y^2 = 8x, \end{cases}$ 消去 x 并整理得 $y^2 - 8ky + 16 = 0$,

此时 $\Delta = 64(k^2 - 1) > 0$, 所以 $k^2 > 1$, 此时 $k > 1$, 所以直线 l 的斜率为 $\frac{1}{k}$,

此时 $0 < \frac{1}{k} < 1$,

由根与系数的关系得 $y_1 + y_2 = 8k, y_1 y_2 = 16$,

所以 $x_1 + x_2 = k(y_1 + y_2) - 4 = 8k^2 - 4, x_1 x_2 = k^2 y_1 y_2 - 2k(y_1 + y_2) + 4 = 4$,

当 $BF \perp x$ 轴时, 此时 $B(2, 4)$, 所以直线 BC 的斜率为 $\frac{4}{2+2} = 1$, 要使直线 l 与抛物线有两个交点,

此时 $x_2 < 2$, 则 $|BF| = x_2 + 2 < 4$, 故选项 A 正确;

对于选项 B, 若 BF 为 $\triangle ACF$ 的中线,

此时 $y_2 = \frac{y_1}{2}$, 因为 $y_1 y_2 = 16$, 解得 $y_1 = 4\sqrt{2}$,

所以 $x_1 = 4$, 即 $A(4, 4\sqrt{2})$, 则 $B(1, 2\sqrt{2})$,

所以 $|AF| = 6, |BF| = 3$, 故选项 B 错误;

对于选项 C, 若 $|AC| = \sqrt{2}|AF|$, 过 A 作准线的垂线, 垂足为 D ,

此时 $|AC| = \sqrt{2}|AD|$, 则 $\triangle ACD$ 为等腰直角三角形,

此时 $|CD| = |AD|$, 即 $A(y_1 - 2, y_1)$,

因为点 A 在抛物线上, 所以

$y_1^2 - 8y_1 + 16 = 0$, 解得 $y_1 = 4$,

所以 $y_2 = 4$,

则 A, B 两点重合, 不符合条件, 故选项 C 错误;

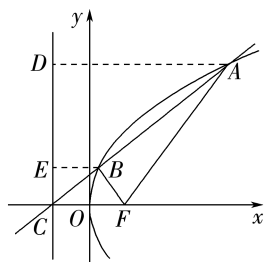
对于选项 D, 过 B 作准线的垂线,

垂足为 E , 则 $|AF| + |BF| = |AD| + |BE| = x_1 + x_2 + 4$

$= 8k^2$,

因为 $2|CF| = 8$, 又 $k^2 > 1$, 所以 $8k^2 > 8$,

即 $|AF| + |BF| > 2|CF|$ 恒成立, 故选项 D 正确. 故选 AD.]



12. -96 [根据题意, 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 若 $a_1 + a_2 = -6$, 则有 $a_3 + a_4 = q^2(a_1 + a_2) = -24$, 变形可得 $q^2 = 4$, 则 $a_5 + a_6 = q^4(a_1 + a_2) = -96$.]

13. 7 [若 n 为一组从小到大排列的数 1, 2, 3, 5, 7, 8, 11 的上四分位数,

因为 $7 \times 75\% = \frac{21}{4} = 5.25$,

所以 1, 2, 3, 5, 7, 8, 11 的上四分位数是 8, 即 $n = 8$,

则 $T_{k+1} = C_8^k (\sqrt[3]{x})^{8-k} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^k = C_8^k \left(\frac{1}{2}\right)^k x^{\frac{8-k}{3}-k}$,

由 $\frac{8-k}{3} - k = 0$, 解得 $k = 2$,

所以常数项为 $T_3 = C_8^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 7$.]

14. $(\ln 2, +\infty)$ [由 $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, 得 $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, 设切

点为 $(x_0, \frac{1}{x_0} + \ln x_0)$, 则切线方程为 $y - \left(\frac{1}{x_0} + \ln x_0\right) =$

$\frac{x_0-1}{x_0^2}(x-x_0)$. 因为过点 $(0, m)$ 有两条直线与曲线 $y =$

$f(x)$ 相切, 所以 $m - \left(\frac{1}{x_0} + \ln x_0\right) = \frac{x_0-1}{x_0^2}(0-x_0)$ 有两根,

则 $m = \frac{2}{x_0} - 1 + \ln x_0$ 有两根. 令 $g(x) = \frac{2}{x} - 1 + \ln x (x >$

$0)$, 则 $g'(x) = \frac{x-2}{x^2}$, 令 $g'(x) > 0$, 即 $\frac{x-2}{x^2} > 0$, 解得 $x > 2$;

令 $g'(x) < 0$, 即 $\frac{x-2}{x^2} < 0$, 解得 $0 < x < 2$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 2)$

内单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增. 当 $x = 2$ 时, $g(x)$ 取得

极小值也为 $g(x)$ 的最小值, 所以 $g(x)_{\min} = g(2) = \frac{2}{2} - 1 +$

$\ln 2 = \ln 2$, 又 $x \rightarrow 0, g(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow +\infty$, 故实数 m 的取值范围是 $(\ln 2, +\infty)$.]

小题满分练(十)

1. B [因为 $x^3 < 27$, 所以 $x < 3$,

所以 $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 3\} = \{0, 1, 2\}$,

所以 A 的子集有 $2^3 = 8$ 个.

故选 B.]

2. D [因为 $-1 + \sqrt{2}i$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2 + mx + n = 0$ 的一个复数根, 根据复数根的共轭性,

所以 $-1 - \sqrt{2}i$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2 + mx + n = 0$ 的另一个复数根,

由根与系数的关系得

$$\begin{cases} (-1 + \sqrt{2}i) + (-1 - \sqrt{2}i) = -m, \\ (-1 + \sqrt{2}i)(-1 - \sqrt{2}i) = n, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} m = 2, \\ n = 3, \end{cases}$ 所以 $m + n = 5$.

故选 D.]

3. B [因为 $\tan \alpha, \tan \beta$ 是方程 $6x^2 - 5x + 1 = 0$ 的两根,

$$\text{由根与系数的关系知} \begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = \frac{5}{6}, \\ \tan \alpha \tan \beta = \frac{1}{6}, \end{cases}$$

$$\text{又 } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta},$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1.$$

$$\begin{aligned} & \therefore 3\sin^2(\alpha + \beta) - \cos^2(\alpha + \beta) \\ &= \frac{3\sin^2(\alpha + \beta) - \cos^2(\alpha + \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{3\tan^2(\alpha + \beta) - 1}{\tan^2(\alpha + \beta) + 1} = \frac{3-1}{1+1} = 1. \end{aligned}$$

故选 B.]

4. A [因为向量 b 在向量 a 上的投影向量为 $-2a, |a| = 3$,

$$\text{则 } |b| \cos \langle a, b \rangle \cdot \frac{a}{|a|} = |b| \cos \langle a, b \rangle \cdot \frac{a}{3} = -2a,$$

$$\therefore |b| \cos \langle a, b \rangle = -6,$$

$$\text{故 } a \cdot (a+b) = a^2 + a \cdot b = |a|^2 + |a| \cdot |b| \cos \langle a, b \rangle = 9 + 3 \times (-6) = -9.$$

故选 A.]

5. C [$\because f(x) = \log_a(2-ax)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 底数 a 始终大于 0 且不等于 1,

函数 $u(x) = 2-ax$ 单调递减,

$$\therefore \begin{cases} a > 1, \\ 2-a > 0, \end{cases} \text{ 解得 } 1 < a < 2.$$

故选 C.]

6. D [$\because$ 正四棱柱

$ABCD-A_1B_1C_1D_1$,

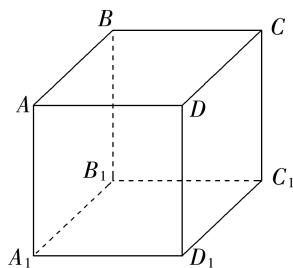
$\therefore A_1A \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore A_1A$ 为点 A_1 到直线 AC 的距离.

$\because$ 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$

的底面边长为 1, AB_1 与底面 $ABCD$ 所成的角为 60° ,

$\therefore A_1A = \sqrt{3}$. 故选 D.]



7. B [由题意得, $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P(AB) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$,

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

从而 A, B 互为独立事件, A 正确;

A, B 可以同时发生, B 错误;

$$P(B|C) = \frac{n(BC)}{n(C)} = \frac{3 \times 6}{36 - 3 \times 3} = \frac{2}{3}, \text{ C 正确;}$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{3 \times 3}{6 \times 6} = \frac{3}{4}, \text{ D 正确.}$$

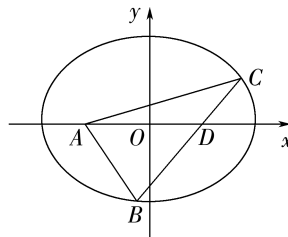
故选 B.]

8. C [设该椭圆长半轴长为 $a, |DC| = m, |AC| = n, |BD| =$

$$2|DC|, \text{ 则 } |BD| = 2m,$$

$$|AC| = \frac{3}{2}|AB|, \text{ 可得 } |AB| = \frac{2}{3}n, \text{ 以 } AD \text{ 所在直线为 } x \text{ 轴,}$$

中垂线为 y 轴, 建立如图所示的平面直角坐标系,



由椭圆的定义可知

$$\begin{cases} m+n=2a, \\ 2m+\frac{2}{3}n=2a, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m=\frac{1}{2}a, \\ n=\frac{3}{2}a, \end{cases}$$

$$\therefore |BD|=a, |DC|=\frac{1}{2}a, |AC|=\frac{3}{2}a, |AB|=a,$$

在 $\triangle ABC$ 中,显然有 $\angle ADC=\pi-\angle ADB$,

$$\therefore \cos \angle ADC = -\cos \angle ADB,$$

设 $|AD|=x$,由余弦定理可知

$$\begin{aligned} & \frac{|AD|^2+|DC|^2-|AC|^2}{2|AD|\cdot|DC|} \\ &= -\frac{|AD|^2+|DB|^2-|AB|^2}{2|AD|\cdot|DB|}, \\ & \text{即 } \frac{x^2+\frac{a^2}{4}-\frac{9a^2}{4}}{2\times\frac{a}{2}x} = -\frac{x^2+a^2-a^2}{2ax}, \end{aligned}$$

$$\text{解得 } x = \frac{2\sqrt{3}}{3}a,$$

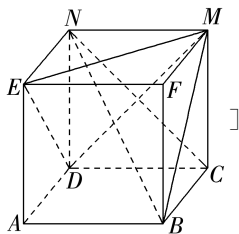
$$\text{因此椭圆的焦距 } 2c = |AD| = \frac{2\sqrt{3}}{3}a,$$

$$\therefore \text{椭圆的离心率 } e = \frac{2c}{2a} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 故选 C.}]$$

9. BCD [作出正方体的直观图,如图,由直观图可知 BM 与 DE 为互相垂直的异面直线,故A错误; $EF\parallel AB\parallel CD$,故B正确; CN 与 BM 为异面直线,故C正确;

由正方体性质易证 $DM\perp$ 平面 BCN ,又 $BN\subset$ 平面 BCN ,故 $DM\perp BN$,故D正确.

故选BCD.



10. AC [由 $a>0, b>0$, 则 $ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, 当且仅当 $a=$

$$b=\frac{1}{2} \text{ 时, 等号成立,}$$

对于A, 由 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=1$, 得 $a^2+b^2=1-2ab$,

$$\text{所以 } a^2+b^2\geq 1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}, \text{ 故A正确;}$$

对于B, 由 $a+b=1$, 即 $a=1-b$, 得 $a-2b=1-3b$, 所以 $3^{a-2b}-3=3^{1-3b}-3=3(3^{-3b}-1)$,

因为函数 $y=3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 且 $b>0$, 即 $-3b<0$, 则 $3^{-3b}<3^0=1$,

所以 $3^{a-2b}-3<0$, 即 $3^{a-2b}<3$, 故B错误;

对于C, $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{2})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{2})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{a+2\sqrt{ab}+b-2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{ab}-1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{2}} \leq \frac{a+b-1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{2}} = 0, \text{ 当} \end{aligned}$$

且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立,

所以 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2}$, 故C正确;

对于D, $\log_{\frac{1}{2}}a+\log_{\frac{1}{2}}b-2=\log_{\frac{1}{2}}ab-\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=\log_{\frac{1}{2}}4ab$, 且函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

则 $\log_{\frac{1}{2}}a+\log_{\frac{1}{2}}b-2\geq\log_{\frac{1}{2}}\left(4\times\frac{1}{4}\right)=0$, 所以 $\log_{\frac{1}{2}}a+\log_{\frac{1}{2}}b\geq 2$, 故D错误.

故选AC.]

11. AC [对于选项A, 易知双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$,

要使直线 $y=kx$ 与双曲线交于点A, B,

需满足 $|k|<\frac{\sqrt{2}}{2}$, 故选项A正确;

对于选项B, 因为 $||AF_1|-|AF_2||=2a=2\sqrt{6}$,

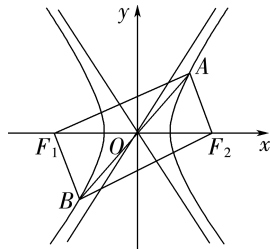
又点A, B关于原点对称,

所以四边形 AF_1BF_2 为平行四边形,

此时 $|BF_1|=|AF_2|$,

所以 $||AF_1|-|BF_1||=||AF_1|-|AF_2||=2\sqrt{6}$,

故选项B错误;



对于选项C, 设 $A(m, n)$,

因为点A在双曲线上,

$$\text{所以 } \frac{m^2}{6}-\frac{n^2}{3}=1 (m\leq -\sqrt{6} \text{ 或 } m\geq \sqrt{6}),$$

$$\text{解得 } n^2=\frac{1}{2}m^2-3, \text{ 又 } F_1(-3, 0), F_2(3, 0),$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \overrightarrow{AF_1} &= (-3-m, -n), \overrightarrow{AF_2} = (3-m, -n), \overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} \\ &= m^2-9+n^2 = m^2-9+\frac{1}{2}m^2-3 = \frac{3}{2}m^2-12 \geq \frac{3}{2} \times \end{aligned}$$

$(\sqrt{6})^2-12=-3$, 故选项C正确;

对于选项D, 因为 $F_2(3, 0)$,

当 $k=0$ 时, 直线 l 的方程为 $y=0$,

此时点 F_2 到直线 l 的距离为0;

当 $k\neq 0$ 时, 点 F_2 到直线 $y=kx$ 即 $kx-y=0$ 的距离 $d=$

$$\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{\sqrt{9k^2}}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}, \text{ 因为 } -\frac{\sqrt{2}}{2} < k < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 且 } k$$

$\neq 0$,

$$\text{所以 } \frac{1}{k^2} > 2,$$

$$\text{此时 } d = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}} < \sqrt{\frac{9}{1+2}} = \sqrt{3},$$

则 F_2 到直线 l 的距离小于 $\sqrt{3}$, 故选项D错误.

故选AC.]

12. $x^2=4y$ 或 $x^2=-12y$ [抛物线的准线与直线 $y=1$ 之间的距离是2,

可知抛物线的准线与直线 $y=1$ 平行, 且距离为2,

故抛物线的准线方程为 $y = -1$ 或 $y = 3$.

当抛物线的准线方程为 $y = -1$ 时, 抛物线的焦点在 y 轴的正半轴上, 且 $\frac{p}{2} = 1, p = 2$, 故抛物线方程为 $x^2 = 4y$;

当抛物线的准线方程为 $y = 3$ 时, 抛物线的焦点在 y 轴的负半轴上, 且 $\frac{p}{2} = 3, p = 6$, 故抛物线方程为 $x^2 = -12y$.

综上所述, 满足条件的抛物线的标准方程为 $x^2 = -12y$ 或 $x^2 = 4y$.]

13. $\frac{54}{59}$ [因为 $P(A) = 0.9, P(\bar{B}|A) = 0.6, P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.5$, 所以 $P(\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}|A) + P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.9 \times 0.6 + 0.1 \times 0.5 = 0.59$,

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A)P(\bar{B}|A)}{P(\bar{B})} = \frac{0.9 \times 0.6}{0.59} = \frac{54}{59}.]$$

14. $4\sqrt{3}$ [在 $\triangle ABC$ 中, $AB =$

$$4\sqrt{3}, \angle ACB = \frac{\pi}{3}.$$

根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} =$

$$\frac{c}{\sin C} = 2r (r \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 外接圆半径}),$$

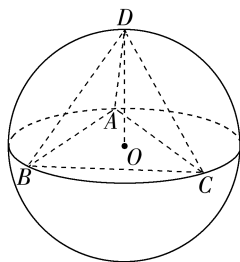
这里 $c = AB = 4\sqrt{3}, C = \angle ACB = \frac{\pi}{3}$, 所以 $2r =$

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 8, \text{ 解得 } r = 4.$$

因为 A, B, C 三点所在平面经过球心 O , 所以球 O 的半径 $R = r = 4$.

当 OD 垂直于平面 ABC 时, 点 D 到平面 ABC 的距离最大, 这个最大值就是球的半径 R ,

所以点 D 到平面 ABC 的距离的最大值为 4, 球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{256}{3}\pi$.]



大题保分练(一)

1. 解: (1) 由余弦定理的推论得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 及 $c^2 = a^2 +$

$$b^2 - ab, \text{ 得 } \cos C = \frac{1}{2}, \text{ 由于 } C \in (0, \pi), \text{ 则 } C = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{因为 } \cos 2B = \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 且 } B \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\text{所以 } 2B = \frac{\pi}{6}, \text{ 则 } B = \frac{\pi}{12}.$$

$$(2) \text{法一: 由(1)可知 } A = \frac{7\pi}{12},$$

$$\text{且 } \sin B = \sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$\sin A = \sin \frac{7\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$\text{由正弦定理, } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\text{得 } a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{\sin A}{\sin B} = 2 + \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times (2 + \sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{4}.$$

法二: 由(1)可知 $\cos 2B = \sin \left(2B + \frac{\pi}{2}\right) = \sin C = \sin(A +$

$$B), \text{ 故 } A = \frac{\pi}{2} + B,$$

所以 $\sin B = -\cos A$,

$$\text{由正弦定理, } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

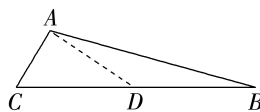
$$\text{得 } a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{\sin A}{\sin B} = -\tan A$$

$$= -\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2 + \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times (2 + \sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{4}.$$

法三: 如图, 过点 A 作 $AD \perp AC$ 交 BC 于点 D ,



$$\text{由于 } \angle CAB = \frac{7\pi}{12}, \text{ 则 } \angle DAB = B = \frac{\pi}{12},$$

$$\text{所以 } AD = DB = AC \cdot \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, CD = 2, a = 2 + \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times (2 + \sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{4}.$$

2. 解: (1) 证明: 由数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是公差为 $\sqrt{2}$ 的等差数列, $a_1 = 2$,

$$\text{可得 } \sqrt{S_n} = \sqrt{2} + \sqrt{2}(n-1) = \sqrt{2}n, \text{ 即有 } S_n = 2n^2,$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } a_1 = S_1 = 2;$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 2(n-1)^2 = 4n - 2,$$

上式对 $n = 1$ 也成立,

$$\text{则 } a_n = 4n - 2, \text{ 且 } a_{n+1} - a_n = 4(n+1) - 2 - 4n + 2 = 4,$$

可得 $\{a_n\}$ 是等差数列.

$$(2) \text{由(1)知 } b_n = \frac{a_n}{2^{n+1}} = (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\text{可得数列 } \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } T_n = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\frac{1}{2}T_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

上面两式相减可得

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2} + 2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] - (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{2} -$$

$$\frac{2n+3}{2^{n+1}}, \text{ 则 } T_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

3. 解: (1) 证明: 取 BC 的中点 M , 连接 AM, ME .

因为 $AB = AC$, 所以 $AM \perp BC$,

因为 E 为 BC_1 的中点, 所以 EM 为 $\triangle BCC_1$ 的中位线, 所以

$EM \parallel CC_1 \parallel AD$,

$$\text{又 } EM = \frac{1}{2}CC_1 = \frac{1}{2}AA_1 = AD,$$

所以四边形 AMED 为平行四边形, 有 $DE \parallel AM$,

又因为 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $AM \subset$ 平面 ABC , 则 $AA_1 \perp AM$, $EM \perp AM$,

由于 $EM, BC \subset$ 平面 B_1BCC_1 , $EM \cap BC = M$,

所以 $AM \perp$ 平面 B_1BCC_1 ,

又因为 $DE \parallel AM$,

所以 $DE \perp$ 平面 B_1BCC_1 .

(2) 法一: 由 (1) 可知 MA, MC, ME 所在直线两两垂直, 如图, 以 M 为坐标原点, MC 所在直线为 x 轴, MA 所在直线为 y 轴, ME 所在直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系,

在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中, 由余弦定理可得 $B_1C_1^2 = A_1B_1^2 + A_1C_1^2 - 2A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \cos \angle B_1A_1C_1$,

则 $B_1C_1 = 6$,

于是 $D(0, \sqrt{3}, 3), B(-3, 0, 0), B_1(-3, 0, 6), C_1(3, 0, 6), A_1(0, \sqrt{3}, 6)$, 则 $\overrightarrow{BA_1} = (3, \sqrt{3}, 6)$,

设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 为平面 DBC_1 的法向量, $\overrightarrow{BD} = (3, \sqrt{3}, 3), \overrightarrow{BC_1} = (6, 0, 6)$,

$$\text{于是 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 3x + \sqrt{3}y + 3z = 0, \\ 6x + 6z = 0, \end{cases}$$

令 $z = 1$, 则 $\mathbf{n} = (-1, 0, 1)$ 为平面 DBC_1 的一个法向量,

设直线 A_1B 与平面 DBC_1 所成角为 θ ,

$$\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{BA_1}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{BA_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{BA_1}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{3}{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{8}, \text{ 即直}$$

线 A_1B 与平面 DBC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{8}$.

法二: 在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中, 由余弦定理可得 $B_1C_1^2 = A_1B_1^2 + A_1C_1^2 - 2A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \cos \angle B_1A_1C_1$, 则 $B_1C_1 = 6$,

如图, 连接 B_1E, B_1D , 由 (1) 知 $DE \perp$ 平面 $B_1BCC_1, BC_1 \subset$ 平面 B_1BCC_1 , 则 $DE \perp BC_1$,

又因为 $BB_1 = B_1C_1$, 所以四边形 B_1BCC_1 为正方形, 因为 E 为 BC_1 的中点, 所以 $B_1E \perp BC_1$,

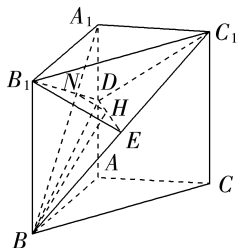
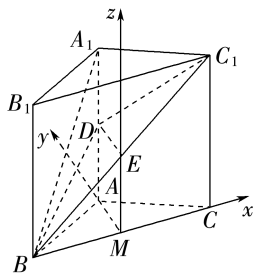
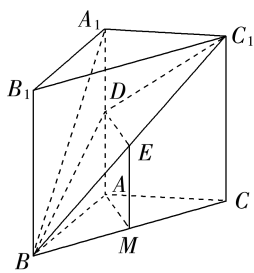
由于 $B_1E \cap DE = E, B_1E, DE \subset$ 平面 B_1DE , 则 $BC_1 \perp$ 平面 B_1DE ,

如图, 记 $A_1B \cap B_1D = N$, 过点 N 作 $NH \perp DE$, 连接 BH ,

由于 $BC_1 \perp$ 平面 $B_1DE, NH \subset$ 平面 B_1DE ,

则 $NH \perp BC_1$,

又因为 $DE \cap BC_1 = E, DE, BC_1 \subset$ 平面 DBC_1 , 则 $NH \perp$ 平面 DBC_1 , 所以 $\angle NBH$ 即为直线 A_1B 与平面 DBC_1 所成角, 由于 $\triangle A_1DN \sim \triangle BB_1N$,



则 $\frac{B_1N}{ND} = \frac{BN}{A_1N} = \frac{BB_1}{A_1D} = 2$, 即点 N 为线段 BA_1 靠近 A_1 的三等分点,

则 $NB = \frac{2}{3}A_1B = \frac{2}{3}\sqrt{A_1B_1^2 + BB_1^2} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, 由于 $DE \perp B_1E$,

则 H 为 DE 靠近点 D 的三等分点, 则 $NH = \frac{1}{3}B_1E = \sqrt{2}$,

于是 $\sin \angle NBH = \frac{NH}{NB} = \frac{\sqrt{6}}{8}$, 即直线 A_1B 与平面 DBC_1 所成

角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{8}$.

法三: 设直线 A_1B 与平面 DBC_1

所成角为 θ , 点 A_1 到平面 DBC_1

的距离为 h , 则 $\sin \theta = \frac{h}{A_1B}$,

在 $\text{Rt} \triangle A_1B_1B$ 中, $A_1B_1 = 2\sqrt{3}$,

$BB_1 = 6$, 则 $A_1B = 4\sqrt{3}$,

过点 B 作 $BQ \perp CA$ 交 CA 的延长线于点 Q , 易得 $BQ = 3$, 且易证 $BQ \perp$ 平面 A_1ACC_1 ,

由于 $S_{\triangle A_1DC_1} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$, 则 $V_{B-A_1DC_1} = \frac{1}{3} \times$

$3\sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}$,

在 $\triangle DBC_1$ 中, $DB = DC_1 = \sqrt{21}$, 且 $BC_1 = 6\sqrt{2}$, $S_{\triangle DBC_1} =$

$\frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{6}$, 又 $V_{A_1-DBC_1} = V_{B-A_1DC_1} = 3\sqrt{3}$, 则 $h =$

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}}, \sin \theta = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{8}.$$

即直线 A_1B 与平面 DBC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{8}$.

4. 解: (1) 设事件 C 为“首次识别正确”, A 为“选择测试集 A”, B 为“选择测试集 B”,

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P(C|A) = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{5},$$

$$P(C|B) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{5},$$

由全概率公式 $P(C) = P(A) \cdot P(C|A) + P(B) \cdot P(C|B) = \frac{1}{2}$.

$$(2) P(A|\bar{C}) = \frac{P(A\bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(A)P(\bar{C}|A)}{P(\bar{C})}$$

$$= \frac{P(A)(1 - P(C|A))}{1 - P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}.$$

(3) 选择 A 的概率为 $\frac{1}{2}$ 时, 识别正确的概率为 $\frac{1}{2}$, 识别错误的概率为 $\frac{1}{2}$;

选择 A 的概率为 $\frac{1}{3}$ 时, 识别正确的概率为 $\frac{7}{15}$, 识别错误的概率为 $\frac{8}{15}$;

选择 A 的概率为 $\frac{2}{3}$ 时, 识别正确的概率为 $\frac{8}{15}$, 识别错误的概率为 $\frac{7}{15}$;

X 的可能取值为 $0, 1, 2, 3$,

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{15} \times \frac{7}{15} = \frac{49}{450},$$

$$P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{15} \times \frac{7}{15} + \frac{1}{2} \times \frac{8}{15} \times \frac{8}{15} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{15} \times \frac{8}{15} = \frac{176}{450} = \frac{88}{225},$$

$$P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{15} \times \frac{7}{15} + \frac{1}{2} \times \frac{8}{15} \times \frac{8}{15} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{15} \times \frac{8}{15} = \frac{176}{450} = \frac{88}{225},$$

$$P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{15} \times \frac{7}{15} = \frac{49}{450},$$

X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{49}{450}$	$\frac{88}{225}$	$\frac{88}{225}$	$\frac{49}{450}$

$$E(X) = 0 \times \frac{49}{450} + 1 \times \frac{88}{225} + 2 \times \frac{88}{225} + 3 \times \frac{49}{450} = 1.5. \text{连续测试三次, 识别正确次数的期望为 } 1.5.$$

大题保分练(二)

1. 解: (1) 完善表格如下表所示:

单位: 人

性别	工资是否超过 3 500 元		合计
	工资超过 3 500 元	工资不超过 3 500 元	
男性	200	180	380
女性	280	240	520
合计	480	420	900

零假设为 H_0 : 工资的多少与居民的性别之间无关联.

$$\text{则 } \chi^2 = \frac{900 \times (200 \times 240 - 180 \times 280)^2}{380 \times 520 \times 480 \times 420} \approx 0.13 < 3.841,$$

故依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 可以认为 H_0 成立, 即不能认为工资的多少与居民的性别有关联.

$$(2) \text{由题意知, 工资超过 3 500 元的概率 } P = \frac{480}{900} = \frac{8}{15}.$$

记“至少 2 人工资超过 3 500 元”为事件 A ,

$$\text{所以 } P(A) = C_3^2 \times \left(\frac{8}{15}\right)^2 \times \frac{7}{15} + \left(\frac{8}{15}\right)^3 = \frac{1\,856}{3\,375}.$$

2. 解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 2x - \frac{a}{x}$,

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x = \sqrt{\frac{a}{2}}.$$

当 $0 < x < \sqrt{\frac{a}{2}}$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减; 当 $x >$

$\sqrt{\frac{a}{2}}$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0, \sqrt{\frac{a}{2}}\right)$, 单调递增区间

为 $\left(\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty\right)$.

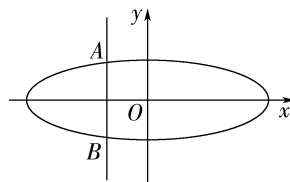
(2) 证明: 由已知可得 $f'(1) = 2 - a = 1$, 所以 $a = 1$,

由(1)可知, 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

上单调递增,

$$\text{因此函数 } f(x) \text{ 的最小值为 } f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \sqrt{e} = \frac{3}{4}, \text{ 得证.}$$

3. 解: (1) 由题意知, 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 可得 $a^2 = 2b^2$, ①



因为当 $AB \perp x$ 轴时, 线段 AB 中点的横坐标为 -1 , 所以直线 AB 的方程为 $x = -1$,

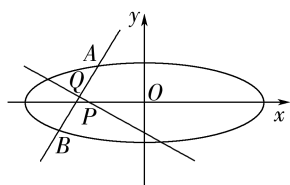
因为 $|AB| = \sqrt{2}$, 所以 A, B 的坐标分别为 $\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$$\text{代入 } C \text{ 的方程, 可得 } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2b^2} = 1, \text{ ②}$$

联立①②解得 $b^2 = 1, a^2 = 2$,

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 线段 AB 的中点为 $Q(-1, y_0)$, 直线 AB 的斜率为 $k (k \neq 0)$,



因为 $\frac{x_1^2}{2} + y_1^2 = 1, \frac{x_2^2}{2} + y_2^2 = 1$, 所以 $\frac{x_1^2 - x_2^2}{2} + y_1^2 - y_2^2 = 0$, 可

$$\text{得 } \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{2} = -(y_1 - y_2)(y_1 + y_2),$$

即 $-\frac{2}{4y_0} = -\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, 所以 $y_0 = \frac{1}{2k}$, 可得 $Q\left(-1, \frac{1}{2k}\right)$, 因为线段 AB 的中垂线与 x 轴的交点为 P , 设 $P(n, 0)$,

$$\text{又 } AB \perp PQ, \text{ 所以 } \frac{1}{2k} = -\frac{1}{n},$$

$$\text{解得 } n = -\frac{1}{2}, \text{ 所以 } |OP| = \frac{1}{2}.$$

4. 解: (1) 不能选条件①, 因为当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 1^2 - 2 = -1 < 0$, 不符合题意, 故不能选条件①.

选条件②, 由 $a_{n+1} = \sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}$,

$$\text{得 } S_{n+1} - S_n = \sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n},$$

$$\text{即 } (\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})(\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}) = \sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}, \text{ 则 } \sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} = 1,$$

则 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列, 则 $\sqrt{S_n} = \sqrt{S_1} + (n-1) \times 1 = n$, 则 $S_n = n^2$.

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 1$,

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 1$ 满足上式.

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*$.

选条件③, 因为 $2\sqrt{S_n} = a_n + 1$,

$$\text{所以 } S_n = \frac{(a_n + 1)^2}{4},$$

当 $n=1$ 时, $2\sqrt{a_1} - 1 = a_1$, 解得 $a_1 = 1$;

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_n - S_{n-1} = a_n = \frac{(a_n + 1)^2}{4} - \frac{(a_{n-1} + 1)^2}{4},$$

$$\text{即 } (a_n - a_{n-1} - 2)(a_n + a_{n-1}) = 0,$$

因为 $a_n > 0$, 所以 $a_n - a_{n-1} = 2$,

则 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列,

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 1$.

$$(2) \text{证明: 因为 } b_n = \frac{a_{n+1}}{S_n \cdot S_{n+1}} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2},$$

$$\text{所以 } T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

因为 $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$, 且在 $x > 0$ 时单调递减,

所以 $T_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1$, 且 T_n 在 $n > 0$ 时递增, 并在 $n=1$

时取得最小值 $\frac{3}{4}$,

所以 $\frac{3}{4} \leq T_n < 1$.

大题保分练(三)

1. 解: (1) 补全列联表如表所示.

单位: 人

学生群体	关注度		合计
	关注	不关注	
大学生	$\frac{1}{2}n$	$\frac{1}{5}n$	$\frac{7}{10}n$
高中生	$\frac{1}{10}n$	$\frac{1}{5}n$	$\frac{3}{10}n$
合计	$\frac{3}{5}n$	$\frac{2}{5}n$	n

零假设为

H_0 : 关注航天事业发展与学生群体无关.

根据列联表中的数据, 经计算得到

$$\chi^2 = \frac{n\left(\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{5} - \frac{n}{5} \cdot \frac{n}{10}\right)^2}{\frac{7n}{10} \cdot \frac{3n}{10} \cdot \frac{3n}{5} \cdot \frac{2n}{5}} = \frac{8n}{63}.$$

因为依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 认为关注航天事业发展与学生群体有关,

$$\text{所以 } \chi^2 = \frac{8n}{63} \geq 3.841, \text{ 解得 } n \geq 30.25,$$

又由题可知, n 是 10 的倍数, $\therefore n_{\min} = 40$.

(2) 记小华同学答出三个问题的事件分别为 A, B, C ,

$$\text{则 } P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{2}{3}, P(C) = \frac{1}{2}.$$

记选择方案一晋级的概率为 P_1 ,

$$\text{则 } P_1 = P(ABC) + P(\overline{A}BC) + P(A\overline{B}C) + P(ABC) = \frac{3}{4} \times$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{24}.$$

记选择方案二晋级的概率为 P_2 ,

$$\text{则 } P_2 = \frac{1}{3}P(AB) + \frac{1}{3}P(BC) + \frac{1}{3}P(AC) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{29}{72}.$$

因为 $P_1 > P_2$, 所以小华选择方案一晋级的可能性更大.

2. 解: (1) $f(x) = 2\sqrt{3}\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \sqrt{3}$

$$= \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{故最小正周期 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi,$$

$$\text{令 } 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{故 } \frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{11\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{故 } f(x) \text{ 的单调递减区间为 } \left[\frac{5\pi}{12} + k\pi, k\pi + \frac{11\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}.$$

$$(2) \text{ 由 } f(A) = 0, \text{ 则 } 2\sin\left(2A - \frac{\pi}{3}\right) = 0,$$

$$\text{所以 } 2A - \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{由 } A \text{ 是三角形内角, 且 } A > \frac{\pi}{2}, \text{ 故 } A = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{由正弦定理和 } a \sin B \sin C = \sqrt{3} \sin A, \text{ 得 } a \times \frac{b}{2R} \times \frac{c}{2R} = \sqrt{3} \times$$

$$\frac{a}{2R} (R \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 外接圆半径}),$$

$$\text{则 } bc = 2\sqrt{3}R = \sqrt{3} \times \frac{a}{\sin A} = \sqrt{3} \times \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2a,$$

$$\text{由余弦定理, } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 + bc \geq 3bc,$$

$$\text{即 } a \geq 6, \text{ 当且仅当 } b = c = 2\sqrt{3} \text{ 时取等号,}$$

$$\text{此时 } \triangle ABC \text{ 的面积取最小值为 } S = \frac{1}{2}bc \sin A = 3\sqrt{3}.$$

3. 解: (1) 抛物线 $\Gamma: y^2 = 2px$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 则 $\frac{p}{2} = 1$, 即

$$p = 2, \text{ 所以抛物线 } \Gamma \text{ 的方程为 } y^2 = 4x.$$

(2) 由题意得直线 AB 的方程为 $l: y = x - 1$, 联立抛物线 Γ 和直线 l 的方程

$$\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = x - 1, \end{cases} \text{ 得 } x^2 - 6x + 1 = 0, \Delta = 32 > 0, \text{ 设 } A(x_1, y_1),$$

$$B(x_2, y_2), \text{ 由根与系数的关系得 } x_1 + x_2 = 6,$$

$$\text{故 } |AB| = x_1 + x_2 + p = 6 + 2 = 8.$$

(3) 证明: 由题意可知 AB 所在直线的斜率不为 0, 设 AB 所在直线的方程为 $x = my + n$.

联立抛物线 Γ 和直线 AB 的方程

$$\begin{cases} y^2 = 4x, \\ x = my + n, \end{cases} \text{ 化简可得 } y^2 - 4my - 4n = 0,$$

$$\text{则 } \Delta = 16m^2 + 16n > 0. \text{ 由根与系数的}$$

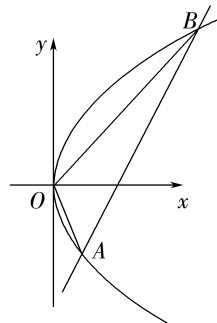
$$\text{关系可得 } y_1 y_2 = -4n,$$

$$\text{又由已知 } k_{OA} \cdot k_{OB} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} =$$

$$\frac{y_1 \cdot y_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{16}{y_1 \cdot y_2} = \frac{16}{-4n} = -2, \text{ 则}$$

$$\frac{y_1^2 \cdot y_2^2}{16} = -2, \text{ 则}$$

$$n = 2. \text{ 此时直线 } AB: x = my + 2 \text{ 恒过点 } (2, 0).$$



4. 解: (1) 连接 DE , 平面 $ABEF \perp$ 平面 $ECDF$, 交线为 EF ,

由 $BE \perp EF$, 有 $BE \perp$ 平面 $ECDF$, 又 $CF \subset$ 平面 $ECDF$, 所以 $BE \perp CF$,

因为 $CF \perp BD$, $BE \cap BD = B$, $BE, BD \subset$ 平面 BDE , 所以 $CF \perp$ 平面 BDE ,

又 $DE \subset$ 平面 BDE , 所以 $CF \perp DE$,

此时 $\triangle FEC$ 与 $\triangle DFE$ 相似, 故 $DF \cdot EC = EF^2$,

设 $BE = t (0 < t < 8)$, 由 $(9-t)(8-t) = 12$, 解得 $t = 5$, 所以 $BE = 5$.

(2) 过点 C 作 EF 的平行线交 DF 于点 G , 连接 AG ,

由 $CG \parallel EF \parallel BA$, 且 $CG = EF = BA$,

得四边形 $CGAB$ 是平行四边形, 故 $BC \parallel AG$,

所以 $\angle DAG$ 即为异面直线 BC 与 AD 所成的角, 设 $BE = t (0 < t < 8)$,

$\tan \angle DAG = \tan(\angle DAF - \angle GAF)$

$$= \frac{\tan \angle DAF - \tan \angle GAF}{1 + \tan \angle DAF \tan \angle GAF}$$

$$= \frac{\frac{9-t}{t} - \frac{8-t}{t}}{1 + \frac{9-t}{t} \cdot \frac{8-t}{t}} = \frac{1}{2\left(t + \frac{36}{t}\right) - 17}$$

$$\leq \frac{1}{2 \times 2\sqrt{36} - 17} = \frac{1}{7},$$

所以锐角 $\angle DAG$ 正切值的最大值为 $\frac{1}{7}$, 此时余弦值有最小

值 $\frac{7\sqrt{2}}{10}$,

所以异面直线 BC 与 AD 所成角的余弦值的最小值为 $\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

大题保分练(四)

1. 解: (1) 因为 $(\tan B - 1)(\tan C - 1) = 2$,

所以 $\tan B \tan C - \tan B - \tan C + 1 = 2$,

即 $\tan B \tan C = 1 + \tan B + \tan C$,

因此 $\tan A = -\tan(B+C) = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C}$

$$= -\frac{\tan B + \tan C}{-\tan B - \tan C} = 1.$$

由于 $A \in (0, \pi)$, 因此 $A = \frac{\pi}{4}$.

(2) 由题意知, $2\tan B = \tan A + \tan C$,

因此 $2\tan B = \tan A - \tan(A+B) = 1 - \frac{1 + \tan B}{1 - \tan B}$,

解得 $\tan B = 2, \tan C = 3$,

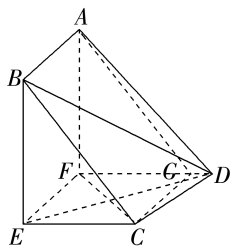
故 $B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

因此 $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin B = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin C = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

则由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 可设 $a = \sqrt{5}k, b = 2\sqrt{2}k, k > 0$,

故 $S = \frac{1}{2}ab \sin C = 3k^2 = 12$, 解得 $k = 2$,

因此 $a = \sqrt{5}k = 2\sqrt{5}$.



2. 解: (1) $\because A, B$ 分别是直线 $y = 2x$ 和 $y = -2x$ 上的动点,

$\therefore$ 设 $A(x_1, 2x_1), B(x_2, -2x_2), P(x, y)$,

$\because$ 点 P 为线段 AB 的中点,

$$\text{则} \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \frac{2x_1 - 2x_2}{2}, \end{cases} \therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = 2x, \\ x_1 - x_2 = y, \end{cases}$$

又 $\because |AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (2x_1 + 2x_2)^2} = 4, \therefore 16x^2 + y^2 =$

16 , 即 $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$,

$\therefore$ 动点 P 的轨迹方程为 $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$.

(2) $\because$ 线段 EF 是圆 $C: (x+2)^2 + y^2 = 1$ 的一条直径, $\therefore$ 圆心为 $C(-2, 0)$, 半径为 1,

$$\therefore \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF} = (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CE}) \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CF}) = (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CE}) \cdot (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{CE}) = \overrightarrow{PC}^2 - \overrightarrow{CE}^2,$$

$$\therefore \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF} = (x+2)^2 + y^2 - 1 = -15x^2 + 4x + 19$$

$$= -15\left(x - \frac{2}{15}\right)^2 + \frac{289}{15},$$

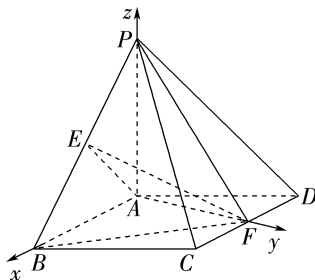
$\because -1 \leq x \leq 1, \therefore$ 当 $x = \frac{2}{15}$ 时, $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 取得最大值 $\frac{289}{15}$.

3. 解: (1) 证明: 在菱形 $ABCD$ 中, 由 $\angle ABC = 60^\circ$, 知 $\triangle ACD$ 为正三角形, 又 F 为线段 CD 的中点, 则 $AF \perp CD$, 即 $AF \perp AB$,

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD, AF \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore AF \perp PA$, 又 $PA \cap AB = A, PA, AB \subset$ 平面 $PAB, \therefore AF \perp$ 平面 PAB , 又 $PB \subset$ 平面 $PAB, \therefore PB \perp AF, \therefore PF = BF, E$ 为线段 PB 的中点, $\therefore PB \perp EF$, 又 $AF \cap EF = F, AF, EF \subset$ 平面 $AEF, \therefore PB \perp$ 平面 AEF .

(2) 如图, 以 AB, AF, AP 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系,



则 $B(2, 0, 0), P(0, 0, 2), F(0, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{PB} = (2, 0, -2), \overrightarrow{BF} = (-2, \sqrt{3}, 0)$,

设 $n = (x, y, z)$ 为平面 PBF 的法向量, 由 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \end{cases}$

$$\text{得} \begin{cases} 2x - 2z = 0, \\ -2x + \sqrt{3}y = 0. \end{cases}$$

令 $x = \sqrt{3}$, 则 $y = 2, z = \sqrt{3}$, 即 $n = (\sqrt{3}, 2, \sqrt{3})$ 为平面 PBF 的一个法向量,

易知 $m = (0, 0, 1)$ 为平面 BFA 的一个法向量,

$$\therefore \cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| |n|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10},$$

由图可知二面角 $P-BF-A$ 为锐二面角, 故其余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

4. 解: (1) 零假设为 H_0 : 喜爱篮球运动与性别无关.

$$\text{根据列联表数据, 经计算得 } \chi^2 = \frac{200 \times (60 \times 80 - 20 \times 40)^2}{100 \times 100 \times 80 \times 120} =$$

$$\frac{100}{3} > 10.828 = x_{0.001}.$$

根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 我们推断 H_0 不成立, 即认为喜爱篮球运动与性别有关.

(2) ①由题意得, 第2次触球者为乙、丙中的一个, 第2次触球者传给包括甲的二人中的一人, 故传给甲的概率为 $\frac{1}{2}$, 故

$$P_3 = \frac{1}{2}.$$

②证明: 第 n 次触球者是甲的概率记为 P_n , 则当 $n \geq 2$ 时, 第 $n-1$ 次触球者是甲的概率为 P_{n-1} , 第 $n-1$ 次触球者不是甲的概率为 $1-P_{n-1}$,

$$\text{则 } P_n = \frac{1}{2}(1-P_{n-1}),$$

$$\text{从而 } P_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(P_{n-1} - \frac{1}{3}\right), \text{ 又 } P_1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \neq 0,$$

所以 $\left\{P_n - \frac{1}{3}\right\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项, $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列,

$$\text{所以 } P_n = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } P_9 = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^8 + \frac{1}{3} > \frac{1}{3},$$

$P_{10} = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^9 + \frac{1}{3} < \frac{1}{3}$, 所以 $P_9 > P_{10}$, 故第9次触球者是甲的概率比第10次触球者是甲的概率大.

创新融合练(一)

$$\text{解: (1) 由题意可知 } \begin{cases} \frac{b}{a} = 3, \\ \frac{1}{a^2} \times \frac{25}{16} - \frac{1}{b^2} \times \frac{81}{16} = 1, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = 1, \\ b = 3, \end{cases}$$

$$\text{所以 } C \text{ 的方程为 } x^2 - \frac{y^2}{9} = 1.$$

(2) 证明: 法一: 设 $P_n(x_n, y_n), P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}),$

$Q_n(-x_{n+1}, y_{n+1})$, 则

$$\begin{cases} 9x_n^2 - y_n^2 = 9, \\ 9x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2 = 9, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} (3x_n - y_n)(3x_n + y_n) = 9, \\ (3x_{n+1} - y_{n+1})(3x_{n+1} + y_{n+1}) = 9, \end{cases}$$

$$\text{令 } a_n = 3x_n - y_n, b_n = 3x_n + y_n,$$

$$\text{则 } a_n b_n = 9, a_{n+1} b_{n+1} = 9,$$

$$\text{于是 } \frac{3x_{n+1} - y_{n+1}}{3x_n - y_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$= \frac{a_{n+1}(a_n a_{n+1} + 9)}{a_n(a_n a_{n+1} + 9)} = \frac{a_{n+1} + \frac{9}{a_n}}{a_n + \frac{9}{a_{n+1}}}$$

$$= \frac{a_{n+1} + b_n}{a_n + b_{n+1}}$$

$$= \frac{3x_{n+1} - y_{n+1} + 3x_n + y_n}{3x_n - y_n + 3x_{n+1} + y_{n+1}}$$

$$= \frac{3 + \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n + x_{n+1}}}{3 - \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n + x_{n+1}}} = \frac{3+k}{3-k},$$

所以数列 $\{3x_n - y_n\}$ 是公比 $q = \frac{3+k}{3-k}$ 的等比数列.

法二(设直线, 直接联立法, 核心在于构建 x_n, y_n 与 x_{n+1}, y_{n+1} 之间的代数关系):

设 $P_n(x_n, y_n), P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}), Q_n(-x_{n+1}, y_{n+1}),$

$$\text{则 } k = \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n + x_{n+1}}.$$

设直线 $P_n Q_n$ 的方程为 $y - y_n = k(x - x_n),$

$$\text{由 } \begin{cases} y - y_n = k(x - x_n), \\ 9x^2 - y^2 = 9, \end{cases} \Rightarrow (9 - k^2)x^2 - 2k(y_n - kx_n)x -$$

$$(y_n - kx_n)^2 - 9 = 0, \Delta > 0, \text{ 可得 } -x_{n+1} + x_n =$$

$$\frac{2k(y_n - kx_n)}{9 - k^2} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{(k^2 + 9)x_n - 2ky_n}{9 - k^2},$$

$$\text{所以 } y_{n+1} = y_n + k(-x_{n+1} - x_n)$$

$$= y_n - k(x_{n+1} + x_n) = \frac{(k^2 + 9)y_n - 18kx_n}{9 - k^2},$$

$$\text{即有 } 3x_{n+1} - y_{n+1}$$

$$= \frac{3(k^2 + 9)x_n - 6ky_n}{9 - k^2} - \frac{(k^2 + 9)y_n - 18kx_n}{9 - k^2}$$

$$= \frac{(3+k)^2(3x_n - y_n)}{9 - k^2}$$

$$\Rightarrow \frac{3x_{n+1} - y_{n+1}}{3x_n - y_n}$$

$$= \frac{3+k}{3-k},$$

所以数列 $\{3x_n - y_n\}$ 是公比 $q = \frac{3+k}{3-k}$ 的等比数列.

法三(点差法十分比性质):

设 $P_n(x_n, y_n), P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}), Q_n(-x_{n+1}, y_{n+1}),$

$$\text{则 } k = \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n + x_{n+1}},$$

$$\text{由 } \begin{cases} 9x_n^2 - y_n^2 = 9, \\ 9x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2 = 9, \end{cases} \text{ 所以 } 9x_n^2 - 9x_{n+1}^2 = y_n^2 - y_{n+1}^2$$

$$\Rightarrow \frac{9(x_n - x_{n+1})}{y_n + y_{n+1}}$$

$$= \frac{3(y_n - y_{n+1})}{3(x_n + x_{n+1})} = k,$$

由合分比性质可得

$$k = \frac{3(y_n - y_{n+1}) - 9(x_n - x_{n+1})}{3(x_n + x_{n+1}) - (y_n + y_{n+1})}$$

$$= \frac{3(3x_{n+1} - y_{n+1}) - 3(3x_n - y_n)}{(3x_{n+1} - y_{n+1}) + (3x_n - y_n)}$$

$$= \frac{3(3x_{n+1} - y_{n+1}) - 3}{3x_n - y_n} - 3$$

$$= \frac{3x_{n+1} - y_{n+1}}{3x_n - y_n} + 1$$

$$\text{所以 } \frac{3x_{n+1} - y_{n+1}}{3x_n - y_n} = \frac{3+k}{3-k},$$

所以 $\{3x_n - y_n\}$ 是公比 $q = \frac{3+k}{3-k}$ 的等比数列.

法四(点差法):

设 $P_n(x_n, y_n), P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}), Q_n(-x_{n+1}, y_{n+1}),$

$$\begin{aligned} & \text{则 } \begin{cases} 9x_n^2 - y_n^2 = 9, \\ 9x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2 = 9, \end{cases} \text{ 所以 } 9x_n^2 - 9x_{n+1}^2 = y_n^2 - y_{n+1}^2 \Rightarrow \\ & \frac{9(x_n - x_{n+1})}{y_n + y_{n+1}} = \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n + x_{n+1}} = k, \\ & \text{所以 } \begin{cases} y_n - y_{n+1} = k(x_n + x_{n+1}), \\ 3(x_n - x_{n+1}) = \frac{k}{3}(y_n + y_{n+1}), \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3x_{n+1} - y_{n+1} + y_n - 3x_n = \frac{k}{3}(3x_n - y_n) + \frac{k}{3}(3x_{n+1} - y_{n+1}),$$

$$\text{所以 } (3-k)(3x_{n+1} - y_{n+1}) = (3+k)(3x_n - y_n) \Rightarrow \frac{3x_{n+1} - y_{n+1}}{3x_n - y_n} = \frac{3+k}{3-k},$$

即数列 $\{3x_n - y_n\}$ 是公比 $q = \frac{3+k}{3-k}$ 的等比数列.

(3) 当 $k=1$ 时, 由(2)知, 数列 $\{3x_n - y_n\}$ 的公比 $q=2$,

$$\text{因为 } 3x_1 - y_1 = \frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } 3x_n - y_n = \frac{3}{2} \times 2^{n-1} = \frac{3}{4} \times 2^n, \text{ ①}$$

$$\text{因为 } x_n^2 - \frac{y_n^2}{9} = 1,$$

$$\text{所以 } 3x_n + y_n = \frac{9}{\frac{3}{2} \times 2^{n-1}} = 12 \times \frac{1}{2^n}. \text{ ②}$$

由①②得

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{8} \cdot 2^n + 2 \cdot \frac{1}{2^n}, \\ y_n = 6 \cdot \frac{1}{2^n} - \frac{3}{8} \cdot 2^n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{8} \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}}, \\ y_{n+1} = 6 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{3}{8} \cdot 2^{n+1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+2} = \frac{1}{8} \cdot 2^{n+2} + 2 \cdot \frac{1}{2^{n+2}}, \\ y_{n+2} = 6 \cdot \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{3}{8} \cdot 2^{n+2}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } x_{n+1} - x_n = \frac{1}{8} \cdot 2^n - \frac{1}{2^n}, x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{3}{8} \cdot 2^n - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^n},$$

$$\frac{1}{2^n}, y_{n+1} - y_n = -3 \cdot \frac{1}{2^n} - \frac{3}{8} \cdot 2^n, y_{n+2} - y_{n+1} = -\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2^n} - \frac{9}{8} \cdot 2^n,$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{P_n P_{n+1}} = (x_{n+1} - x_n, y_{n+1} - y_n), \overrightarrow{P_n P_{n+2}} = (x_{n+2} - x_n, y_{n+2} - y_n),$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } S &= \frac{1}{2} |(x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_n) - (x_{n+2} - x_n)(y_{n+1} - y_n)| \\ &= \frac{1}{2} \left| \left(\frac{9}{16} - \frac{9}{64} \cdot 4^n + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{4^n} \right) - \left(-\frac{9}{16} - \frac{9}{64} \cdot 4^n + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{4^n} \right) \right| = \frac{9}{16}. \end{aligned}$$

创新融合练(二)

解:(1)证明:由题设,长轴长 $|AB| = |A'B'| = 4$, 短轴长为 $2\sqrt{3}$, 则 $|OF_1| = |OF_2| = |O'F'_2| = 1$,

所以 F_2, F'_2 分别是 $OB, O'B'$ 的中点, 而柱体中四边形 $ABB'A'$ 为矩形, 连接 OB' (图略),

由 $B'F'_2 \parallel OF_1, |B'F'_2| = |OF_1| = 1$,

故四边形 $F_1OB'F'_2$ 为平行四边形, 则 $OB' \parallel F_1F'_2$,

因为 P 为 BB' 的中点, 所以 $PF_2 \parallel OB'$, 故 $PF_2 \parallel F_1F'_2$,

因为 $PF_2 \subset$ 平面 $PMN, F_1F'_2 \not\subset$ 平面 PMN , 故 $F_1F'_2 \parallel$ 平面 PMN .

(2) 由题设, 令 $|QF_1| = m, |QF_2| = n$, 则 $m+n=4$,

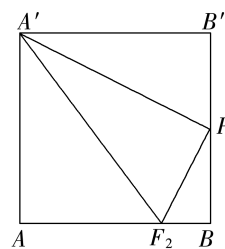
又 $|QQ'| = 4$,

$$\text{所以 } \tan \alpha = \frac{4}{m}, \tan \beta = \frac{4}{n}, \text{ 则 } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} =$$

$$\frac{4(m+n)}{mn-16} = \frac{16}{mn-16}, \text{ 因为 } mn \leq \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 = 4,$$

当且仅当 $m=n$, 即 $\tan \alpha = \tan \beta$ 时上式取等号, 所以 $\tan(\alpha + \beta) \geq -\frac{4}{3}$, $\tan(\alpha + \beta)$ 的最小值为 $-\frac{4}{3}$.

(3) 由 $V_{E-PMN} = V_{M-PEF_2} + V_{N-PEF_2}$,

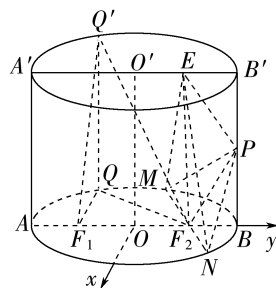


正方形 $ABB'A'$ 中, P 为 BB' 的中点, 易得 E 与 A' 重合时 F_2P 与 EP 垂直,

此时 $|PF_2| = \sqrt{5}, |EP| = 2\sqrt{5}$,

则 $S_{\triangle PEF_2}$ 的最大值为 $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 5$,

构建如图所示坐标系且 $B(0, 2)$, 底面椭圆方程为 $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$,



设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

设 $MN: y = tx + 1$, 与椭圆方程联立得 $(3t^2 + 4)x^2 + 6tx - 9 = 0$, 且 $\Delta = 144(t^2 + 1) > 0$,

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = -\frac{6t}{3t^2 + 4}, x_1 x_2 = -\frac{9}{3t^2 + 4},$$

$$\text{而 } |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2},$$

$$\text{所以 } |x_1 - x_2| = \frac{12\sqrt{t^2 + 1}}{3t^2 + 4}, \text{ 令 } l = \sqrt{t^2 + 1} \geq 1,$$

$$\text{则 } |x_1 - x_2| = \frac{12l}{3l^2 + 1} = \frac{12}{3l + \frac{1}{l}},$$

由对勾函数性质知 $y = 3l + \frac{1}{l}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

故 $|x_1 - x_2| \in (0, 3]$,

由 $V_{E-PMN} = V_{M-PEF_2} + V_{N-PEF_2} = \frac{1}{3} S_{\triangle PEF_2} \cdot |x_1 - x_2| \cdot |x_1 - x_2| \in (0, 3]$, 得 $V_{E-PMN} \in (0, 5]$.
 综上, $V_{E-PMN} \in (0, 5]$.

创新融合练(三)

解: (1) 由 $f(x) = e^x (\sin x + \cos x) - a, x \in [0, \pi]$,
 则 $f'(x) = 2e^x \cos x$,
 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,
 当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减,
 则函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - a$, 又 $f(0) = 1 - a > f(\pi) = -e^\pi - a$,
 所以函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(\pi) = -e^\pi - a$.
 (2) 由题知 $g(x) = e^x \sin x - ax (a > 0), x \in [0, \pi], g(0) = 0$,
 又 $g'(x) = e^x (\sin x + \cos x) - a$,
 则 $g'(x) = f(x)$, 由(1)知 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减,
 且最大值 $f(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - a$, 最小值 $f(\pi) = -e^\pi - a < 0$,
 $f(0) = 1 - a$,
 ① 当 $f(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - a \leq 0$, 即 $a \geq e^{\frac{\pi}{2}}$ 时, $f(x) \leq 0$,
 即 $g'(x) \leq 0$,
 此时函数 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递减,
 又 $g(0) = 0$,
 则函数 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有 1 个单调区间和 1 个零点;
 ② 当 $f(0) = 1 - a \geq 0$, 即 $0 < a \leq 1$ 时, $f(\frac{\pi}{2}) > 0, f(\pi) < 0$,
 则存在 $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 使得 $f(x_0) = 0$,
 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f(x) > 0, g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 单调递增,
 当 $x \in (x_0, \pi)$ 时, $f(x) < 0, g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 单调递减,
 又 $g(0) = 0$, 则 $g(x_0) > g(0) = 0$, 又 $g(\pi) = -\pi a < 0$,
 所以 $g(x)$ 在 (x_0, π) 上也有一个零点,
 所以函数 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有 2 个单调区间和 2 个零点;
 ③ 当 $f(0) = 1 - a < 0$, 且 $f(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - a > 0$, 即 $1 < a < e^{\frac{\pi}{2}}$ 时,
 存在 $x_1 \in (0, \frac{\pi}{2}), x_2 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 使得 $f(x_1) = f(x_2) = 0$,
 当 $x \in (0, x_1)$ 时, $f(x) < 0, g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 单调递减,
 当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $f(x) > 0, g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 单调递增,
 当 $x \in (x_2, \pi)$ 时, $f(x) < 0, g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 单调递减,
 又 $g(0) = 0, g(\pi) = -\pi a < 0$, 此时取 $a = \frac{2}{\pi} e^{\frac{\pi}{2}}$, 则 $g(x_1) < g(0) = 0, g(x_2) > g(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} e^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} = 0$,
 此时函数 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有 3 个单调区间且有 3 个零点.
 综上所述: ① 当 $a \geq e^{\frac{\pi}{2}}$ 时, 函数 $g(x)$ 有 1 个单调区间;
 ② 当 $0 < a \leq 1$ 时, 函数 $g(x)$ 有 2 个单调区间;

③ 当 $1 < a < e^{\frac{\pi}{2}}$ 时, 函数 $g(x)$ 有 3 个单调区间,
 且函数 $g(x)$ 的零点个数的最大值为 3.

(3) **证明:** 由(2)知, 当 $a > e^{\frac{\pi}{2}}$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减,
 则 $g(x) < g(0) = 0$,
 即 $e^x \sin x < ax$,
 则 $e^{\frac{1}{n}} \sin \frac{1}{n} < a \cdot \frac{1}{n}$,
 则 $e \sin 1 + e^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} + e^{\frac{1}{3}} \sin \frac{1}{3} + \cdots + e^{\frac{1}{n}} \sin \frac{1}{n} < a \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$,
 设 $h(x) = x - \ln \frac{1}{1-x}, x \in (0, 1)$, 则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = -\frac{x}{1-x} < 0$,
 所以函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,
 则 $h(x) < h(0) = 0$,
 则 $x < \ln \frac{1}{1-x}, x \in (0, 1)$, 取 $x = \frac{1}{n} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$,
 $\therefore \frac{1}{n} < \ln \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \ln \frac{n}{n-1}, \therefore \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n}{n-1}$
 $= \ln n (n \geq 2),$
 $\therefore 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln n (n \in \mathbf{N}^*),$ 又 $a > 0$,
 $\therefore a \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \leq a(1 + \ln n),$
 $\therefore e \sin 1 + e^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} + e^{\frac{1}{3}} \sin \frac{1}{3} + \cdots + e^{\frac{1}{n}} \sin \frac{1}{n} < a(1 + \ln n),$
 $\therefore$ 结论得证.

创新融合练(四)

解: (1) 2 个周期结束后, ξ 的取值可能为 1, 2, 3, 4,
 其中 $P(\xi=1) = p^2$,
 $P(\xi=2) = p(1-p) + (1-p)p^2 = p - p^3$,
 $P(\xi=3) = (1-p) \times C_2^1 \times p \times (1-p)$
 $= 2p(1-p)^2, P(\xi=4) = (1-p)^3$,
 所以 ξ 的分布列为

ξ	1	2	3	4
P	p^2	$p - p^3$	$2p(1-p)^2$	$(1-p)^3$

$E(\xi) = 1 \times p^2 + 2 \times (p - p^3) + 3 \times [2p(1-p)^2] + 4 \times (1-p)^3 = p^2 - 4p + 4$.

(2) (i) $P_2(n)$ 表示分裂 nT 结束后共有 2 个细胞的概率, 则必在某一个周期结束后分裂成 2 个 X 细胞. 不妨设在第 kT 时分裂为 2 个 X 细胞, 之后一直有 2 个 X 细胞,
 此事件概率 $P_{2,k} = p^{k-1} \times (1-p) \times (p^2)^{n-k} = (1-p) \times p^{2n-1-k}, k \leq n, k \in \mathbf{N}^*$.

所以 $P_2(n) = P_{2,1} + P_{2,2} + \cdots + P_{2,n} = \sum_{k=1}^n (1-p) \cdot p^{2n-1-k} = (1-p)p^{2n} \sum_{k=1}^n p^{-1-k} = p^{n-1} \cdot (1-p^n)$.

(ii) 证明: $P_3(n)$ 代表分裂 nT 后有 3 个细胞的概率, 设细胞 X 在 kT 后分裂为 2 个新的 X 细胞, 这两个 X 细胞在剩下的 $(n-k)T$ 中, 其中一个分裂为 2 个 X 细胞, 另一个一直分裂为 1 个 X 细胞, 此事件的概率

$$P_{3,k} = p^{k-1} \cdot (1-p) \cdot C_2^1 p^{n-k} \cdot P_2(n-k) = p^{k-1} \cdot (1-p) \cdot 2 \cdot p^{n-k} \cdot p^{n-k-1} \cdot (1-p^{n-k}),$$

$$\text{得 } P_{3,k} = 2p^{2n-2} \cdot (1-p) \cdot p^{-k} - 2p^{3n-2} \cdot (1-p) \cdot p^{-2k},$$

$$P_3(n) = P_{3,1} + P_{3,2} + \cdots + P_{3,n} = 2p^{2n-2} \cdot (1-p) \cdot$$

$$\sum_{k=1}^n p^{-k} - 2p^{3n-2} \cdot (1-p) \cdot \sum_{k=1}^n p^{-2k}$$

$$= \frac{2p^{n-1} \cdot (1-p^{n-1}) \cdot (1-p^n)}{1+p}$$

$$= \frac{2p^n \cdot (p-p^n) \cdot (1-p^n)}{(1+p)p^2},$$

$$\text{其中 } p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), p^n \in (0, 1).$$

$$\text{令 } x = p^n, P_3(n) = \frac{2x \cdot (p-x) \cdot (1-x)}{(1+p)p^2}$$

$$< \frac{2x \cdot (1-x) \cdot (1-x)}{(1+p)p^2}, x \in (0, 1),$$

$$\text{记 } f(x) = x(1-x)^2, f'(x) = (1-x)(1-3x), \text{ 令 } f'(x) =$$

$$0, \text{ 得 } x = \frac{1}{3}.$$

$$\text{当 } x \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \text{ 时}, f'(x) > 0, f(x) \text{ 单调递增};$$

$$\text{当 } x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right) \text{ 时}, f'(x) < 0, f(x) \text{ 单调递减}.$$

$$\text{故 } [f(x)]_{\max} = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27},$$

$$\text{也就是 } P_3(n) < \frac{8}{27(1+p)p^2} < \frac{8}{27p^2}.$$

高考仿真卷(一)

1. D [由 $z \cdot i = 1 + i$, 得 $z = \frac{1+i}{i} = \frac{(1+i)(-i)}{-i^2} = 1 - i$, 所以复数 z 在复平面内对应的点为 $(1, -1)$, 所以对应点位于第四象限. 故选 D.]

2. A [因为集合 $A = \left\{x \mid x = \frac{k}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\} = \left\{x \mid x = \frac{2k}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$,

$$B = \left\{x \mid x = \frac{k}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}, \text{ 所以 } A \subseteq B.$$

故选 A.]

3. B [由题意得 $D(X) = 4p(1-p) = 1$, 可得 $p = \frac{1}{2}$,

$$\text{所以 } P(X=3) = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}.$$

故选 B.]

4. C [设第 $n(1 \leq n \leq 5, n \in \mathbf{N}^*)$ 人所得钱数为 a_n 钱, 则数列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 为等差数列, 设数列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 的公差为 d ,

$$\text{则 } \begin{cases} 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = 5, \\ 2a_1 + d = 3a_1 + 9d, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = \frac{4}{3}, \\ d = -\frac{1}{6}, \end{cases} \text{ 故 } a_5 = a_1 + 4d =$$

$$\frac{4}{3} - 4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

故选 C.]

5. C [由题意, 可得 $b=2$, 且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, 即 $\sin\left(\frac{\pi\omega}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$,

$$\text{所以 } \frac{\pi\omega}{2} + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } \omega = 2k - \frac{2}{3}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{函数 } f(x) = \sin\left[\left(2k - \frac{2}{3}\right)x + \frac{\pi}{3}\right] + 2,$$

$$\text{所以 } f(2\pi) = \sin\left[\left(2k - \frac{2}{3}\right) \times 2\pi + \frac{\pi}{3}\right] + 2 = \sin(-\pi) + 2 =$$

2, 故选 C.]

6. A [因为 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,

当 $a \cos B = b \cos A$ 时, 结合正弦定理可得

$$\sin A \cos B = \sin B \cos A,$$

$$\text{即 } \sin(A-B) = 0, \text{ 又 } 0 < A < \pi, 0 < B < \pi,$$

所以 $-\pi < A-B < \pi$, 所以 $A-B=0$, 即 $A=B$, 所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形,

当 $\triangle ABC$ 是等腰三角形时, 可能 $A=C$,

即不一定能推出 $a \cos B = b \cos A$,

即“ $a \cos B = b \cos A$ ”是“ $\triangle ABC$ 是等腰三角形”的充分不必要条件. 故选 A.]

7. C [令 $x=0$, 则 $f(y) - f(-y) = 2f(1)f(y) = 2f(y)$,

$$\therefore f(y) = -f(-y),$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数,

$$\text{令 } y=1, \text{ 则 } f(x+1) - f(x-1) = 2f(1-x)f(1) = 2f(1-x), \therefore f(x) \text{ 为奇函数},$$

$$\therefore f(1-x) = -f(x-1), \therefore f(x+1) = -f(x-1),$$

$$\therefore f(x+2) = -f(x), \therefore f(x+4) = f(x),$$

$$\therefore f(x) \text{ 的周期为 } 4, \text{ 所以 } f(2025) = f(1) = 1. \text{ 故选 C.}]$$

8. C [将 $\tan B - \tan C = \frac{1}{\sin 2B}$,

$$\text{变形为 } \tan B - \frac{1}{\sin 2B} = \tan C,$$

$$\text{则 } \frac{\sin B}{\cos B} - \frac{1}{2\sin B \cos B} = \frac{2\sin^2 B - 1}{2\sin B \cos B} = \frac{-\cos 2B}{\sin 2B},$$

$$\text{又 } \tan C = \frac{\sin C}{\cos C}, \text{ 故 } \frac{-\cos 2B}{\sin 2B} = \frac{\sin C}{\cos C},$$

$$\text{即 } \cos 2B \cos C + \sin 2B \sin C = 0, \text{ 即 } \cos(2B-C) = 0,$$

$$\text{因为内角 } B, C \text{ 都为锐角, 则 } -\frac{\pi}{2} < 2B-C < \pi, \text{ 故 } 2B-C =$$

$$\frac{\pi}{2}, \text{ 即 } 2B = \frac{\pi}{2} + C, \sin 2B = \sin\left(\frac{\pi}{2} + C\right) = \cos C,$$

$$\text{所以 } \sin 2B - \cos C = 0.$$

故选 C.]

9. BD [对于 A, 由 $(0.005 + 0.010 + 0.015 + x + 0.040) \times 10 = 1$, 得 $x = 0.030$, A 错误;

对于 B, 成绩在区间 $[90, 100]$ 内的学生人数为 $400 \times 0.040 \times 10 = 160$ (人), B 正确;

对于 C, 平均数 $\bar{x} = 55 \times 0.05 + 65 \times 0.1 + 75 \times 0.15 + 85 \times 0.3 + 95 \times 0.4 = 84$, C 错误;

对于 D, 低于 90 分的频率为 $1 - 0.4 = 0.6$, 设样本数据的 80% 分位数为 n ,

$$\text{则 } \frac{n-90}{100-90} = \frac{0.2}{0.4}, \text{ 解得 } n=95, \text{ D 正确. 故选 BD.}]$$

10. ACD [对于 A, 根据题意, $a=2c$, 所以椭圆 C 的离心率 $e =$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \text{ 故 A 正确};$$

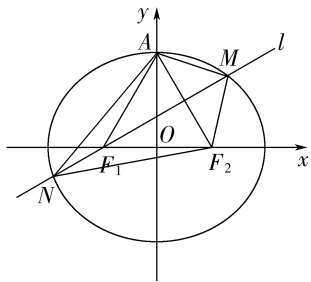
$$\text{又 } b^2 = a^2 - c^2 = 3, \text{ 所以 } c=1, a=2,$$

所以椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$,

根据椭圆定义, 可知 $|\overrightarrow{MF_1}| + |\overrightarrow{MF_2}| = 2a = 4$, 所以 $|\overrightarrow{MF_1}| \cdot |\overrightarrow{MF_2}| \leq \left(\frac{|\overrightarrow{MF_1}| + |\overrightarrow{MF_2}|}{2} \right)^2 = 4$, 当且仅当 $|\overrightarrow{MF_1}| = |\overrightarrow{MF_2}| = 2$ 时取等号, 所以 $|\overrightarrow{MF_1}| \cdot |\overrightarrow{MF_2}|$ 的最大值为 4, 故 B 错误;

设 $M(x, y)$, 又 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$,

所以 $\overrightarrow{MF_1} = (-1-x, -y), \overrightarrow{MF_2} = (1-x, -y)$, 则 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = x^2 - 1 + y^2 = x^2 - 1 + 3 - \frac{3}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2 + 2$, 因为 $-2 \leq x \leq 2$, 所以 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2}$ 的取值范围是 $[2, 3]$, C 正确;



当 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 时, 直线 l 垂直平分 AF_2 , 所以 $\triangle AMN$ 的周长为 $|AN| + |AM| + |MN| = |AN| + |AM| + |NF_1| + |MF_1| = |NF_2| + |MF_2| + |NF_1| + |MF_1| = (|NF_1| + |NF_2|) + (|MF_1| + |MF_2|) = 4a = 8$, 故 D 正确.

故选 ACD.]

11. BCD [对于 A, 假设正四面体的

棱长为 2, 此时两球心 O_1, O_2 分别在弦 AB, CD 的中点处,

连接 AO_2, BO_2 , 因为正四面体棱长为 2, 所以 $AO_2 = BO_2 = \sqrt{3}$,

则 $O_1O_2 = \sqrt{2} < r_1 + r_2 = 2$, 所以此时两球一定有交点, 故 A 错误;

如图, 在正四面体 $ABCD$ 中, 设 M, N 分别为棱 AB, CD 的中点, 棱长为 $2a$,

$\therefore MN = \sqrt{2}a, O_1M = O_2N = \sqrt{1-a^2}$, 则 $2 < O_1O_2 \leq \sqrt{2}a + 2\sqrt{1-a^2}$,

对于 B, 棱长为 $\sqrt{2}$ 时, 此时 $MN = 1, O_1M = O_2N = \frac{\sqrt{2}}{2}, (O_1O_2)_{\max} =$

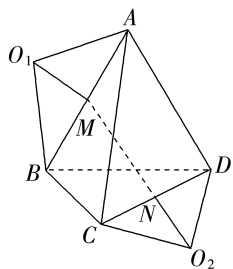
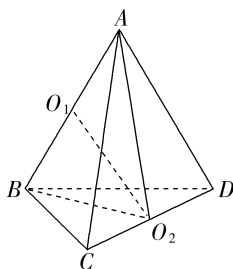
$1 + \sqrt{2} > 2$,

所以存在两个半径为 1 的球无公共点, 故 B 正确;

对于 CD, 令 $a = \sin \theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$,

则 $\sqrt{2}a + 2\sqrt{1-a^2} = \sqrt{2}\sin \theta + 2\cos \theta = \sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sin \theta + \frac{\sqrt{6}}{3}\cos \theta\right) = \sqrt{6}\sin(\theta + \varphi)$ 其中 $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}, 2 <$

$\sqrt{2}a + 2\sqrt{1-a^2} \leq \sqrt{6}$, 当 $a = \sin \theta = \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等号, 所以 CD 正确. 故选 BCD.]



12.6 [由题设

$$y' = \frac{e^x \cdot \sqrt{x+1} - e^x \cdot \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{x+1},$$

故曲线在 $x=0$ 处切线的斜率为 $\frac{1}{2}$,

因为该切线与直线 $ax + 3y - 4 = 0$ 垂直, 所以 $\frac{1}{2} \cdot$

$$\left(-\frac{a}{3}\right) = -1, \text{ 解得 } a = 6.]$$

13. 10 $[x^5 = [1 + (x-1)]^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + a_4(x-1)^4 + a_5(x-1)^5, [1 + (x-1)]^5$ 的展开式的通项为 $C_5^k 1^{5-k} (x-1)^k, k=0, 1, 2, \dots, 5$, 所以 $a_2 = C_5^2 1^3 = 10.]$

14. $(-2\sqrt{6}, 0) \cup (0, 2\sqrt{6})$ [根据题意, 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的圆心为 $O(0, 0)$, 半径 $r = 2$,

若圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上总存在两个点到点 $(a, 1)$ 的距离为 3,

则圆 $x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $(x-a)^2 + (y-1)^2 = 9$ 有两个公共点, 即两圆相交,

因为 $(x-a)^2 + (y-1)^2 = 9$ 的圆心为 $C(a, 1)$, 半径 $R = 3$,

所以 $|R-r| < |OC| < R+r$, 即 $3-2 < \sqrt{a^2+1} < 3+2$,

则 $0 < a^2 < 24$, 即 $-2\sqrt{6} < a < 0$ 或 $0 < a < 2\sqrt{6}$, 即实数 a 的取值范围是 $(-2\sqrt{6}, 0) \cup (0, 2\sqrt{6})$.]

15. 解: (1) 销售额不少于 60 万元的有 3 天, X 的所有可能取值为 1, 2, 3,

$$P(X=1) = \frac{C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10}, P(X=2) = \frac{C_2^1 C_3^2}{C_5^3} = \frac{3}{5}, P(X=3) =$$

$$\frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10},$$

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{5}.$$

$$(2) \bar{x} = \frac{1}{5}(2+4+5+6+8) = 5,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{5}(20+30+60+60+80) = 50,$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 2 \times 20 + 4 \times 30 + 5 \times 60 + 6 \times 60 + 8 \times 80 = 1460,$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2 = 4 + 16 + 25 + 36 + 64 - 5 \times 25 = 20,$$

$$\hat{b} = \frac{1460 - 5 \times 5 \times 50}{20} = 10.5, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 50 - 10.5 \times 5 = -2.5,$$

所以经验回归方程为 $\hat{y} = 10.5x - 2.5$,

当 $x=10$ 时, $\hat{y} = 102.5$,

综上, 所求经验回归方程为 $\hat{y} = 10.5x - 2.5$, 预测广告支出为 10 万元时的销售额为 102.5 万元.

16. 解: (1) 由直线 l 过原点且方向向量为 $\mu = (3, 1)$ 可知 l 的方程为 $y = \frac{1}{3}x$,

因此对任意正整数 $n, a_n = \frac{1}{3}a_{n+1}$, 即 $a_{n+1} = 3a_n$.

因为 $a_3 = 2a_2 + 6$, 所以 $9a_1 = 6a_1 + 6, a_1 = 2 \neq 0$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3, \{a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 3 的等比数列,
所以 $a_n = 2 \times 3^{n-1}$.

(2) 因为数列 $\{b_n\}$ 是以 4 为首项, 2 为公差的等差数列, 所以 $b_n = 2n + 2$,

因为 $a_n = 2 \times 3^{n-1}$, 所以 $2m + 2 = 2 \times 3^{k-1}$, 即 $m = \frac{2 \times 3^{k-1} - 2}{2} = 3^{k-1} - 1$,

由于 $m \in \mathbf{N}^*$, 所以 $3^{k-1} - 1 \geq 1$, 即 $3^{k-1} \geq 2$, 因为 $k \in \mathbf{N}^*$, 所以 $k \geq 2$, 因此 k 的取值从 2 开始.

将 m 的值从小到大排列, 得到数列 $\{c_n\}$,

则 $c_n = 3^n - 1, n \in \mathbf{N}^*$,

所以 $S_n = \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{2}$.

17. 解: (1) 证明: $\because EA, CD$ 均垂直于平面 $ABC, \therefore EA \parallel CD$,

取 AB 的中点 M , 连接 FM, CM .

$\because F$ 是 BE 的中点, $EA = 2, \therefore FM$ 是 $\triangle ABE$ 的中位线,

$\therefore FM \parallel AE$ 且 $FM = 1$,

又 $CD \parallel AE$ 且 $CD = 1$, 故四边形 $FMCD$ 是平行四边形,

$\therefore FD \parallel CM$, 又 $FD \not\subset$ 平面 $ABC, CM \subset$ 平面 $ABC, \therefore FD \parallel$ 平面 ABC .

(2) 令 $DC = a (a > 0)$, 取 AC 的中点为 O , 连接 BO , 过 O 作 $OZ \parallel AE$, 且交 DE 于点 $Z, \because OZ \parallel AE, AE \perp$ 平面 $ABC, \therefore OZ \perp$ 平面 ABC ,

$\because \triangle ABC$ 是正三角形, $\therefore AO = CO$,

$\therefore OB \perp AC$,

如图, 以 O 为坐标原点, $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OZ}$ 方向分别为 x, y, z 轴正方向, 建立空间直角坐标系,

则 $B(\sqrt{3}, 0, 0), E(0, -1, 2)$,

$D(0, 1, a), C(0, 1, 0)$, 所以 $\overrightarrow{EB} =$

$(\sqrt{3}, 1, -2), \overrightarrow{ED} = (0, 2, a - 2)$,

设平面 BED 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y,$

$z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{ED} = 0, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} \sqrt{3}x + y - 2z = 0, \\ 2y + (a - 2)z = 0, \end{cases}$

取 $z = 2\sqrt{3}$, 则 $\mathbf{n} = (a + 2, \sqrt{3}(2 - a), 2\sqrt{3})$ 为平面 BED 的一个法向量,

又 $\overrightarrow{CE} = (0, -2, 2)$, 设 CE 与平面 BED 所成角为 θ , 则 $\sin \theta =$

$$\frac{|\overrightarrow{CE} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{CE}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{6}}{4} \times \frac{a}{\sqrt{a^2 - 2a + 7}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{7}{a^2} - \frac{2}{a}}},$$

所以, 当 $a = 7$ 时, $\sin \theta$ 有最大值为 $\frac{\sqrt{7}}{4}$,

综上, 直线 CE 与平面 EBD 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

18. 解: (1) 依题意, $\begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1, \\ a^2 - b^2 = 1, \end{cases}$ 解得 $a^2 = 4, b^2 = 3$, 所以 C 的

方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 证明: 点 $F(1, 0)$, 显然 l 的斜率存在, 设 l 的方程为 $y = kx + m, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = kx + m, \end{cases}$ 消去 y 并整理, 得 $(3 + 4k^2)x^2 + 8kmx +$

$$4m^2 - 12 = 0,$$

由直线 l 与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 得 $\Delta = (8km)^2 - 16(3 + 4k^2)(m^2 - 3) = 48(4k^2 - m^2 + 3) > 0$,

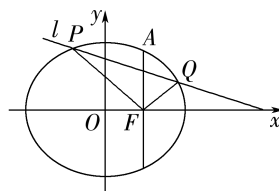
则 $x_1 + x_2 = \frac{-8km}{3 + 4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2}$, 由 $\angle PFA = \angle QFA$,

得直线 PF, QF 的斜率互为相反数, 即 $\frac{y_1}{x_1 - 1} + \frac{y_2}{x_2 - 1}$

$$= \frac{y_1(x_2 - 1) + y_2(x_1 - 1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$$

$$= \frac{(kx_1 + m)(x_2 - 1) + (kx_2 + m)(x_1 - 1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$$

$$= 0,$$



因此 $(kx_1 + m)(x_2 - 1) + (kx_2 + m)(x_1 - 1) = 0$, 整理得 $2kx_1 x_2 - (k - m)(x_1 + x_2) - 2m = 0$,

则 $2k \cdot \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2} - (k - m) \cdot \frac{-8km}{3 + 4k^2} - 2m = 0$, 化简得

$$m = -4k,$$

所以直线 l 的方程为 $y = k(x - 4)$, 即 l 过定点 $(4, 0)$.

19. 解: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = x - a +$

$$\frac{a - 1}{x} = \frac{x^2 - ax + a - 1}{x} = \frac{(x - 1)[x - (a - 1)]}{x},$$

令 $f'(x) = 0$, 则 $x = 1$ 或 $x = a - 1$,

因为 $a > 1$, 所以 $a - 1 > 0$, 当 $a - 1 = 1$, 即 $a = 2$ 时, $f'(x) = \frac{(x - 1)^2}{x} \geq 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 无极值点;

当 $a - 1 > 1$, 即 $a > 2$ 时, 在 $(0, 1)$ 和 $(a - 1, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 在 $(1, a - 1)$ 上 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

所以 $x = 1$ 是极大值点, $x = a - 1$ 是极小值点;

当 $0 < a - 1 < 1$, 即 $1 < a < 2$ 时, 在 $(0, a - 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 在 $(a - 1, 1)$ 上 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 所以 $x = a - 1$ 是极大值点, $x = 1$ 是极小值点.

综上, 当 $a = 2$ 时, 无极值点;

当 $a > 2$ 时, $x = 1$ 是极大值点, $x = a - 1$ 是极小值点;

当 $1 < a < 2$ 时, $x = a - 1$ 是极大值点, $x = 1$ 是极小值点.

(2) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln x$,

不妨设 $x_1 > x_2 > 0$, 则 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > b$ 恒成立, 等价于

$$f(x_1) - bx_1 > f(x_2) - bx_2 \text{ 恒成立,}$$

令 $g(x) = f(x) - bx = \frac{1}{2}x^2 - (2 + b)x + \ln x, x \in (0,$

$+\infty)$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g'(x) = x - (2+b) + \frac{1}{x} \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 即

$b \leq x + \frac{1}{x} - 2$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

由均值不等式 $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ (当且仅当 $x=1$ 时取等号),

所以 $x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$, 则 $b \leq 0$, 故实数 b 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.

高考仿真卷(二)

1. B $[A \cup B = \{0, 1, 2, 4\},$

由 $2\lg x < 1$, 得 $\lg x < \frac{1}{2}$, 解得 $x \in (0, \sqrt{10})$, 所以 $(A \cup B)$

$\cap C = \{1, 2\}$.

故选 B.]

2. A [因为角 α 的终边过点 $(4, 3)$,

所以 $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5}$,

所以 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha = \frac{4}{5}$.

故选 A.]

3. C $[z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i-1}{2} = -i$. 故选 C.]

4. A [由题意知 $2a+b = (4, 8+x)$, 由 $b \parallel (2a+b)$,

得 $4x = 2(8+x)$, 解得 $x=8$.

故选 A.]

5. D $[\because e = \frac{c}{a} = 2$, 则 $c=2a$,

$\therefore \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{a^2}} = \sqrt{3}$, $\therefore$ 双曲线的渐

近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \sqrt{3}x$.

故选 D.]

6. A [由题意可知, 圆锥的母线长 $l=4$, 底面周长 $C = \frac{1}{4} \cdot$

$2\pi \cdot 4 = 2\pi$, 所以圆锥的底面半径 $r=1$,

根据题意可作圆锥与其内切球的轴截面如下:

根据圆锥和球的对称性可知, 球的截面为圆 O , 也即为等腰 $\triangle ABC$ 的内切圆,

即 $OE \perp AC$, $AD \perp BC$, $OD = OE$, $CD = CE$,

在 $\text{Rt} \triangle ADC$ 中, $AD^2 + CD^2 = AC^2$, 由 $AC=l=4$, $CD=r=1$, 则 $AD = \sqrt{15}$,

在 $\text{Rt} \triangle AOE$ 中, $AE^2 + OE^2 = AO^2$,

即 $(AC - CE)^2 + OE^2 = (AD - OD)^2$,

可得 $(4-1)^2 + OE^2 = (\sqrt{15} - OE)^2$, 解得 $OE = \frac{\sqrt{15}}{5}$, 所以

该圆锥内切球的表面积 $S = 4\pi \left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2 = \frac{12}{5}\pi$.

故选 A.]

7. C $[\because \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NC}, \therefore \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$

$\therefore B, P, N$ 三点共线,

$\therefore \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + (1-m)\overrightarrow{AN} =$

$m\overrightarrow{AB} + (1-m) \times \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{AB} +$

$\frac{2}{9}\overrightarrow{AC},$

$\therefore \frac{1}{3}(1-m) = \frac{2}{9}, \therefore m = \frac{1}{3}.$

$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC},$

$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} \cdot$

$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{9} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{9}$. 故选 C.]

8. D $[f(x_1) - f(x_2) < 2x_1 - 2x_2 \Rightarrow f(x_1) - 2x_1 < f(x_2) - 2x_2,$

设 $F(x) = f(x) - 2x$, 则 $F(x_1) < F(x_2)$,

因为 $x_1 < x_2$, 所以 $F(x) = f(x) - 2x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

其中 $F(x) = \begin{cases} x + \frac{2a-3}{x}, & x \geq 1, \\ (a-1)e^{x-1}, & x < 1, \end{cases}$

需满足 $y = (a-1)e^{x-1}$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, $y = x +$

$\frac{2a-3}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $(a-1)e^0 \leq 1 + 2a - 3$,

由 $(a-1)e^0 \leq 1 + 2a - 3$ 得 $a \geq 1$,

根据 $y = (a-1)e^{x-1}$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 得到 $a-1 > 0$,

故 $a > 1$, 所以 $a > 1$,

当 $2a-3 < 0$, 即 $1 < a < \frac{3}{2}$ 时, $y = x + \frac{2a-3}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单

调递增, 当 $2a-3=0$, 即 $a = \frac{3}{2}$ 时, $y = x$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调

递增, 当 $2a-3 > 0$, 即 $a > \frac{3}{2}$ 时, 由对勾函数性质得, $y = x +$

$\frac{2a-3}{x}$ 在 $(\sqrt{2a-3}, +\infty)$ 上单调递增, 故需满足 $\sqrt{2a-3} \leq$

1, 解得 $a \leq 2$, 所以 $\frac{3}{2} < a \leq 2$, 综上, 实数 a 的取值范围是 $(1,$

$2]$. 故选 D.]

9. ABD [A 选项, 抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线为 $x = -1$, $\odot A$ 的圆

心 $(0, 4)$ 到直线 $x = -1$ 的距离显然是 1, 等于圆的半径,

故准线 l 与 $\odot A$ 相切, A 选项正确;

B 选项, 当 P, A, B 三点共线时, 即 $PA \perp l$, 则 P 的纵坐标

$y_P = 4$,

由 $y_P^2 = 4x_P$, 得到 $x_P = 4$, 故 $P(4, 4)$,
此时切线长 $|PQ| = \sqrt{|PA|^2 - r^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$, B 选项正确;

C 选项, 当 $|PB| = 2$ 时, $x_P = 1$, 此时 $y_P^2 = 4x_P = 4$, 故 $P(1, 2)$ 或 $P(1, -2)$,

当 $P(1, 2)$ 时, $A(0, 4), B(-1, 2), k_{PA} = \frac{4-2}{0-1} = -2, k_{AB} =$

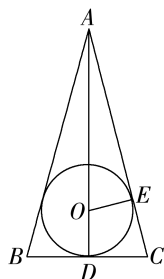
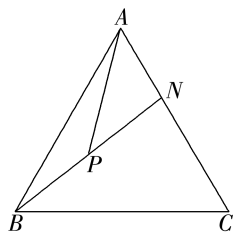
$\frac{4-2}{0-(-1)} = 2$,

不满足 $k_{PA}k_{AB} = -1$.

当 $P(1, -2)$ 时, $A(0, 4), B(-1, -2), k_{PA} = \frac{4-(-2)}{0-1} =$

$-6, k_{AB} = \frac{4-(-2)}{0-(-1)} = 6$,

不满足 $k_{PA}k_{AB} = -1$,



于是 $PA \perp AB$ 不成立, C 选项错误;

D 选项, 法一: 利用抛物线定义转化

根据抛物线的定义, $|PB| = |PF|$, 又 $F(1, 0)$,

于是当 $|PA| = |PB|$ 时, P 点的存在性问题转化成 $|PA| = |PF|$ 时 P 点的存在性问题, $A(0, 4)$, $F(1, 0)$, AF 的中点为 $(\frac{1}{2}, 2)$, AF 的中垂线的斜率为 $-\frac{1}{k_{AF}} = \frac{1}{4}$,

于是 AF 的中垂线方程为 $y = \frac{2x+15}{8}$, 与抛物线 $y^2 = 4x$ 联立, 可得 $y^2 - 16y + 30 = 0$,

$\Delta = 16^2 - 4 \times 30 = 136 > 0$, 即 AF 的中垂线和抛物线有两个交点, 即存在两个 P 点, 使得 $|PA| = |PF|$, D 选项正确.

法二: 设点直接求解

设 $P(\frac{t^2}{4}, t)$,

由 $PB \perp l$ 可得 $B(-1, t)$, 又 $A(0, 4)$, $|PA| = |PB|$, 根据两点间的距离公式, 得

$$\sqrt{\frac{t^4}{16} + (t-4)^2} = \frac{t^2}{4} + 1, \text{ 整理得}$$

$t^2 - 16t + 30 = 0$, $\Delta = 16^2 - 4 \times 30 = 136 > 0$, 则关于 t 的方程有两个解, 即存在两个这样的 P 点, D 选项正确.

故选 ABD.]

10. ACD [令 $y = -y$, 则 $g(x-y) + g(x+y) = g(x)f(-y)$, 注意到 $g(x)$ 不恒为 0, 故 $f(y) = f(-y)$, 故 A 正确;

因为 $f(x)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称, 所以 $f(2) = 0$, 令 $x = 0, y = 2$, 得 $g(2) + g(-2) = g(0)f(2) = 0$,

故 $g(-2) = -1 \neq g(2)$, 故 B 错误;

令 $x = y = -1$, 得 $g(-2) + g(0) = g(-1)f(-1) = 0$,

令 $x = y = 1$, 得 $g(2) + g(0) = g(1)f(1) = 2$,

故 $g(1) \neq 0, f(1) \neq 0$, 从而 $f(-1) \neq 0$, 故 $g(-1) = 0$,

令 $x = -1$, 得 $g(-1+y) + g(-1-y) = 0$, 化简得 $g(-1-y) = -g(-1+y)$, 故 C 正确;

令 $y = 2$, 得 $g(x+2) + g(x-2) = 0$,

而 $g(1-x) = -g(x-3) = g(1+x)$, 故 D 正确. 故选 ACD.]

11. ACD [对于 A, 当 $x = y = 1$ 时, 点 P 在线段 CC' 上运动, 如图所示,

由于 $AB \parallel CD$, 可知 $\angle BAP$ 即为直线 AP 与 CD 所成角,

连接 BP , 设 $CP = t, t \in [0, 1]$,

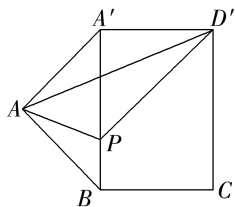
则在 $\text{Rt} \triangle ABP$ 中, $AB = 1$,

$$BP = \sqrt{BC^2 + CP^2} = \sqrt{1+t^2},$$

$$\tan \angle BAP = \frac{BP}{AB} = \sqrt{1+t^2} \in [1, \sqrt{2}], \text{ 故 A 正确;}$$

对于 B, 当 $x+z=1, y=0$ 时, 点 P 在线段 $A'B$ 上运动,

故将 $\triangle AA'B$ 与四边形 $A'BCD'$ 沿 $A'B$ 展开到同一个平面上,



由图可知, 线段 AD' 的长度即为 $AP + PD'$ 的最小值,

$$\text{在 } \triangle AA'D' \text{ 中, } AD' = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos 135^\circ}$$

$$= \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \text{ 故 B 错误;}$$

对于 C, 当 $x+y+z=1$ 时, 点 P

在 $\triangle A'BD$ 内部及边界上运动,

则线段 AP 的长度的最小值即点

A 到平面 $A'BD$ 的距离,

由 $V_{A'-ABD} = V_{A-A'BD}$ 得线段 AP 的

长度的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 C 正确;

对于 D, 当 $x+y+z=k (0 < k < 3)$ 时, 记点 P 的轨迹为平面 α ,

故平面 α 截此正方体所得截面面积的最大值为正方体的中截面的面积, 如图所示,

当点 E, F, G, H, M, N 分别为对应棱的中点时, 连接 EF, FG, GH, HM, MN, NE ,

可得平面 $EFGHMN$ 平行于平

面 $A'BD$, 且为正六边形, 此时该截面 $EFGHMN$ 是最大截面,

由于正方体的棱长为 1, 所以正六边形的边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则面积

$$\text{为 } \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 ACD.]

12. 240 [根据题意, 分 2 步进行,

先将 2 名女生排在一起, 看成一个元素, 考虑其顺序, 有 A_2^2 种情况,

再将其与其他 4 名男生全排列, 有 A_5^5 种情况,

则其不同的排列方法为 $A_5^5 A_2^2 = 240$ 种.]

13. 1 [因为 $2^x + 1 > 0$, 可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

且函数 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(0) = a - 1 = 0$,

$$\text{解得 } a = 1, \text{ 则 } f(x) = \left(1 - \frac{2}{2^x + 1}\right) \cos x,$$

$$\text{又因为 } f(-x) + f(x) = \left(1 - \frac{2}{2^{-x} + 1}\right) \cos(-x) + \left(1 - \frac{2}{2^x + 1}\right) \cos x$$

$$= \left(2 - \frac{2 \times 2^x}{2^x + 1} - \frac{2}{2^x + 1}\right) \cos x = (2 - 2) \cos x = 0,$$

即 $f(-x) = -f(x)$, 可知函数 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $a = 1$ 符合题意.]

14. $\frac{2}{5}$ [设甲获得冠军为事件 A , 比赛共进行了 3 局为事件 B ,

$$P(A) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{27},$$

$$P(AB) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27},$$

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{27}}{\frac{20}{27}} = \frac{2}{5}.]$$

15. 解: (1) 把 20 个成绩按从小到大排序, 可得

53, 57, 61, 63, 63, 65, 66, 66, 67, 68,

72, 73, 76, 77, 79, 79, 85, 87, 90, 92.

由 $75\% \times 20 = 15$, 可知成绩的上四分位数为第 15 个成绩与第 16 个成绩的平均数, 即 $\frac{79+79}{2} = 79$.

(2) 由数据可知, 成绩大于 70 分的有 10 个, 大于上四分位数 79 的成绩有 4 个,

根据题意, X 的所有可能取值为 0, 1, 2,

$$P(X=0) = \frac{C_4^0 C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}, P(X=1) = \frac{C_4^1 C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}, P(X=2) = \frac{C_4^2 C_6^0}{C_{10}^2} = \frac{2}{15},$$

则 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

$$\text{所以 } X \text{ 的数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{2}{15} = \frac{4}{5}.$$

16. 解: (1) 由题意得 $S_1 = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$, $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2$, $S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} c^2$,

则 $S_1 - S_2 + S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} c^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $a^2 + c^2 - b^2 = 2$, 由余弦定理的推论得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, 整理得 $ac \cos B = 1$,

$$\text{因为 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } ac \sin B = 1,$$

$$\text{可得 } \tan B = 1, \text{ 因为 } B \in (0, \pi),$$

$$\text{所以 } B = \frac{\pi}{4}.$$

(2) 由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$, 可得 $ac = \sqrt{2}$, 由正弦定理

$$\text{得 } \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 则 } \frac{b^2}{\sin^2 B} = \frac{a}{\sin A} \cdot \frac{c}{\sin C} = \frac{ac}{\sin A \sin C} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2.$$

$$\text{则 } \frac{b}{\sin B} = \sqrt{2}, \text{ 故 } b = \sqrt{2} \sin B = 1,$$

$$\text{由余弦定理得 } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = (a+c)^2 - 2ac(1+\cos B),$$

$$\text{所以 } (a+c)^2 = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2, \text{ 解得 } a+c = \sqrt{2}+1,$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的周长为 } a+b+c = \sqrt{2}+2.$$

17. 解: (1) 由题意知

$$f'(x) = 1 + \frac{a(a-1)}{x^2} - \frac{2a-1}{x},$$

因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处与 x 轴相切,

$$\text{所以 } \begin{cases} f'(1)=0, \\ f(1)=0, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} a^2 - 3a + 2 = 0, \\ 1 - a(a-1) - 1 = 0, \end{cases}$$

$$\text{则 } \begin{cases} a=1 \text{ 或 } a=2, \\ a=0 \text{ 或 } a=1, \end{cases} \text{ 解得 } a=1.$$

$$(2) y=f(x) \text{ 的定义域为 } (0, +\infty),$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{a(a-1)}{x^2} - \frac{2a-1}{x} \\ &= \frac{x^2 - (2a-1)x + a(a-1)}{x^2} \\ &= \frac{(x-a)(x-a+1)}{x^2}, \end{aligned}$$

若 $a-1 > 0$, 则 $a > 1$,

令 $f'(x) > 0$, 可得 $x > a$ 或 $0 < x < a-1$,

令 $f'(x) < 0$, 可得 $a-1 < x < a$,

所以 $f(x)$ 在 $(a-1, a)$ 上单调递减, 在 $(0, a-1), (a, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极小值, 所以 $a=3$;

若 $a-1 < 0 \leq a$, 则 $0 \leq a < 1$,

令 $f'(x) > 0$, 可得 $x > a$, 令 $f'(x) < 0$, 可得 $0 < x < a$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极小值, 所以 $a=3$, 不符合题意;

若 $a \leq 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 无极小值,

综上, $a=3$.

18. 解: (1) 证明: 依题意, $BC=2, B_1C_1=1, A_1B_1=\sqrt{5}$,

如图所示, 延长三条侧棱交于点 D .

由 $A_1A=B_1B=C_1C$, 可得 $DA=DB=DC$, 且 A_1, B_1, C_1 分别为线段 DA, DB, DC 的中点,

取 AB 的中点 M , 则 $DM \perp AB$.

$$\text{由 } \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{1}{2}, \text{ 可得 } \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{2}, \text{ 则 } AB = 2A_1B_1 = 2\sqrt{5},$$

$$\text{又 } \because AC^2 + BC^2 = AB^2, \therefore CA \perp CB,$$

$$\therefore AM = CM, \text{ 则 } \triangle DAM \cong \triangle DCM, \text{ 故 } \angle DMA = \angle DMC = 90^\circ,$$

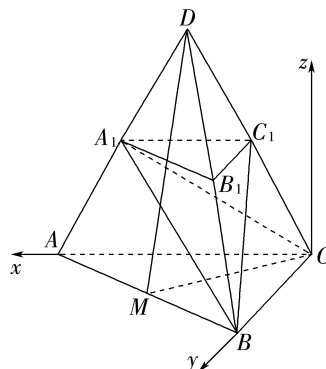
即 $DM \perp MC$, 而 $AB \cap MC = M$, 且 $AB, MC \subset \text{平面 } ABC$, 故 $DM \perp \text{平面 } ABC$,

又 $DM \subset \text{平面 } ABB_1A_1$, 故平面 $ABB_1A_1 \perp \text{平面 } ABC$.

而直线 $l \subset \text{平面 } ABB_1A_1, l \perp AB$, 平面 $ABB_1A_1 \cap \text{平面 } ABC = AB$,

故直线 $l \perp \text{平面 } ABC$.

(2) 以 C 为坐标原点, CA, CB 所在直线分别为 x, y 轴, 过点 C 作垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴, 建立如图所示空间直角坐标系,



$$\text{则 } A(4, 0, 0), D(2, 1, 6), B(0, 2, 0), A_1\left(3, \frac{1}{2}, 3\right), C_1\left(1, \frac{1}{2}, 3\right), \text{ 则 } \overrightarrow{AB} = (-4, 2, 0), \overrightarrow{AD} = (-2, 1, 6), \overrightarrow{BC_1} =$$

$$\left(1, -\frac{3}{2}, 3\right), \overrightarrow{BA_1} = \left(3, -\frac{3}{2}, 3\right).$$

不妨设 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 A_1B_1B 的法向量,

由 $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n}_1 = -4x_1 + 2y_1 = 0, \\ \overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n}_1 = -2x_1 + y_1 + 6z_1 = 0, \end{cases}$ 求得平面 A_1B_1B 的一个法向量 $\mathbf{n}_1 = (1, 2, 0)$,

不妨设 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 为平面 A_1C_1B 的法向量,

$$\text{由 } \begin{cases} \overrightarrow{BC_1} \cdot \mathbf{n}_2 = x_2 - \frac{3}{2}y_2 + 3z_2 = 0, \\ \overrightarrow{BA_1} \cdot \mathbf{n}_2 = 3x_2 - \frac{3}{2}y_2 + 3z_2 = 0, \end{cases}$$

求得平面 A_1C_1B 的一个法向量 $\mathbf{n}_2 = (0, 2, 1)$, 而 $|\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{4}{5}$, 所以平面 A_1B_1B 与平面 A_1C_1B 夹角的余弦值为 $\frac{4}{5}$.

19. 解: (1) 如图 1 所示, 设 $M(x, y)$,

因为 M 到 x 轴的距离小于它到 y 轴的距离,

所以 $|x| > |y|$, 故 $x^2 > y^2$,

又因为 l_1 的斜率为 1, l_2 的斜率为 -1, 故 $l_1 \perp l_2$, 四边形 $ODME$ 为矩形,

因为点 M 到直线 l_1 的距离 $d_1 = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$, 故 $|MD| = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$,

同理 $|ME| = \frac{|x+y|}{\sqrt{2}}$,

所以四边形 $ODME$ 的面积为 $|MD| \cdot |ME| = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt{2}}$.

$\frac{|x+y|}{\sqrt{2}} = \frac{9}{2}$, 所以 $|x^2 - y^2| = 9$, 所以 $x^2 - y^2 = 9$,

所以 C 的方程为 $x^2 - y^2 = 9$.

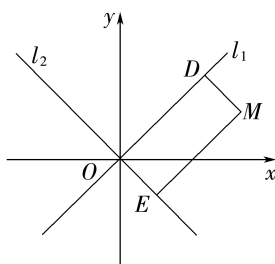


图 1

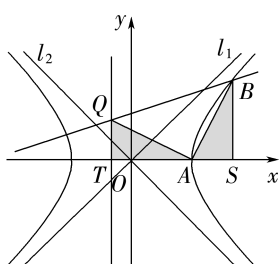


图 2

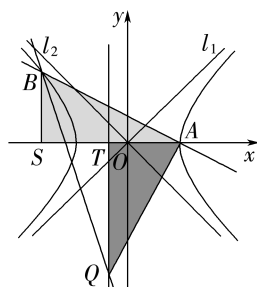


图 3

(2) (i) 法一: 设 $T(-1, 0)$, 令 $y = 0$, 代入 $x^2 - y^2 = 9$, 得 $A(3, 0)$,

① 当点 B 在第一象限时, 如图 2 所示, 由于 $\triangle ABQ$ 是以 BQ 为底的等腰直角三角形, 易知 Q 在 x 轴上方, $|AB| = |AQ|$, $\angle BAQ = \frac{\pi}{2}$,

作 $BS \perp x$ 轴, 垂足为 S , 则 $\triangle ABS \cong \triangle QAT$,

故 $|BS| = |AT| = 4$, 故 $y_B = 4$,

又因为 $x_B^2 - y_B^2 = 9$, 则 $x_B = 5$, 即 $B(5, 4)$,

从而 $|QT| = |AS| = 2$, 故 $Q(-1, 2)$, 直线 BQ 的斜率 $k_{BQ} = \frac{4-2}{5-(-1)} = \frac{1}{3}$.

② 当点 B 在第二象限时, 如图 3 所示, 由于 $\triangle ABQ$ 是以 BQ 为底的等腰直角三角形, 易知 Q 在 x 轴下方, $|AB| = |AQ|$, $\angle BAQ = \frac{\pi}{2}$,

作 $BS \perp x$ 轴, 垂足为 S , 则 $\triangle ABS \cong \triangle QAT$,

故 $|BS| = |AT| = 4$, 故 $y_B = -4$,

又 $x_B^2 - y_B^2 = 9$, 则 $x_B = -5$,

即 $B(-5, 4)$,

从而 $|QT| = |AS| = 8$, 故 $Q(-1, -8)$, 直线 BQ 的斜率 $k_{BQ} = \frac{4-(-8)}{-5-(-1)} = -3$;

③ 当点 B 在第三象限时, 由对称性知, 直线 BQ 的斜率为 3;

④ 当点 B 在第四象限时, 由对称性知, 直线 BQ 的斜率为 $-\frac{1}{3}$;

综上所述, 直线 BQ 的斜率为 $\pm \frac{1}{3}$ 或 ± 3 .

法二: 令 $y = 0$, 代入 $x^2 - y^2 = 9$, 可得 $A(3, 0)$,

设 $B(x_0, y_0)$, $Q(-1, t)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (x_0 - 3, y_0)$, $\overrightarrow{AQ} = (-4, t)$, $x_0^2 - y_0^2 = 9$,

由 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AQ}$, 可得 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$, 故 $ty_0 = 4(x_0 - 3)$,

由 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AQ}|$, 可得 $(x_0 - 3)^2 + y_0^2 = t^2 + 16$, 易知 $x_0 \neq 3$,

所以 $t^2 = \frac{16(x_0 - 3)^2}{y_0^2} = \frac{16(x_0 - 3)^2}{x_0^2 - 9} = \frac{16(x_0 - 3)}{x_0 + 3}$,

所以 $(x_0 - 3)^2 + x_0^2 - 9 = t^2 + 16 = \frac{16(x_0 - 3)}{x_0 + 3} + 16 = \frac{32x_0}{x_0 + 3}$,

即 $2x_0^2 - 6x_0 = \frac{32x_0}{x_0 + 3}$, 易知 $x_0 \neq 0$, 所以 $x_0 - 3 = \frac{16}{x_0 + 3}$, 即 $x_0^2 = 25$, 所以 $y_0^2 = 16$,

当 $x_0 = 5, y_0 = 4$ 时, $t = \frac{4(x_0 - 3)}{y_0} = 2$,

所以 $B(5, 4), Q(-1, 2)$,

直线 BQ 的斜率 $k_{BQ} = \frac{4-2}{5-(-1)} = \frac{1}{3}$;

当 $x_0 = 5, y_0 = -4$ 时, $t = \frac{4(x_0 - 3)}{y_0} = -2$, 所以 $B(5, -4), Q(-1, -2)$,

直线 BQ 的斜率 $k_{BQ} = \frac{-4-(-2)}{5-(-1)} = -\frac{1}{3}$;

当 $x_0 = -5, y_0 = 4$ 时, $t = \frac{4(x_0 - 3)}{y_0} = -8$, 所以 $B(-5, 4), Q(-1, -8)$,

直线 BQ 的斜率 $k_{BQ} = \frac{4-(-8)}{-5-(-1)} = -3$;

当 $x_0 = -5, y_0 = -4$ 时, $t = \frac{4(x_0 - 3)}{y_0} = 8$,

所以 $B(-5, -4), Q(-1, 8)$,

直线 BQ 的斜率 $k_{BQ} = \frac{-4-8}{-5-(-1)} = 3$,

综上所述, 直线 BQ 的斜率为 $\pm \frac{1}{3}$ 或 ± 3 .

(ii) 证明: 设 $M(a, b)$, 依题意可得 $B'(-5, -4), K(4, 5)$, 所以直线 OK 的方程为 $y = \frac{5}{4}x$,

①若 $a=5$, 则直线 MB 的方程为 $x=5$, 直线 MB' 的方程为 $y=-4$,

此时点 $P\left(5, \frac{25}{4}\right), P'\left(-\frac{16}{5}, -4\right)$, 所以 $|x_P| \cdot |x_{P'}| = 16 = |x_K|^2$,

因为 P, K, P', O 四点共线,

所以 $|OP| \cdot |OP'| = |OK|^2$,

所以 $|OP|, |OK|, |OP'|$ 成等比数列;

②若 $a=-5$, 则直线 MB' 的方程为 $x=-5$, 直线 MB 的方程为 $y=4$,

此时点 $P\left(\frac{16}{5}, 4\right), P'\left(-5, -\frac{25}{4}\right)$, 所以 $|x_P| \cdot |x_{P'}| = 16 = |x_K|^2$,

因为 P, K, P', O 四点共线,

所以 $|OP| \cdot |OP'| = |OK|^2$,

所以 $|OP|, |OK|, |OP'|$ 成等比数列;

③若 $a \neq 5$ 且 $a \neq -5, k_{MB} = \frac{b-4}{a-5}, k_{MB'} = \frac{b+4}{a+5}$,

直线 MB 的方程为 $y-4 = \frac{b-4}{a-5}(x-5)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y-4 = \frac{b-4}{a-5}(x-5), \\ y = \frac{5}{4}x, \end{cases}$$

$$\text{解得 } x_P = \frac{4(5b-4a)}{(4b-5a)+9},$$

同理可得直线 MB' 的方程为

$$y+4 = \frac{b+4}{a+5}(x+5),$$

$$\text{联立} \begin{cases} y+4 = \frac{b+4}{a+5}(x+5), \\ y = \frac{5}{4}x, \end{cases}$$

$$\text{解得 } x_{P'} = \frac{4(4a-5b)}{(4b-5a)-9}.$$

因为 $M(a, b)$ 在双曲线 C 上,

所以 $a^2 - b^2 = 9$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{x_P \cdot x_{P'}}{16} &= \frac{(4a-5b)^2}{81-(4b-5a)^2} \\ &= \frac{16a^2-40ab+25b^2}{9a^2-9b^2-16b^2+40ab-25a^2} \\ &= \frac{16a^2-40ab+25b^2}{-16a^2+40ab-25b^2} = -1, \end{aligned}$$

所以 $|x_P| \cdot |x_{P'}| = 16 = |x_K|^2$,

因为 P, K, P', O 四点共线,

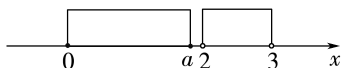
所以 $|OP| \cdot |OP'| = |OK|^2$,

所以 $|OP|, |OK|, |OP'|$ 成等比数列.

综上, $|OP|, |OK|, |OP'|$ 成等比数列.

高考仿真卷(三)

1. A [法一(数轴法): 如图, 利用数轴直观表示, 则 $0 < a \leq 2$, 故选 A.



法二(排除法): 当 $a=2$ 时, 满足 $A \cap B = \emptyset$, 排除 B; 当 $a=2$ 时, $A \cap B = (2, 2.1]$, 不满足题意, 排除 C, D. 故选 A.]

$$2. A \quad [\text{因为 } z = \frac{1-2i}{2+i} = \frac{(1-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{-5i}{5} = -i, \text{ 所以 } \bar{z} = i.]$$

故选 A.]

3. A $[(1-x)^6$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k (-1)^k x^k$, 令 $k=2$, 得 $T_3 = C_6^2 x^2$, 令 $k=3$, 得 $T_4 = -C_6^3 x^3$, 所以 $(1+\frac{1}{x})(1-x)^6$ 的展开式中, x^2 的系数为 $1 \times C_6^2 + 1 \times (-C_6^3) = -5$. 故选 A.]

4. A [设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $d \neq 0, a_2 = 1+d, a_3 = 1+2d, a_6 = 1+5d$. 由题意可知, $(1+2d)^2 = (1+d)(1+5d)$, 得 $d^2 = -2d$, 解得 $d = -2$ 或 $d = 0$ (舍去). 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $S_5 = 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = 5 - 20 = -15$. 故选 A.]

5. B [对于 A, 取 $a=2, b=1$, 满足 $a > b$, 当 $c=-1$ 时, $\frac{b+c}{a+c} < \frac{b}{a}$, 所以 A 是假命题; 对于 B, 若 $c > d$, 则 $-d > -c$, 又 $a > b$, 所以 $a-d > b-c$, 故 B 是真命题; 对于 C, 取 $a=-2, b=-1$, 满足 $a < b < 0$, 则 $a^2=4, ab=2, b^2=1, a^2 > ab > b^2$, 故 C 是假命题; 对于 D, 取 $a=1, b=-1$, 满足 $a > b$, 则 $\frac{1}{a-b} = \frac{1}{2}, \frac{1}{a} = 1, \frac{1}{a-b} < \frac{1}{a}$, 故 D 是假命题. 故选 B.]

6. B [记事件 A_1 为取出的一个零件是第一台车床加工的, 事件 A_2 为取出的一个零件是第二台车床加工的, 事件 B 为取出的一个零件是合格品, 则 $P(A_1) = \frac{2}{3}, P(A_2) = \frac{1}{3}, P(B|A_1) = 1-0.03 = 0.97, P(B|A_2) = 1-0.02 = 0.98$, 故 $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = 0.97 \times \frac{2}{3} + 0.98 \times \frac{1}{3} = \frac{73}{75}$. 故选 B.]

7. C [法一(利用同角三角函数的基本关系求解): 由 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{3}$,

得 $\cos \alpha = 3 \sin \alpha$, ①

又 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, ②

所以由①②得, $\sin^2 \alpha = \frac{1}{10}$, 所以 $\cos(\alpha+\beta) \sin \alpha = (\cos \alpha \cos \beta -$

$\sin \alpha \sin \beta) \sin \alpha = (3 \sin \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \sin \alpha = (3 \cos \beta -$

$\sin \beta) \sin^2 \alpha = \frac{1}{10} (3 \cos \beta - \sin \beta) = 2 \sin \beta$, 整理得, $7 \sin \beta =$

$\cos \beta$, 所以 $\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{1}{7}$. 故选 C.

法二(凑角法): 因为 $\beta = (\alpha+\beta) - \alpha, 2 \sin \beta = \cos(\alpha+\beta) \sin \alpha$, 所以 $2 \sin[(\alpha+\beta) - \alpha] = \cos(\alpha+\beta) \sin \alpha$, 即 $2[\sin(\alpha+\beta) \cos \alpha - \cos(\alpha+\beta) \sin \alpha] = \cos(\alpha+\beta) \sin \alpha$, 整理得 $2 \sin(\alpha+\beta) \cos \alpha =$

$3 \cos(\alpha+\beta) \sin \alpha$, 即 $\tan(\alpha+\beta) = \frac{3}{2} \tan \alpha = \frac{1}{2}$, 所以 $\tan \beta =$

$\tan[(\alpha+\beta) - \alpha] = \frac{\tan(\alpha+\beta) - \tan \alpha}{1 + \tan(\alpha+\beta) \tan \alpha} = \frac{1}{7}$. 故选 C.]

8. C [由题意知, 双曲线 C

的渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$,

$y = -\frac{b}{a}x$. 因为双曲线 C

的一条渐近线的方程是

$y = 2x$, 所以 $b = 2a$. 如图,

设点 P 的坐标为 $(x_1,$

$y_1)$, 右焦点 $F(c, 0)$, 则 $c = \sqrt{5}a$. 由 $|PF| = |PO|$ 得,

$\sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, 解得 $x_1 = \frac{c}{2}$. 将 $x_1 = \frac{c}{2}$ 代入

双曲线 C 的方程, 得 $\frac{c^2}{4a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 则 $\frac{5a^2}{4a^2} - \frac{y^2}{4a^2} = 1$, $y = \pm a$,

即 $y_1 = \pm a$. 因为点 P 在第一象限内, 所以 $P(\frac{c}{2}, a)$. 因为

点 P 在直线 $y = kx$ 上, 所以 $a = k \times \frac{c}{2} = k \times \frac{\sqrt{5}a}{2}$, 解得 $k =$

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故选 C.]

9. BC [当 $m \parallel n, n \subset \alpha$ 时, $m \parallel \alpha$ 或 m

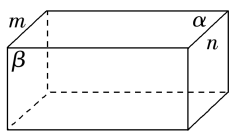
$\subset \alpha$, 所以 A 错误; 当 $m \subset \alpha, m \perp \beta$

时, 由面面垂直的判定定理可得

$\alpha \perp \beta$, 所以 B 正确; 当 $m \perp \alpha, m \perp \beta$

时, 有 $\alpha \parallel \beta$, 所以 C 正确; 当 $\alpha \perp \beta, m \subset \beta, n \subset \alpha$ 时, 如图所

示, $m \parallel n$, 所以 D 错误.]



10. BCD [法一: 因为函数 $y = |f(x) - 2|$ 的图象关于直线 $x =$

1 对称, 所以 $|f(1+x) - 2| = |f(1-x) - 2|$, 即 $f(1+x) -$

$2 = f(1-x) - 2$ 或 $f(1+x) - 2 = 2 - f(1-x)$. 当 $f(1+x) -$

$2 = f(1-x) - 2$ 时, $f(1+x) = f(1-x)$, 即函数 $f(x)$

的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 又函数 $f(x) = ax^3 + bx^2$

$+ cx + d (a \neq 0)$ 的图象是中心对称图形, 不是轴对称图形,

所以 $f(1+x) \neq f(1-x)$; 当 $f(1+x) - 2 = 2 - f(1-x)$

时, $f(1+x) + f(1-x) = 4$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于点

$(1, 2)$ 对称, 所以 $f(1) = 2, -\frac{b}{3a} = 1$, 即 $a + b + c + d = 2,$

$3a + b = 0$, 所以 B, C, D 均正确. 若函数 $y = |f(x)|$ 的图象

关于直线 $x = 1$ 对称, 则有 $|f(1-x)| = |f(1+x)|$, 又函数

$f(x)$ 的图象是中心对称图形, 所以 $f(1+x) + f(1-x) =$

0, 即 $f(x)$ 的图象关于 $(1, 0)$ 对称, 与函数 $f(x)$ 的图象关于

点 $(1, 2)$ 对称矛盾, 所以 A 错误. 综上, 选 BCD.

法二(数形结合法): 因为三次函数的图象为中心对称图形,

所以要使 $|f(x) - 2|$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 则 $f(x)$ 的

图象的对称中心的横坐标也为 1, 且 $f(x) - 2$ 的图象关于

$(1, 0)$ 对称, 所以 $f(x)$ 的图象关于 $(1, 2)$ 对称, 且 $|f(x)|$ 的

图象关于直线 $x = 1$ 对称, 所以 A 错误, B 正确. 由 $f(x)$

的图象关于 $(1, 2)$ 对称可得 $\begin{cases} f(1) = 2, \\ -\frac{b}{3a} = 1, \end{cases}$ 所以 $a + b + c + d = 2,$

$3a + b = 0$, 故 C, D 正确. 故选 BCD.]

11. ACD [圆 C: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 即 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, 其圆心

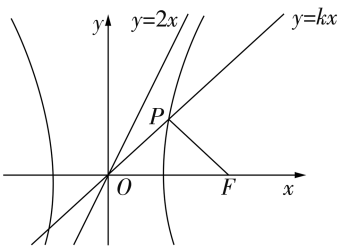
为 $C(1, 0)$, 半径 $r = 1$.

对于 A, 若 $b^2 - 2a = 1$, 则圆心 C 到直线 l 的距离 $d =$

$\frac{|a+1|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a+1|}{\sqrt{a^2+2a+1}} = \frac{|a+1|}{\sqrt{(a+1)^2}} = 1 = r$, 所以直线 l

与圆 C 相切, 故 A 正确;

对于 B, 当 $a = 0, b = -2$ 时, 满足 $a + b = -2$, 此时直线 l 的



方程为 $y = \frac{1}{2}$, 圆心 C 到直线 l 的距离为 $\frac{1}{2} < r$, 显然直线 l

与圆 C 相交, 故 B 错误;

对于 C, 当 $a = 1, b = -1$ 时, 直线 $l: x - y + 1 = 0$, 此时直线

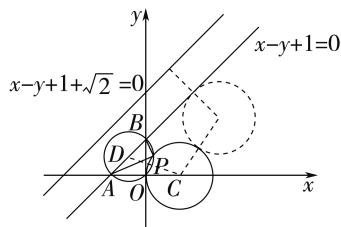
$x - y + 1 + \sqrt{2} = 0$ 与直线 l 平行, 且两平行线间的距离 $d_1 =$

$\frac{|1 + \sqrt{2} - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 1$, 如图, 结合题意可知, 动圆圆心到直线

$x - y + 1 + \sqrt{2} = 0$ 的距离与到 $C(1, 0)$ 的距离相等, 显然点

$C(1, 0)$ 不在直线 $x - y + 1 + \sqrt{2} = 0$ 上, 根据抛物线的定义

可知动圆圆心的轨迹是一条抛物线, 故 C 正确;



对于 D, 不妨令 $A(-1, 0), B(0, 1)$, 记 AB 的中点为

$D(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 又 $|AB| = \sqrt{2}$, 所以以 AB 为直径的圆的方程

为 $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$, 如图, 连接 CD, 则 $|CD| =$

$\sqrt{(-\frac{1}{2} - 1)^2 + (\frac{1}{2} - 0)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$, 所以圆 D 与

圆 C 相交, 所以圆 C 上存在点 P 满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$, 故 D 正

确. 故选 ACD.]

12. $2\sqrt{5}$ [$\because (4a + b) \cdot b = 4, \therefore 4a \cdot b + b^2 = 4$, 又 $|a| = 2$,

所以 $|2a + b| = \sqrt{(2a + b)^2} = \sqrt{4a^2 + 4a \cdot b + b^2} =$

$\sqrt{4 \times 2^2 + 4} = 2\sqrt{5}$.]

13. 0.015 [由题图中频率分布直方图可得 $10 \times (0.005 + a +$

$0.020 + 0.040 + 0.020) = 1$, 解得 $a = 0.015$.]

14. $\frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \frac{\sqrt{43}}{3}$ [令 $BC = a, AC = b, AB = c$, 由正弦定理及

$\sin A = 3\sin C$, 得 $a = 3c$, 由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 -$

$2ac \cos \angle ABC = a^2 + c^2 - ac = 7$, 所以 $c = 1, a = 3$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin \angle ABC = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

法一: 因为 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DC}$, 所以 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, 所以

$BD^2 = \overrightarrow{BD}^2 = (\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC})^2 = \frac{1}{9}|\overrightarrow{BA}|^2 + \frac{4}{9}|\overrightarrow{BA}| \cdot$

$|\overrightarrow{BC}| \cos \angle ABC + \frac{4}{9}|\overrightarrow{BC}|^2 = \frac{43}{9}$, 得 $BD = \frac{\sqrt{43}}{3}$.

法二: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{\sqrt{7}}{14}$. 因为 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DC}$, 所以

$AD = \frac{2}{3}AC = \frac{2\sqrt{7}}{3}$. 在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得 $BD^2 =$

$AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \times \cos A = \frac{43}{9}$, 所以 $BD = \frac{\sqrt{43}}{3}$.]

15. 解: (1) $\because \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} = 6$,

$\therefore \sin A = \frac{a}{6}, \sin B = \frac{b}{6}$,

$\therefore \sin A \cdot \sin B = \frac{a}{6} \cdot \frac{b}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

(2) $\because ab=9, \therefore a^2+b^2 \geq 2ab=18$, 当且仅当 $a=b=3$ 时等号成立,

$$\therefore \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \geq \frac{2ab-16}{18} = \frac{1}{9},$$

$$\text{又 } C \in (0, \pi), \therefore \frac{1}{9} \leq \cos C < 1,$$

$$\therefore 0 < 1 - \cos^2 C \leq \frac{80}{81}, \therefore 0 < \sin C \leq \frac{4\sqrt{5}}{9},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{9}{2} \sin C \leq 2\sqrt{5},$$

$\therefore \triangle ABC$ 面积的最大值为 $2\sqrt{5}$.

16. 解: (1) 证明: 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp BC$.

因为 $\angle ABC = 90^\circ$, 所以 $BC \perp AB$.

因为 $PA \cap AB = A$, $PA \subset$ 平面 PAB , $AB \subset$ 平面 PAB ,

所以 $BC \perp$ 平面 PAB .

又 $BC \subset$ 平面 PBC ,

所以平面 $PAB \perp$ 平面 PBC .

(2) 如图, 取 CD 的中点 E , 连接 AE .

因为 $\angle ABC = 90^\circ$, $AB \parallel CD$,

$AB = BC = 1, CD = 2$,

所以四边形 $ABCE$ 是矩形,

所以 $AB \perp AE, AE = BC = 1$.

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以

$PA \perp AB, PA \perp AE$,

所以直线 AB, AE, AP 两两垂直,

建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(1, 1, 0), D(-1, 1, 0)$, 所以

$\overrightarrow{BC} = (0, 1, 0)$.

连接 PE , 因为 G 为 $\triangle PCD$ 的重心, 所以点 G 在线段 PE 上, 且 $PE = 3EG$.

设 $P(0, 0, t) (t > 0)$, 则 $G(0, \frac{2}{3}, \frac{t}{3})$,

$$\overrightarrow{AG} = (0, \frac{2}{3}, \frac{t}{3}), \overrightarrow{DG} = (1, -\frac{1}{3}, \frac{t}{3}).$$

因为点 A 在平面 PCD 内的射影恰好是 $\triangle PCD$ 的重心 G ,

所以 $AG \perp$ 平面 PCD , 又 $DG \subset$ 平面 PCD , 所以 $AG \perp DG$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{AG} = 0, \text{ 所以 } 0 - \frac{2}{9} + \frac{t^2}{9} = 0,$$

得 $t = \sqrt{2}$, 所以 $P(0, 0, \sqrt{2}), \overrightarrow{DG} = (1, -\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$, 所以

$$\overrightarrow{PB} = (1, 0, -\sqrt{2}).$$

设 $m = (x, y, z)$ 是平面 PBC 的法向量,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot m = 0, \\ \overrightarrow{PB} \cdot m = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} y = 0, \\ x - \sqrt{2}z = 0, \end{cases}$$

令 $z = 1$, 得 $m = (\sqrt{2}, 0, 1)$ 为平面 PBC 的一个法向量.

设直线 DG 与平面 PBC 所成的角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle m, \overrightarrow{DG} \rangle| = \frac{|m \cdot \overrightarrow{DG}|}{|m| \cdot |\overrightarrow{DG}|} = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

即直线 DG 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

17. 解: (1) 2×2 列联表如下:

单位: 人

流感	请假		合计
	因发烧请假	非发烧请假	
发生前	10	20	30
发生后	30	10	40
合计	40	30	70

零假设为

H_0 : 流感发生与请假的同学中发烧的人数之间相互独立,

$$\text{因为 } \chi^2 = \frac{70 \times (10 \times 10 - 20 \times 30)^2}{30 \times 40 \times 30 \times 40} \approx 12.153 > 10.828,$$

所以依据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 我们推断 H_0 不成立, 即可以认为流感发生对请假的同学中发烧的人数有影响.

(2) 设 A 事件表示请假的同学为女生, B 事件表示需要输液治疗,

$$\begin{aligned} \text{则 } P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})} \\ &= \frac{0.18}{0.18 + 0.08} \\ &= \frac{9}{13}, \end{aligned}$$

所以这名同学是女生的概率为 $\frac{9}{13}$.

18. 解: (1) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = e^{x-1}, f(0) = e^{-1}, f'(x) =$

$$e^{x-1}, f'(0) = e^{-1} = \frac{1}{e},$$

故函数 $f(x)$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y -$

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{e}x,$$

$$\text{即 } x - ey + 1 = 0.$$

(2) 当 $x > 0$ 时, $e^{x-1} - a \geq \ln x$ 恒成立,

即 $e^{x-1} - \ln x \geq a$ 恒成立,

令 $t(x) = e^{x-1} - \ln x, x \in (0, +\infty)$,

$$\text{则 } t'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x},$$

$$\text{令 } w(x) = t'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty),$$

$$\text{则 } w'(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{故 } w(x) = t'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{又 } t'(1) = e^{1-1} - 1 = 0,$$

故当 $x \in (0, 1)$ 时, $t'(x) < 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $t'(x) > 0$,

故 $t(x) = e^{x-1} - \ln x$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $t(x)_{\min} = e^{1-1} - \ln 1 = 1$,

所以 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

19. 解: (1) 由题意得 $A(-a, 0), B(a, 0)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{9}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1, \\ \frac{\sqrt{2}}{3+a} + \frac{\sqrt{2}}{3-a} = \sqrt{2}, \end{cases} \therefore \begin{cases} a^2 = 3, \\ b^2 = 1, \end{cases}$$

$\therefore$ 双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

(2) 证明: 由(1)得 $A(-\sqrt{3}, 0), B(\sqrt{3}, 0)$, 易知直线 MN 的斜率不为 0, 故设直线 MN 的方程为 $x = ty + 3 (x \neq \pm\sqrt{3})$, $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $\overrightarrow{BN} = (x_2 - \sqrt{3}, y_2)$,

$$\text{由} \begin{cases} x = ty + 3, \\ \frac{x^2}{3} - y^2 = 1, \end{cases} \text{消去 } x \text{ 得 } (t^2 - 3)y^2 + 6ty + 6 = 0,$$

$$\Delta = 12t^2 + 72 > 0,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = -\frac{6t}{t^2 - 3}, y_1 y_2 = \frac{6}{t^2 - 3}.$$

$$\text{易知直线 } AM \text{ 的方程为 } y = \frac{y_1}{x_1 + \sqrt{3}}(x + \sqrt{3}),$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 则 } y = \frac{y_1}{x_1 + \sqrt{3}}(1 + \sqrt{3}), \therefore Q\left(1, \frac{(1 + \sqrt{3})y_1}{x_1 + \sqrt{3}}\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{BQ} = \left(1 - \sqrt{3}, \frac{(1 + \sqrt{3})y_1}{x_1 + \sqrt{3}}\right),$$

$$\therefore (x_2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{(1 + \sqrt{3})y_1}{x_1 + \sqrt{3}} - (1 - \sqrt{3})y_2 = \frac{1}{x_1 + \sqrt{3}}[(x_2 - \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{3})y_1 - (1 - \sqrt{3})(x_1 + \sqrt{3})y_2]$$

$$= \frac{1}{x_1 + \sqrt{3}}[(ty_2 + 3 - \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{3})y_1 - (1 - \sqrt{3})(ty_1 + 3 + \sqrt{3})y_2]$$

$$= \frac{1}{x_1 + \sqrt{3}}[(ty_2 + 3 - \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{3})y_1 + (\sqrt{3} - 1)(ty_1 + 3 + \sqrt{3})y_2]$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{x_1 + \sqrt{3}}(ty_1 y_2 + y_1 + y_2) = \frac{2\sqrt{3}}{x_1 + \sqrt{3}}\left(\frac{6t}{t^2 - 3} - \frac{6t}{t^2 - 3}\right) = 0,$$

$$\therefore \overrightarrow{BN} \parallel \overrightarrow{BQ}, \therefore B, N, Q \text{ 三点共线}.$$

高考仿真卷(四)

1. B [法一: 由 $B = \{x | 1 < x < 4\}$, 得 $\complement_U B = \{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 4\}$, 而 $A = \{x | 0 \leq x < 3\}$,

所以 $A \cap \complement_U B = [0, 1]$, 故选 B.

法二(排除法): 由题知 $1 \in A, 1 \notin B$, 所以 $1 \in A \cap \complement_U B$, 排除选项 A, C, 又 $-1 \notin A$, 所以 $-1 \notin A \cap \complement_U B$, 排除 D, 故选 B.]

2. A [因为 $a \cdot b = \lambda a^2 = 1$, 所以 $4\lambda = 1$, 得 $\lambda = \frac{1}{4}$.

故选 A.]

3. A [根据题意, 函数 $f(x) = 2x - 3\ln x + 2024$, 其定义域为 $(0, +\infty)$,

其导数 $f'(x) = 2 - \frac{3}{x} = \frac{2x - 3}{x}$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $0 < x < \frac{3}{2}$, 所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, \frac{3}{2})$.

故选 A.]

$$4. A \left[\frac{\cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ} - 2\cos 10^\circ = \frac{\cos 10^\circ - 4\sin 10^\circ \cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ} \right]$$

$$= \frac{\cos 10^\circ - 2\sin 20^\circ}{2\sin 10^\circ}$$

$$= \frac{\cos 10^\circ - 2\sin(30^\circ - 10^\circ)}{2\sin 10^\circ}$$

$$= \frac{\cos 10^\circ - (\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ)}{2\sin 10^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选 A.]

5. D [4 人中, 至少有 2 人愿意种植 A, 且至少有 1 人愿意种植 B 的可能性共有 3 种:

①有 2 人愿意种植 A, 愿意种植 B, C 的各 1 人,

②有 2 人愿意种植 A, 有 2 人愿意种植 B,

③有 3 人愿意种植 A, 有 1 人愿意种植 B,

故所求概率 $P = C_4^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times C_2^1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + C_4^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times$

$C_2^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_4^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{2} = \frac{25}{54}$. 故选 D.]

6. C [以碗体的最低点为原点, 建立

平面直角坐标系, 如图所示.

设碗体的抛物线方程为 $x^2 = 2py$

($p > 0$), 将点 $(5, 6.25)$ 代入,

得 $5^2 = 2p \times 6.25$, 解得 $p = 2$, 则

$x^2 = 4y$,

设盖上碗盖后, 碗盖内部最高点到碗底的垂直距离为 h ,

则两抛物线在第一象限的交点为 $(4, h - 3)$, 代入到 $x^2 = 4y$

中, 得 $4^2 = 4(h - 3)$, 解得 $h = 7$. 故选 C.]

7. D [设圆台上底面圆的半径为 r , 下底面圆的半径为 R , 母线长为 l , 高为 h ,

$$\text{则} \begin{cases} 2\pi r = 6 \times \frac{2\pi}{3}, \\ 2\pi R = 12 \times \frac{2\pi}{3}, \end{cases} \text{解得 } r = 2, R = 4, \text{ 而圆台的母线长 } l =$$

$AD = AB - BD = 6$, 因此圆台的高 $h = \sqrt{l^2 - (R - r)^2} =$

$4\sqrt{2}$, 所以圆台的体积 $V = \frac{1}{3}(\pi r^2 + \pi R^2 + \pi rR)h = \frac{1}{3} \times$

$(4\pi + 16\pi + 8\pi) \times 4\sqrt{2} = \frac{112\sqrt{2}}{3}\pi$. 故选 D.]

8. C [$yf(x) - xf(y) = xy(x - y)$, 当 $xy \neq 0$ 时, 两边同时除以 xy 得 $\frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y} = x - y$, 移项得 $\frac{f(x)}{x} - x = \frac{f(y)}{y} - y$,

对于任意 $xy \neq 0$ 恒成立. 设 $\frac{f(x)}{x} - x = t$, 则 $f(x) = x^2 + tx$,

$x \neq 0$, 当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$, 满足 $yf(x) - xf(y) = xy(x - y)$, 故 $f(x) = x^2 + tx$. $f(1) = 1 + t$, 由于 t 未知, 故 A 不一定成立; 当 $t = 0$ 时, $f(x) = x^2$ 是偶函数, 当 $t \neq 0$ 时, $f(x)$ 不是偶函数, 所以 B 不一定成立; 因为 $f(x)$ 为开口向上的二次函数, 且图象关于直线 $x = -\frac{t}{2}$ 对称, 故 $f(x)$ 在 $x = -\frac{t}{2}$ 处取得最小值, 但无法判断 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的单调性, 故 C 一定成立, D 不一定成立. 故选 C.]

9. CD [对于 A, 由频率分布直方图可知, 分数小于 60 分的频率为 $1 - (0.2 + 0.3 + 0.2) = 0.3$, 分数小于 50 分的频率为 $1 - (0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.2) = 0.2$,

所以分数的 25% 分位数在区间 $[50, 60)$ 内, 故 A 错误;

对于 B, 由频率分布直方图可知, 分数大于 80 分的频率为 0.2, 分数大于 70 分的频率为 0.5,

所以优秀分数线的估计值在区间 $[70, 80)$ 内, 设其为 m ,

则 $(80 - m) \times 0.03 + 0.2 = 0.25$,

解得 $m \approx 78.3$, 故 B 错误;

对于 C, 因为分数大于 70 分的频率为 0.5, 所以本次测试分数中位数的估计值为 70 分, 故 C 正确;

对于 D, 因为频率分布直方图左拖尾, 所以平均数小于中位数, 故 D 正确.

故选 CD.]

10. AD [∵ $a=1$, $\sin A - b\sin B = (c+b)\sin C$, ∴ $a\sin A - b\sin B = (c+b)\sin C$, 由正弦定理可得, $a^2 - b^2 = (c+b)c$, 即 $a^2 = b^2 + c^2 + bc$, 又 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, ∴ $\cos A = -\frac{1}{2}$, 又 $A \in (0, \pi)$, ∴ $A = \frac{2\pi}{3}$, ∴ $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, A 正确; 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = 2R$, 得 $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 C 错误; ∵ $a^2 = 1 = b^2 + c^2 + bc \geq 2bc + bc = 3bc$, ∴ $bc \leq \frac{1}{3}$, 当且仅当 $b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立,

∴ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc \leq \frac{\sqrt{3}}{12}$, 故 B 错误; 设 BC 边上的高为 h , 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}h \leq \frac{\sqrt{3}}{12}$,

∴ $h \leq \frac{\sqrt{3}}{6}$, 故 D 正确, 故选 AD.]

11. ACD [因为方程 $x^2 + y^2 - xy = 6$ 表示的曲线关于直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 对称, 所以 $\theta = \frac{\pi}{4}$, 则直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 是椭圆 C_2 的对称轴, 即椭圆 C_2 的长轴和短轴分别在这两条直线上.

由 $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 6, \\ y = x, \end{cases}$

得 $\begin{cases} x = \sqrt{6}, \\ y = \sqrt{6} \end{cases}$, 或 $\begin{cases} x = -\sqrt{6}, \\ y = -\sqrt{6} \end{cases}$,

即曲线 $x^2 + y^2 - xy = 6$ 与直线 $y=x$ 的交点为 $A(\sqrt{6}, \sqrt{6})$, $B(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$,

则 $|AB| = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{6})^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{6})^2} = 4\sqrt{3}$;

同理可得曲线 $x^2 + y^2 - xy = 6$ 与直线 $y=-x$ 的交点为 $C(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $D(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$,

则 $|CD| = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2} - \sqrt{2})^2} = 4$, 所以 $2a = 4\sqrt{3}$, $2b = 4$, 即 $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2$, 所以 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{2}$, 所以 $e =$

$\frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 因为 $|AB| > |CD|$, 所以椭圆 C_2 的焦点在

直线 $y=x$ 上, 设焦点 $F(x, x)$, 则 $c = |OF| = \sqrt{2}|x| = 2\sqrt{2}$, 所以 $x=2$ 或 $x=-2$, 则椭圆 C_2 的焦点为 $(2, 2)$ 或 $(-2, -2)$.

故选 ACD.]

12. $\sqrt{2}$ [由 $z+2=iz$ 得 $(1-i)z=-2$,

所以 $z = \frac{-2}{1-i}$,

则 $|z| = \frac{|-2|}{|1-i|} = \frac{2}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$.]

13. 24 [法一: 将 AB 捆绑, 则除 C 以外其他四人的排序有 $A_3^3 \cdot A_2^2 = 12$ (种), 又 C 不排在两边, 所以 C 可选的位置有 $A_2^1 = 2$ (种), 所以共 $12 \times 2 = 24$ (种) 排法.

法二: 将 AB 捆绑, 若 C 的位置任意, 则五人的排序有 $A_4^4 \cdot A_2^2 = 48$ (种),

其中 C 排在两边的情况有 $A_2^1 \cdot A_3^3 \cdot A_2^2 = 24$ (种),

所以 C 不排在两边的情况有 $48 - 24 = 24$ (种).]

14. $[15, 19]$ [因为 $x+y+z=4$, $2x-y+z=5$,

所以 $z = \frac{9-3x}{2}$, $y = \frac{x-1}{2}$,

因为 $x, y, z \geq 0$, 所以 $1 \leq x \leq 3$,

所以 $M = 4x + 3y + 5z = 21 - 2x \in [15, 19]$.]

15. 解: (1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $a_n = a_1 q^{n-1}$,

又 $a_n > 0$, 则 $q > 0$.

依题意可得 $\begin{cases} a_3 = 4, \\ a_4 + a_5 = 24, \end{cases}$

整理得 $q^2 + q - 6 = 0$,

解得 $q=2$ 或 $q=-3$ (舍去),

所以 $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = 1$, 所以 $a_n = 2^{n-1}$.

(2) 由(1)得 $a_n + \log_2 a_n = 2^{n-1} + n - 1$,

$T_n = (2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) + [0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1)] =$

$2^n - 1 + \frac{n(n-1)}{2}$,

显然当 $n \geq 1$ 时, T_n 随着 n 的增大而增大,

又 $T_{10} = 2^{10} - 1 + 45 = 1\,068 < 2\,024$,

$T_{11} = 2^{11} - 1 + 55 = 2\,102 > 2\,024$,

所以满足 $T_n < 2\,024$ 的最大整数 n 为 10.

16. 解: (1) 因为 $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} = 0$, 所以 $\overrightarrow{AF_1} \perp \overrightarrow{AF_2}$, 即 $AF_1 \perp AF_2$,

所以 $\triangle AF_1 F_2$ 是等腰直角三角形,

所以 $|F_1 F_2| = \sqrt{2}|AF_1|$, 即 $2c = \sqrt{2}a$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 由(1)设直线 AF_1 的方程为 $y=x+b$, ①

由 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 得 $a^2 = 2c^2 = 2b^2$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$, ②

联立①②, 化简得 $3x^2 + 4bx = 0$,

解得 $x=0$ 或 $x = -\frac{4b}{3}$,

所以 $|AB| = \sqrt{2} \times \frac{4b}{3} = \frac{8}{3}$,

所以 $b = \sqrt{2}$, $a = 2$,

所以 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $4a = 8$.

17. 解: (1) 零假设为

H_0 : 该校学生选择乒乓球还是羽毛球与性别无关联.

经计算得 $\chi^2 = \frac{150 \times (50 \times 40 - 25 \times 35)^2}{75 \times 75 \times 85 \times 65}$

$\approx 6.109 > 3.841 = x_{0.05}$,

依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 推断 H_0 不成立, 即认为该校学生选择乒乓球还是羽毛球与性别有关联, 以此推断犯错误的概率不大于 0.05.

(2) 按分层随机抽样, 从女生乒乓球组中抽取 7 人, 女生羽毛球组中抽取 8 人,

X 的所有可能取值为 0, 1, 2,

则 $P(X=0) = \frac{C_8^2}{C_{15}^2} = \frac{4}{15}$,

$P(X=1) = \frac{C_7^1 C_8^1}{C_{15}^2} = \frac{8}{15}$,

$P(X=2) = \frac{C_7^2}{C_{15}^2} = \frac{1}{5}$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{5}$

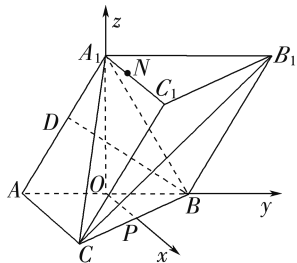
$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{4}{15} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{5} = \frac{14}{15}.$$

18. 解: (1) 证明: 取棱 A_1A 的中点 D , 连接 BD ,
 因为 $AB = A_1B$, 所以 $BD \perp AA_1$,
 因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 所以 $AA_1 \parallel BB_1$,
 所以 $BD \perp BB_1$, 所以 $BD \perp BB_1$,
 因为 $AB = 2$, 所以 $AD = 1$, 所以 $AA_1 = 2$.
 因为 $AC = 2$, $A_1C = 2\sqrt{2}$,
 所以 $AC^2 + AA_1^2 = A_1C^2$, 所以 $AC \perp AA_1$.
 同理 $AC \perp AB$.
 因为 $AA_1 \cap AB = A$, 且 AA_1 ,
 $AB \subset$ 平面 A_1ABB_1 ,
 所以 $AC \perp$ 平面 A_1ABB_1 .
 又因为 $AC \subset$ 平面 ABC ,
 所以平面 $A_1ABB_1 \perp$ 平面 ABC .

- (2) 取 AB 的中点 O , 连接 A_1O ,
 取 BC 的中点 P , 连接 OP , 则 $OP \parallel AC$,
 由 (1) 知 $AC \perp$ 平面 A_1ABB_1 ,
 所以 $OP \perp$ 平面 A_1ABB_1 .
 因为 $A_1O \subset$ 平面 A_1ABB_1 ,
 $AB \subset$ 平面 A_1ABB_1 ,
 所以 $OP \perp A_1O$, $OP \perp AB$.
 因为 $AB = A_1A = A_1B$, 则 $A_1O \perp AB$.

以 O 为坐标原点, OP, OB ,
 OA_1 所在的直线分别为 x
 轴, y 轴, z 轴, 建立如图所
 示的空间直角坐标系

$Oxyz$,
 则 $A(0, -1, 0)$, $A_1(0, 0,$
 $\sqrt{3})$, $B_1(0, 2, \sqrt{3})$, $C(2,$
 $-1, 0)$,



设 $N(a, 0, \sqrt{3}) (0 \leq a \leq 2)$,

则 $\overrightarrow{A_1B_1} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{A_1C} = (2, -1, -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AN} = (a, 1,$
 $\sqrt{3})$,

设平面 A_1B_1C 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2y = 0, \\ 2x - y - \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$$

取 $x = \sqrt{3}$, 则 $y = 0, z = 2$,

则 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 0, 2)$ 为平面 A_1B_1C 的一个法向量.

设直线 AN 与平面 A_1B_1C 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AN} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AN}|}{|\mathbf{n}| \cdot |\overrightarrow{AN}|}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(a+2)}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{a^2+4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{\frac{(a+2)^2}{a^2+4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \sqrt{\frac{a^2+4a+4}{a^2+4}},$$

$$\text{若 } a = 0, \text{ 则 } \sin \theta = \frac{\sqrt{21}}{7};$$

$$\text{若 } a \neq 0, \text{ 则 } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{a + \frac{4}{a}}} \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \times \sqrt{1 + \frac{4}{4}} = \frac{\sqrt{42}}{7}.$$

当且仅当 $a = \frac{4}{a}$, 即 $a = 2$ 时, 等号成立,

所以直线 AN 与平面 A_1B_1C 所成角的正弦值的最大值
 为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$.

19. 解: (1) 由题意可得 $f'(x) = \ln(x-1) + \frac{x}{x-1} = \ln(x-1) +$

$$\frac{1}{x-1} + 1 (x > 1), \text{ 所以 } f'(2) = 2.$$

又 $f(2) = 0$, 所以切点为 $(2, 0)$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 2$ 处的切线方程为 $y = 2x - 4$.

$$(2) g(x) = f'(x) = \ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + 1 (x > 1),$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x-2}{(x-1)^2},$$

当 x 变化时, $g'(x)$ 和 $g(x)$ 的变化如表:

x	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

当 $x = 2$ 时, $g(x)_{\min} = f'(x)_{\min} = 2$.

(3) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1, +\infty)$,

当 $a \leq 1$ 时, $x - a > 0$,

$$\text{则 } \frac{f(x)}{x-a} > 2, \text{ 即 } f(x) > 2(x-a),$$

即 $-2a < f(x) - 2x$,

由 (2) 得 $f'(x) \geq 2$,

令 $m(x) = f(x) - 2x$,

则 $m'(x) = f'(x) - 2 \geq 0 (x > 1)$,

所以 $m(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增 (*),

又当 $x \rightarrow 1$ 时, $m(x) \rightarrow -\infty$,

因为 $a \leq 1$, 所以 $-2a \geq -2$,

此时 $-2a < f(x) - 2x$ 不恒成立, 故 $a \leq 1$ 不符合题意;

当 $a > 1$ 时, 若 $x > a$, 则 $x - a > 0$,

$$\text{则 } \frac{f(x)}{x-a} > 2, \text{ 即 } f(x) > 2(x-a), \text{ 即 } -2a < f(x) - 2x,$$

由 (*) 知函数 $m(x) = f(x) - 2x$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $m(x) > m(a) = a \ln(a-1) - 2a (x > a)$,

所以 $-2a \leq a \ln(a-1) - 2a$, 解得 $a \geq 2$, ①

$$\text{若 } 1 < x < a, \text{ 则 } \frac{f(x)}{x-a} > 2, \text{ 即 } f(x) < 2(x-a),$$

即 $-2a > f(x) - 2x$,

由 (*) 知函数 $m(x) = f(x) - 2x$ 在 $(1, a)$ 上单调递增,

所以 $m(x) < m(a) = a \ln(a-1) - 2a$,

所以 $-2a \geq a \ln(a-1) - 2a$, 解得 $a \leq 2$, ②

由 ①② 得 $a = 2$,

综上所述, $a = 2$.

高考仿真卷(五)

1. C [因为 $A = \{x \in \mathbf{N} | -1 \leq x \leq 2\} = \{0, 1, 2\}$,

又 $B = \{-2, -1, 0, 1\}$, 所以 $A \cap B = \{0, 1\}$. 故选 C.]

2. B [因为 $z = \frac{2+i}{i} = \frac{(2+i) \times (-i)}{(-i) \times i} = 1-2i$, 所以 $\bar{z} = 1+2i$,

所以 $z - \bar{z} = (1-2i) - (1+2i) = -4i$. 故选 B.]

3. A [因为 $a \cdot b = 2\cos 75^\circ \cos 15^\circ - 2\sin 75^\circ \sin 15^\circ = 2\cos(15^\circ + 75^\circ) = 0$, $|a| = 2$, $|b| = 1$, 所以 $(2a+b) \cdot (a-\lambda b) = 2a^2 - \lambda b^2 = 8 - \lambda = 0$, 所以 $\lambda = 8$. 故选 A.]

4. A [设圆柱的高为 h ,

则该几何体的表面积 $S = 4\pi \times 2^2 + 2\pi \times 2 \times h = 20\pi$,

则 $h = 1$,

所以该几何体的体积 $V = \frac{4}{3}\pi \times 2^3 + \pi \times 2^2 \times 1 = \frac{44}{3}\pi$.

故选 A.]

5. D [因为函数 $f(x) = \begin{cases} (3-a)x-a & (x < 1) \\ \log_a x & (x \geq 1) \end{cases}$, 在 $\mathbf{R}$ 上单调

递增,

则 $f(x) = (3-a)x-a$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 所以 $3-a > 0$, 即 $a < 3$, 又 $f(x) = \log_a x$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 则有

$$a > 1, \text{ 所以 } \begin{cases} a < 3, \\ a > 1, \\ (3-a) \cdot 1 - a \leq \log_a 1 = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a < 3, \\ a > 1, \\ a \geq \frac{3}{2}, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{3}{2} \leq a < 3.$$

故实数 a 的取值范围为 $[\frac{3}{2}, 3)$. 故选 D.]

6. A [充分性: 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 设其公比为 q ,

$$\text{则 } \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} = q^2,$$

所以 $\{a_n \cdot a_{n+1}\}$ 为等比数列, 公比为 q^2 , 满足充分性.

必要性: 若 $\{a_n \cdot a_{n+1}\}$ 为等比数列, 公比为 -2 , 则

$$\frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_{n-1} \cdot a_n} = -2, \text{ 即 } \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} = -2, \text{ 假设 } \{a_n\} \text{ 为等比数列, 此时}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} = q^2 = -2 \text{ 无解, 故不满足必要性. 所以甲是乙的充分不}$$

必要条件.

故选 A.]

7. D [由 $y = 0.2^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减可知, $0.2^{0.5} < 0.2^{0.2}$.

由 $y = x^{0.2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增可知, $0.2^{0.2} < 0.5^{0.2}$, 所以 $0.2^{0.5} < 0.5^{0.2}$, 即 $a < b$, 且 $b < 1$.

由 $y = \log_{0.5} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减可知, $c = \log_{0.5} 0.2 > \log_{0.5} 0.5 = 1$, 所以 $c > b > a$.

故选 D.]

8. C [设两切点为 A, B , 则 $|PA| = |PB|$, $\angle APB = 60^\circ$, 所以 $|PC| = 4$, 因此只要直线上存在点 P , 使得 $|PC| = 4$ 即可满足题意. 圆心 $C(-1, 1)$, 所以圆心到直线的距离 $d = \frac{|-k-1+5|}{\sqrt{k^2+1}} \leq 4$, 解得 $k \geq 0$ 或 $k \leq -\frac{8}{15}$. 故选 C.]

9. ACD [对于 A, 由表中数据可得, 该市一天空气中 PM2.5 浓度不超过 $75 \mu\text{g}/\text{m}^3$, 且 SO_2 浓度不超过 $150 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 的概率估计值是 $\frac{64}{100} = 0.64$, 故 A 正确;

$$\text{对于 B, } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$= \frac{1\,000 \times (640 \times 100 - 160 \times 100)^2}{800 \times 200 \times 740 \times 260} \approx 74.844 \neq 7.484\,4, \text{ 故 B}$$

错误;

对于 CD, 因为 $7.484\,4 > 6.635$,

所以在犯错的概率不超过 0.01 的条件下, 即依据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO_2 浓度有关, 故 CD 正确.

故选 ACD.]

10. ABD [把点 $B(1, 2)$ 代入抛物线 $y^2 = 2px$, 得 $p = 2$, 所以抛物线的准线方程为 $x = -1$, 故 A 正确; 因为 $A(x_1, y_1)$, $B(1, 2)$, $C(x_2, y_2)$, $F(1, 0)$, 所以 $\overrightarrow{FA} = (x_1 - 1, y_1)$, $\overrightarrow{FB} = (0, 2)$, $\overrightarrow{FC} = (x_2 - 1, y_2)$, 又由 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \mathbf{0}$, 得 $x_1 + x_2 = 2$, 所以 $|\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FC}| = x_1 + 1 + x_2 + 1 = 4 = 2|\overrightarrow{FB}|$, 即 $|\overrightarrow{FA}|, |\overrightarrow{FB}|, |\overrightarrow{FC}|$ 成等差数列, 故 B 正确; 因为 A, F, C 三点共线, 所以直线斜率 $k_{AF} = k_{CF}$, 即 $\frac{y_1}{x_1 - 1} = \frac{y_2}{x_2 - 1}$,

$$\text{所以 } \frac{y_1}{\frac{1}{4}y_1^2 - 1} = \frac{y_2}{\frac{1}{4}y_2^2 - 1},$$

化简得 $y_1 y_2 = -4$, 故 C 不正确; 设 AC 的中点为 $M(x_0, y_0)$, 因为 $|AF| + |CF| \geq |AC|$, $|AF| + |CF| = x_1 + 1 + x_2 + 1 = 2x_0 + 2$, 所以 $2x_0 + 2 \geq 6$, 解得 $x_0 \geq 2$, 即 AC 的中点到 y 轴距离的最小值为 2, 故 D 正确. 故选 ABD.]

11. ABC [因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(-x) = -f(x)$,

所以 $f(x)$ 为奇函数, 所以函数图象关于原点对称,

又因为 $f(x+2) = f(2-x)$,

所以 $f(x)$ 的图象关于 $x = 2$ 对称,

所以 $f(x+4) = f(-x)$,

所以 $f(x+4) = -f(x)$,

故 $f(x+8) = -f(x+4) = f(x)$,

所以 $f(x)$ 是周期为 8 的周期函数, 故 A 正确;

因为 $f(-x) = -f(x)$,

所以 $[f(-x)]' = [-f(x)]' = -f'(x)$,

即 $-f'(-x) = -f'(x)$, 所以 $f'(-x) = f'(x)$,

即 $f'(x)$ 为偶函数, 故 B 正确;

因为 $f(x+2) = f(2-x)$,

所以 $f'(x+2) = -f'(2-x)$, 即 $f'(x+2) + f'(2-x) = 0$,

所以 $f'(x)$ 的图象关于 $(2, 0)$ 中心对称, 故 C 正确;

函数 $f(2-x)$ 与函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 故 D 错误.

故选 ABC.]

12. 0.12 [随机变量 X 服从正态分布 $N(1.5, \sigma^2)$, 且 $P(1.5 < X \leq 3) = 0.38$,

则 $P(0 \leq X < 1.5) = P(1.5 < X \leq 3) = 0.38$,

所以 $P(X < 0) = P(X < 1.5) - P(0 \leq X < 1.5) = 0.5 - 0.38 = 0.12$.]

13. $[\frac{1}{2}, 1) \cup [\frac{11}{6}, \frac{5}{2})$ [若 $a > 1$, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = a^x - 2 \in (-2, -1)$, 此时没有零点,

因此 $f(x) = 2\sin(ax + \frac{\pi}{3}) - 1$ 在 $[0, \pi]$ 上有且仅有 2 个零

点, 由 $x \in [0, \pi]$, 得 $ax + \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{3}, a\pi + \frac{\pi}{3}]$, 于是 $\frac{13\pi}{6} \leq$

$$a\pi + \frac{\pi}{3} < \frac{17\pi}{6}, \text{ 解得 } \frac{11}{6} \leq a < \frac{5}{2};$$

若 $0 < a < 1$, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = a^x - 2 \in (-1, +\infty)$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上恰有一个零点,

因此 $f(x) = 2\sin\left(ax + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ 在 $[0, \pi]$ 上有且仅有一个零点, 于是 $\frac{5\pi}{6} \leq a\pi + \frac{\pi}{3} < \frac{13\pi}{6}$, 解得 $\frac{1}{2} \leq a < 1$.

综上, a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left[\frac{11}{6}, \frac{5}{2}\right)$.

14. $\frac{\pi}{6}$ [根据正弦型函数图象的对称性可知, 阴影部分是一个

长为 2, 宽为 θ 的矩形,

所以 $2\theta = \frac{\pi}{2}$, 即 $\theta = \frac{\pi}{4}$,

所以 $\frac{1}{4}T = \theta = \frac{\pi}{4}$, 即 $T = \pi$,

所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, $f(x) = \sin(2x + \varphi)$,

将点 $\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$ 代入 $f(x)$ 的解析中, 有 $1 = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right)$,

则 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

15. 解: (1) 对于③: 因为 $\frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = \frac{a+c}{b-c}$,

在 $\triangle ABC$ 中由正弦定理得 $\frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b-c}$, 即 $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = -\frac{1}{2}$,

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{2\pi}{3}$;

对于④: 因为 $\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right) - \sin B \sin C = \frac{1}{4}$,

所以 $\frac{1 + \cos(B-C)}{2} - \sin B \sin C = \frac{1}{4}$, 所以 $\cos(B-C) - 2\sin B \sin C = -\frac{1}{2}$, 即 $\cos(B+C) = -\frac{1}{2}$,

又 $A+B+C = \pi, A, B, C \in (0, \pi)$, 则 $A = \frac{\pi}{3}$.

故③, ④不能同时存在, 则满足有解三角形的序号组合为

①②③, ①②④.

(2) 选①②③: 当 $a = \sqrt{3}, b = 2, B = \frac{2\pi}{3}$ 时,

由余弦定理得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, 即 $-\frac{1}{2} = \frac{3 + c^2 - 4}{2\sqrt{3}c}$,

整理得 $c^2 + \sqrt{3}c - 1 = 0$ 且 $c > 0$, 则 $c = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{3(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{8}$.

选①②④: 当 $a = \sqrt{3}, b = 2, A = \frac{\pi}{3}$ 时,

由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 即 $\frac{1}{2} = \frac{4 + c^2 - 3}{4c}$,

整理得 $c^2 - 2c + 1 = 0$, 则 $c = 1$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

16. 解: (1) 由题意得 $PO \perp$ 平面 ABC , 分别取 AC, BC 的中点 M, N , 连接 PM, OM, PN, ON ,

则在圆 O 中, $OM \perp AC$,

因为 $PA = PC, M$ 是 AC 的中点, 所以 $AC \perp PM$,

所以 $\angle PMO = \alpha$, 同理 $\angle PNO = \beta$,

于是 $\frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\tan^2 \beta} = \left(\frac{OM}{OP}\right)^2 + \left(\frac{ON}{OP}\right)^2 = \left(\frac{OC}{OP}\right)^2 = \frac{OC^2}{AP^2 - OA^2} = \frac{1}{2}$.

(2) 因为 $\tan \beta = \sqrt{3} \tan \alpha$, 即 $\frac{OP}{ON} = \sqrt{3} \times \frac{OP}{OM}$,

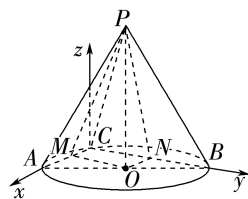
所以 $OM = \sqrt{3}ON$,

所以 $BC = \sqrt{3}AC$, 又 $BC^2 + AC^2 = AB^2 = 16$,

解得 $AC = 2, BC = 2\sqrt{3}$,

在圆 O 中, $CA \perp CB$, 以点 C 为坐标原点, CA 所在直线为 x 轴, CB 所在直线为 y 轴,

过 C 且垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴建立如图空间直角坐标系,



则 $C(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(0, 2\sqrt{3}, 0)$,

又因为 $PO \perp$ 平面 ABC ,

所以 $OP \parallel z$ 轴, 从而 $P(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{2})$,

则 $\overrightarrow{CA} = (2, 0, 0), \overrightarrow{CB} = (0, 2\sqrt{3}, 0), \overrightarrow{CP} = (1, \sqrt{3}, 2\sqrt{2})$,

设平面 PAC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CA} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CP} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x = 0, \\ x + \sqrt{3}y + 2\sqrt{2}z = 0, \end{cases}$

取 $y = 2\sqrt{2}$, 则 $x = 0, z = -\sqrt{3}$,

所以平面 PAC 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (0, 2\sqrt{2}, -\sqrt{3})$,

同理平面 PBC 的一个法向量 $\mathbf{n} = (-2\sqrt{2}, 0, 1)$,

所以 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{11} \times 3} = -\frac{\sqrt{33}}{33}$.

又二面角 $A-PC-B$ 为钝二面角,

所以二面角 $A-PC-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{33}}{33}$.

17. 解: (1) 由题意可知, $2c = 2\sqrt{3}$, 即 $c = \sqrt{3}$, 所以 $a^2 - b^2 = 3$, 又

点 $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ 在椭圆 C 上, 所以 $\frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1$,

由 $\begin{cases} \frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1, \\ a^2 - b^2 = 3, \end{cases}$ 解得 $a = 2, b = 1$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 证明: 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} y = k(x-1), \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(1 + 4k^2)x^2 -$

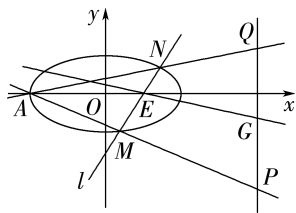
$8k^2x + 4k^2 - 4 = 0$,

$\Delta = 64k^4 - 16(k^2 - 1)(1 + 4k^2) = 48k^2 + 16 > 0$,

所以 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{1 + 4k^2}, x_1x_2 = \frac{4k^2 - 4}{1 + 4k^2}$,

又 $A(-2, 0)$, 所以直线 AM 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$,

其与直线 $x=4$ 的交点为 $P\left(4, \frac{6y_1}{x_1+2}\right)$,



同理 $Q\left(4, \frac{6y_2}{x_2+2}\right)$,

所以 PQ 的中点为 $G\left(4, \frac{3y_1}{x_1+2} + \frac{3y_2}{x_2+2}\right)$,

$$\begin{aligned} & \text{又 } E(1,0), \text{ 所以 } k' = \frac{\frac{3y_1}{x_1+2} + \frac{3y_2}{x_2+2}}{4-1} \\ & = \frac{k(x_1-1)(x_2+2) + k(x_2-1)(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)} \end{aligned}$$

$$= k \cdot \frac{2x_1x_2 + (x_1+x_2) - 4}{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4}$$

$$= k \cdot \frac{\frac{8k^2-8}{1+4k^2} + \frac{8k^2}{1+4k^2} - 4}{\frac{4k^2-4}{1+4k^2} + \frac{16k^2}{1+4k^2} + 4}$$

$$= k \cdot \frac{8k^2-8+8k^2-4(1+4k^2)}{4k^2-4+16k^2+4(1+4k^2)}$$

$$= k \cdot \frac{-12}{36k^2}$$

$$= -\frac{1}{3k},$$

所以 $kk' = -\frac{1}{3}$ 为定值.

18. 解: (1) 在前 3 个回合中甲队恰好获得 2 分对应的胜负情况如下: 胜胜负, 胜负胜, 负胜胜, 共 3 种情况,

$$\begin{aligned} & \text{对应的概率分别为 } P_1 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}, P_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9}, \\ & P_3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{所以甲队在前 3 个回合中恰好获得 2 分的概率 } P = \frac{4}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{10}{27}. \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 根据全概率公式得 } P_{i+1} = \frac{2}{3}P_i + \frac{1}{2}(1-P_i) = \frac{1}{6}P_i + \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } P_{i+1} - \frac{3}{5} = \frac{1}{6}\left(P_i - \frac{3}{5}\right),$$

易知 $P_1 = 0$, 所以 $\left\{P_i - \frac{3}{5}\right\}$ 是以 $-\frac{3}{5}$ 为首项, $\frac{1}{6}$ 为公比的

等比数列, 所以 $P_i = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{1}{6^{i-1}}$, 故 $P_{15} = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{1}{6^{14}}$,

因为 $P_{15} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10} - \frac{3}{5} \times \frac{1}{6^{14}} = \frac{6^{14}-6}{10 \times 6^{14}} > 0$, 所以 $P_{15} > \frac{1}{2}$,

而在每一个回合中, 甲、乙两队开球的概率之和为 1, 从而可得在此回合中甲队开球的概率大于乙队开球的概率.

19. 解: (1) 数列 1, 4, 7 的伴随数列为 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3. (后面加 3 算对)

(2) 由 $a_n = 3^{n-1} \leq m$, 得 $n \leq 1 + \log_3 m (m \in \mathbf{N}^*)$,

所以当 $1 \leq m \leq 2, m \in \mathbf{N}^*$ 时, $b_1 = b_2 = 1$,

当 $3 \leq m \leq 8, m \in \mathbf{N}^*$ 时, $b_3 = b_4 = \cdots = b_8 = 2$,

当 $9 \leq m \leq 20, m \in \mathbf{N}^*$ 时, $b_9 = b_{10} = \cdots = b_{20} = 3$,

所以 $b_1 + b_2 + \cdots + b_{20} = 1 \times 2 + 2 \times 6 + 3 \times 12 = 50$.

(3) 因为 $a_1 = S_1 = 1 + c = 1$, 所以 $c = 0$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 1$,

所以 $a_n = 2n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$,

由 $a_n = 2n - 1 \leq m$ 得, $n \leq \frac{m+1}{2} (m \in \mathbf{N}^*)$,

因为使得 $a_n \leq m$ 成立的 n 的最大值为 b_m ,

所以 $b_1 = b_2 = 1, b_3 = b_4 = 2, \cdots, b_{2t-1} = b_{2t} = t (t \in \mathbf{N}^*)$,

当 $m = 2t - 1 (t \in \mathbf{N}^*)$ 时,

$$T_m = 2 \cdot \frac{1+(t-1)}{2} \cdot (t-1) + t = t^2 = \frac{1}{4}(m+1)^2,$$

当 $m = 2t (t \in \mathbf{N}^*)$ 时,

$$T_m = 2 \cdot \frac{1+t}{2} \cdot t = t^2 + t = \frac{1}{4}m(m+2),$$

$$\text{所以 } T_m = \begin{cases} \frac{(m+1)^2}{4} & (m=2t-1, t \in \mathbf{N}^*) \\ \frac{m(m+2)}{4} & (m=2t, t \in \mathbf{N}^*). \end{cases}$$

高考仿真卷(六)

1. C [由 $\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \end{cases}$ 解得 $x=2$, 所以 $A=\{2\}$,

因为 $A \cup B = B$, 所以 $A \subseteq B$, 所以 $2 \in \{1, k\}$, 所以 $k=2$.

故选 C.]

2. B [将这些数据按从小到大排列可得: 10, 12, 14, 14, 16, 20, 24, 30, 40, 则其中位数为 16, 故选 B.]

3. C [点 F 为抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的焦点, 其准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$, 因为点 $A(2, m)$ 在抛物线 C 上, 且 $|AF| = 3$, 则有

$$2 - \left(-\frac{p}{2}\right) = 3, \text{ 解得 } p=2. \text{ 故选 C.}]$$

4. D [依题意得 $\begin{cases} 5.0 = 5 + \lg V_2, \\ 4.5 = 5 + \lg V_1, \end{cases}$

$$\text{两式相减得 } 0.5 = \lg V_2 - \lg V_1 = \lg \frac{V_2}{V_1},$$

解得 $\frac{V_2}{V_1} = 10^{0.5} = \sqrt{10}$, 所以 $\sqrt{10} \in (3, 3.5)$. 故选 D.]

5. D [因为 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$, 所以 $\overrightarrow{PA} + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) = \mathbf{0}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{PA} + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AP}) = \mathbf{0},$$

所以 $3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \mathbf{0}$, 所以 $3\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$. 所以

$$\overrightarrow{PA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}. \text{ 故选 D.}]$$

6. D [对于选项 A, 由题意,

$$\text{可得 } g(x) = f\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left[2\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \cos\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin 2x, \text{ 故 A 错误;}$$

对于选项 B, 令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 即

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 当 } k=1 \text{ 时, } g(x) \text{ 在 } \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

上单调递增, 故 B 错误;

$$\text{因为 } \overrightarrow{MF_1} + 2\overrightarrow{MF_2} + 2\overrightarrow{MP} = \mathbf{0},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{MF_1} = -4\overrightarrow{MN},$$

则 M, F_1, N 三点共线, 因为 M 是 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心, 所以 MF_1, MP 分别为 $\angle PF_1F_2, \angle F_1PF_2$ 的角平分线,

$$\text{则 } \frac{|\overrightarrow{PF_1}|}{|\overrightarrow{PN}|} = \frac{|\overrightarrow{F_1F_2}|}{|\overrightarrow{F_2N}|} = \frac{|\overrightarrow{F_1M}|}{|\overrightarrow{MN}|} = 4,$$

$$\text{所以 } |PF_1| = |F_1F_2| = 2|PF_2|, \text{ 所以 } e = \frac{|F_1F_2|}{|PF_1| + |PF_2|} = \frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } a = 3, \text{ 由椭圆对称性有 } |F_1B| = |F_2A|,$$

$$\text{所以 } |F_1A| + |F_1B| = |F_1A| + |F_2A| = 2a = 6.]$$

15. 解: (1) X 的可能取值为 0, 1, 2,

$$\text{故 } P(X=0) = \frac{C_5^3}{C_7^3} = \frac{2}{7},$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 C_5^2}{C_7^3} = \frac{4}{7},$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 C_5^1}{C_7^3} = \frac{1}{7},$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

$$\text{故 } E(X) = 0 \times \frac{2}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{1}{7} = \frac{6}{7}.$$

$$(2) \text{ 由题中数据得 } \bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 20.5, \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = 7.5,$$

$$\text{因为 } \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 2016, \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 8773,$$

$$\text{所以 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10 \bar{x}^2}$$

$$= \frac{2016 - 10 \times 20.5 \times 7.5}{8773 - 10 \times 20.5^2} = \frac{29}{277} \approx 0.1,$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x} = 7.5 - \frac{29}{277} \times 20.5 \approx 5.4.$$

所以 $\hat{a}$ 与 $\hat{b}$ 的值分别为 5.4 和 0.1.

16. 解: (1) 因为 $b(\sin B + \sin C) = (a - c)(\sin A + \sin C)$,

$$\text{由正弦定理得 } b(b + c) = (a - c)(a + c), \text{ 整理得 } b^2 + c^2 - a^2 = -bc,$$

$$\text{由余弦定理得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{又 } A \in (0, \pi), \text{ 所以 } A = \frac{2\pi}{3}.$$

(2) 因为 AD 为 A 的角平分线,

$$\text{则 } \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{由 } S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABC},$$

$$\text{可得 } \frac{1}{2} c \cdot AD \cdot \sin \angle BAD + \frac{1}{2} b \cdot AD \cdot \sin \angle CAD =$$

$$\frac{1}{2} bc \sin \angle BAC.$$

$$\text{整理得 } AD(b + c) = bc,$$

$$\text{又因为 } 9b + c = 64,$$

$$\text{可得 } AD = \frac{bc}{b+c} = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \times \frac{9b+c}{64}} = \frac{1}{\frac{1}{64} \left(9 + 1 + \frac{c}{b} + \frac{9b}{c}\right)} \leq \frac{1}{\frac{1}{64} \left(2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{9b}{c}} + 10\right)} = 4,$$

$$\text{当且仅当 } \frac{c}{b} = \frac{9b}{c}, \text{ 即 } c = 3b = 16 \text{ 时, 等号成立,}$$

所以 AD 的最大值为 4.

17. 解: (1) 设 $P(x, y), A(x_0, 0), B(0, y_0)$,

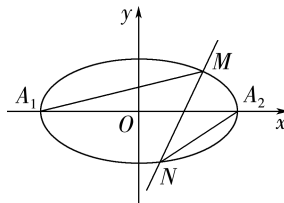
$$\text{因为 } |AB| = \sqrt{3}, \text{ 所以 } \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{3},$$

$$\text{由 } \sqrt{3} \overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \text{ 得 } \sqrt{3}(x, y) = 2(x_0, 0) + (0, y_0),$$

$$\text{解得 } x_0 = \frac{\sqrt{3}x}{2}, y_0 = \sqrt{3}y, \text{ 并代入 } x_0^2 + y_0^2 = 3, \text{ 得 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

$$\text{所以动点 } P \text{ 的轨迹 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

(2) 由 (1) 知 $A_1(-2, 0), A_2(2, 0)$, 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 直线 l 的方程为 $x = my + 1$.



$$\text{联立 } \begin{cases} x = my + 1, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 得 } (4 + m^2)y^2 + 2my - 3 = 0, \Delta > 0,$$

$$\text{由根与系数的关系得, } y_1 + y_2 = -\frac{2m}{4 + m^2}, y_1 y_2 = \frac{-3}{4 + m^2},$$

$$\text{于是 } \frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} = \frac{2m}{3}, \text{ 从而 } my_1 y_2 = \frac{3}{2}(y_1 + y_2),$$

$$\text{因为 } k_1 = \frac{y_1}{x_1 + 2}, k_2 = \frac{y_2}{x_2 - 2}, x_1 = my_1 + 1, x_2 = my_2 + 1,$$

$$\text{则 } \frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{y_1}{x_1 + 2}}{\frac{y_2}{x_2 - 2}} = \frac{y_1(my_2 - 1)}{y_2(my_1 + 3)} = \frac{my_1 y_2 - y_1}{my_1 y_2 + 3y_2},$$

$$\text{又 } my_1 y_2 = \frac{3}{2}(y_1 + y_2),$$

$$\text{所以 } \frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + \frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1 + \frac{9}{2}y_2} = \frac{1}{3}.$$

18. 解: (1) 证明: 取 BC 中点为 E , 连接 PE, OE , 由条件可得 OE 为梯形 $ABCD$ 的中位线, 则 $OE \perp BC$,

又 $PB = PC$, 则 $PE \perp BC$,

且 $PE \cap OE = E, PE \subset \text{平面 } POE, OE \subset \text{平面 } POE$,

根据线面垂直的判定定理, 得 $BC \perp \text{平面 } POE$,

因为 $PO \subset \text{平面 } POE$, 所以 $BC \perp PO$.

由 $PA = PD$, 则 $PO \perp AD$, 又 AD, BC 为梯形的两腰, 则 AD 与 BC 相交,

所以 $PO \perp \text{平面 } ABCD$,

又 $PO \subset \text{平面 } POC$, 所以平面 $POC \perp \text{平面 } ABCD$.

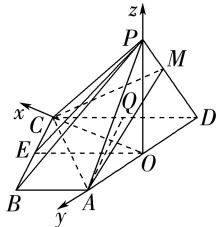
(2) 取 CD 的中点为 Q , 由 $AB = \frac{1}{2}CD = 1, \angle CDA = 60^\circ$,

得 $AQ \perp CD, AD = CD = 2QD = 2$,

因此 $\triangle ACD$ 为等边三角形, $CO \perp AD$.

由(1)知 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 则 OP, OA, OC 两两垂直,

如图, 以 $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}$ 分别为 x, y, z 轴正方向, 建立空间直角坐标系,



由 $CD = DA = PA = PD = 2, \angle CDA = 60^\circ$, 得 $OP = OC = \sqrt{3}$,

则 $A(0, 1, 0), B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right), C(\sqrt{3}, 0, 0), P(0, 0, \sqrt{3})$,

$D(0, -1, 0)$,

由 $\overrightarrow{DM} = \lambda \overrightarrow{DP}$ 得, $M(0, \lambda - 1, \sqrt{3}\lambda)$.

所以 $\overrightarrow{PC} = (\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3}), \overrightarrow{BC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right), \overrightarrow{AC} = (\sqrt{3}, -1, 0), \overrightarrow{AM} = (0, \lambda - 2, \sqrt{3}\lambda)$.

设平面 PCB 的法向量为 $n_1 = (a, b, c)$,

$$\text{由 } \begin{cases} n_1 \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \\ n_1 \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} \sqrt{3}a - \sqrt{3}c = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{3}{2}b = 0, \end{cases}$$

取 $a = \sqrt{3}$, 得 $b = 1, c = \sqrt{3}$, 即平面 PCB 的一个法向量为 $n_1 = (\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$.

设平面 ACM 的法向量为 $n_2 = (x, y, z)$,

$$\text{由 } \begin{cases} n_2 \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ n_2 \cdot \overrightarrow{AM} = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} \sqrt{3}x - y = 0, \\ (\lambda - 2)y + \sqrt{3}\lambda z = 0, \end{cases}$$

取 $y = \sqrt{3}\lambda$, 得 $x = \lambda, z = 2 - \lambda$,

即平面 ACM 的一个法向量为 $n_2 = (\lambda, \sqrt{3}\lambda, 2 - \lambda)$.

记平面 PCB 与平面 ACM 的夹角为 θ ,

$$\text{所以 } \cos \theta = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{\sqrt{42}}{7}, \text{ 化简得 } (3\lambda - 2)^2 = 0, \text{ 即 } \lambda = \frac{2}{3}, \text{ 所以实数 } \lambda \text{ 的值为 } \frac{2}{3}.$$

19. 解: (1) 因为 $f_1(x) = \sin x$, 则 $f'_1(x) = \cos x, f''_1(x) = -\sin x, f'''_1(x) = -\cos x$,

所以 $f'_1(0) = 1, f''_1(0) = 0, f'''_1(0) = -1$,

所以 $g_1(x) = \sin 0 + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \frac{-1}{3!}(x-0)^3$, 即 $g_1(x) = x - \frac{1}{6}x^3$;

同理可得, $g_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$.

(2) 由(1)知, $f_1(x) = \sin x, g_1(x) = x - \frac{1}{6}x^3$,

令 $h(x) = f_1(x) - g_1(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3$,

则 $h'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$,

所以 $h''(x) = -\sin x + x, h'''(x) = 1 - \cos x \geq 0$,

所以 $h''(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 又 $h''(0) = 0$,

所以当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $h''(x) < 0, h'(x)$ 单调递减; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h''(x) > 0, h'(x)$ 单调递增.

所以 $[h'(x)]_{\min} = h'(0) = 1 - 1 + 0 = 0$, 所以 $h'(x) \geq 0$,

所以 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 又 $h(0) = 0$,

所以当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $h(x) < 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$.

综上所述, 当 $x < 0$ 时, $f_1(x) < g_1(x)$; 当 $x = 0$ 时, $f_1(x) = g_1(x)$; 当 $x > 0$ 时, $f_1(x) > g_1(x)$.

(3) 证明: 令 $\varphi(x) = f_2(x) - g_2(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$,

则 $\varphi'(x) = -\sin x + x$,

所以 $\varphi''(x) = 1 - \cos x \geq 0$, 所以 $\varphi'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

又 $\varphi'(0) = 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$, 即 $\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$.

因为 $y = e^x$ 在点 $x = 0$ 处的 4 阶泰勒展开式为: $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$,

所以 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号.

① 当 $x \geq 0$ 时, 由(2)可知, $\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号,

所以 $e^x + \sin x + \cos x \geq \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right) + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) = 2 + 2x$;

② 当 $x < 0$ 时, 设 $F(x) = e^x + \sin x + \cos x - 2 - 2x, F(0) = 0$,

$F'(x) = e^x + \cos x - \sin x - 2 = e^x + \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$,

$F''(x) = e^x - \sin x - \cos x$,

当 $x \in (-1, 0)$ 时, 由(2)可知 $\sin x < x - \frac{1}{6}x^3$,

所以 $F''(x) = e^x - \sin x - \cos x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 +$

$\frac{1}{6}x^3 - x - \cos x = 1 - \cos x + \frac{1}{6}x^2(3 + 2x) > 0$,

即有 $F'(x) < F'(0) = 0$;

当 $x \in (-\infty, -1]$ 时, $F'(x) = e^x + \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 <$

$\frac{1}{e} + \sqrt{2} - 2 < \frac{1}{2} + \sqrt{2} - 2 < 0$,

所以, $x < 0$ 时, $F(x)$ 单调递减, 从而 $F(x) > F(0) = 0$, 即 $e^x + \sin x + \cos x > 2 + 2x$.

综上所述, $e^x + \sin x + \cos x \geq 2 + 2x$.